Элементы теории упругости, тензоры деформаций и напряжений

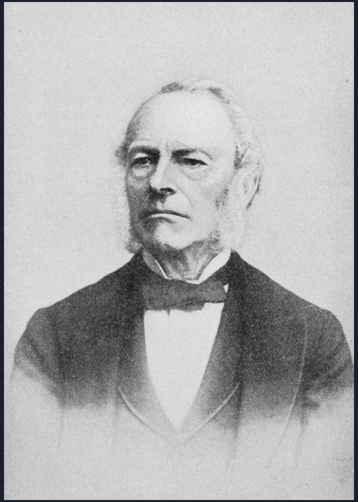
Теория упругости

Теория упругости – раздел механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин.*Главная задача теории упругости* — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях.Теория упругости базируется на физической и математической постановке задач, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих деформацию упругого тела под нагрузкой.

Теория упругости

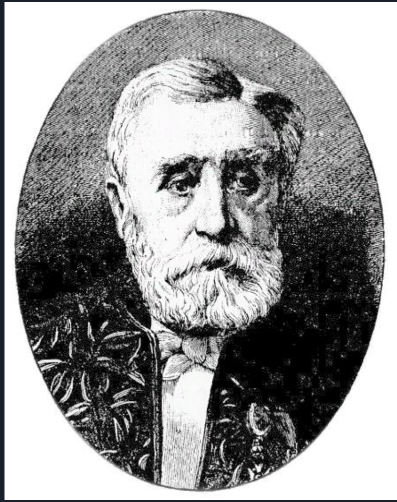
Симео́н Дени́ Пуассо́н

Огюсте́н Луи́ Коши́



Клод Луи Мари Анри Навье

Габрие́ль Ламе́



Сан Сен-Вена́н

Теория упругости

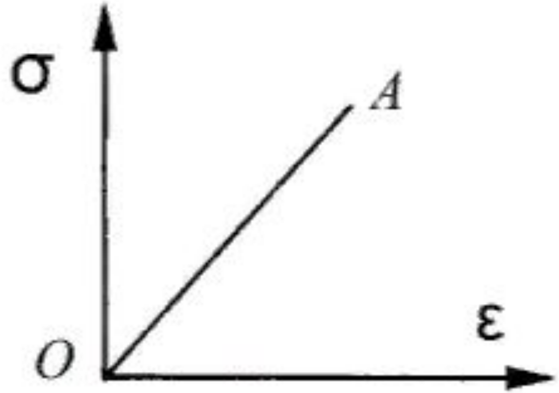
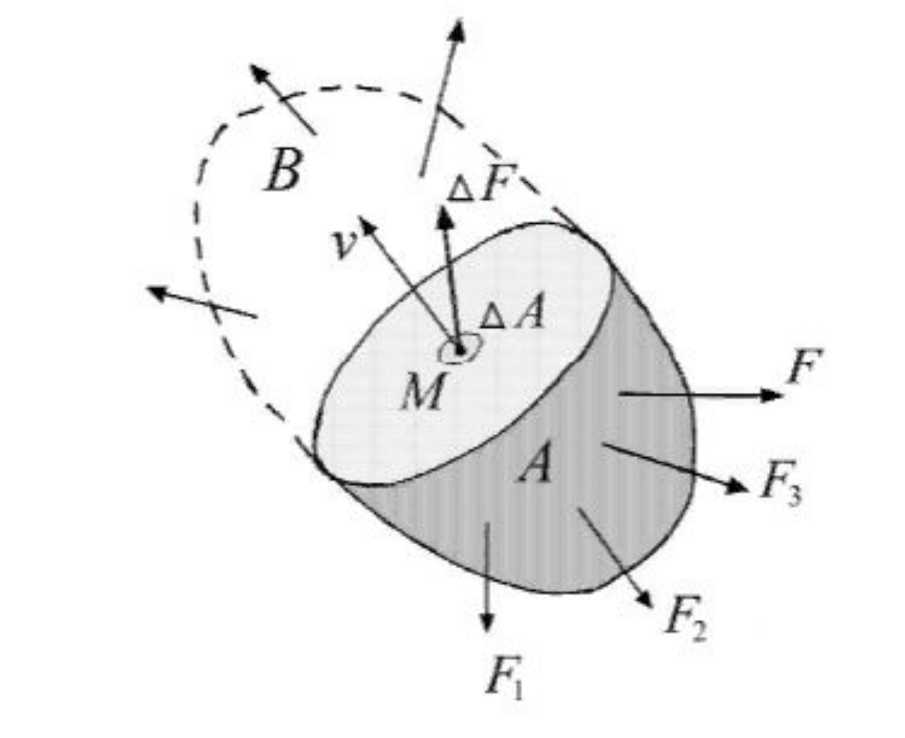


Рис. 1.1. Диаграмма растяжения упругого материала:
ε – деформация; σ – напряжение

Тензор напряжений

Тензор напряжений



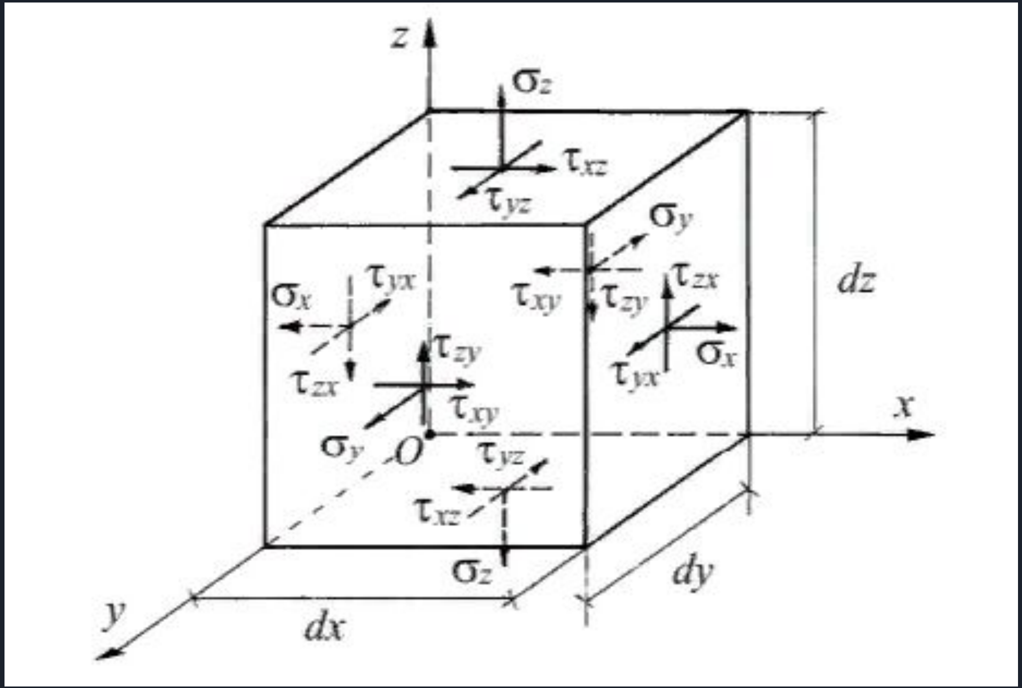
К определению понятия «метод сечений»

Тензор напряжений

Обозначим через ΔF главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку ΔA. Тогда *напряжением внутренних сил*, или *полным напряжением*, p_ν в точке M тела на лежащей в плоскости сечения площадке ΔA с нормалью ν называется предел отношения

$$p_\nu = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Тензор напряжений



Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

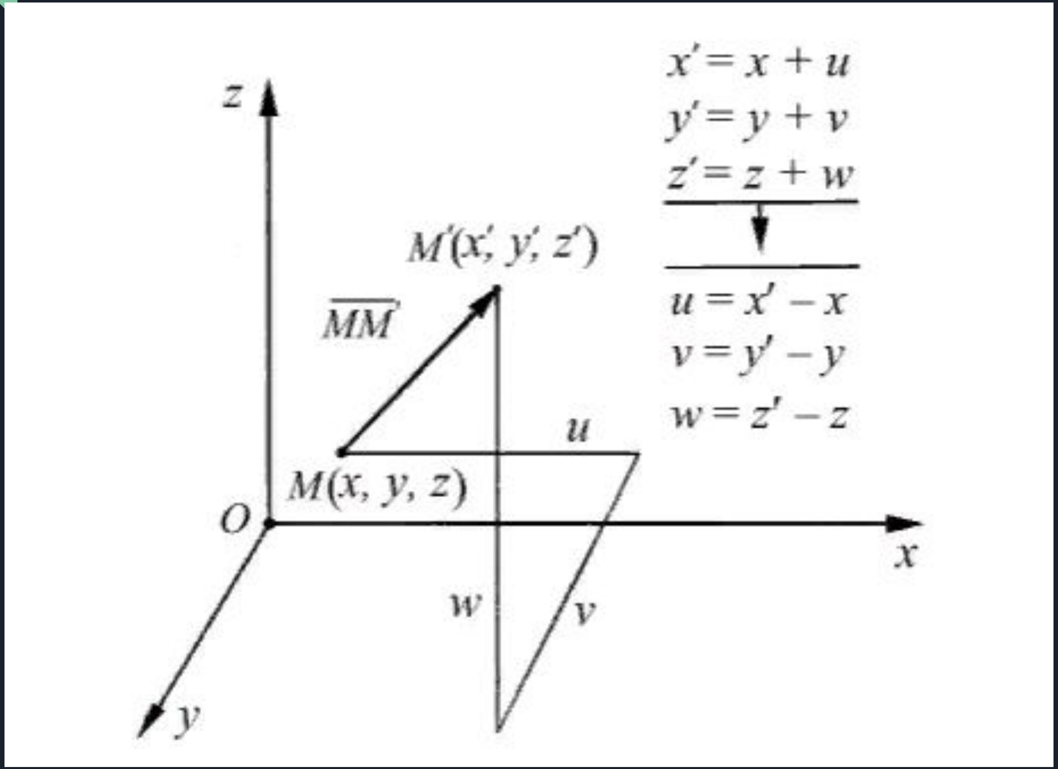
Тензор напряжений

Совокупность напряжений, действующих на трёх взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, – три нормальных напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ и шесть касательных напряжений $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy})$ – образует так называемый *тензор напряжений*

$$T_{\text{Н}} = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}, \qquad (1.1)$$

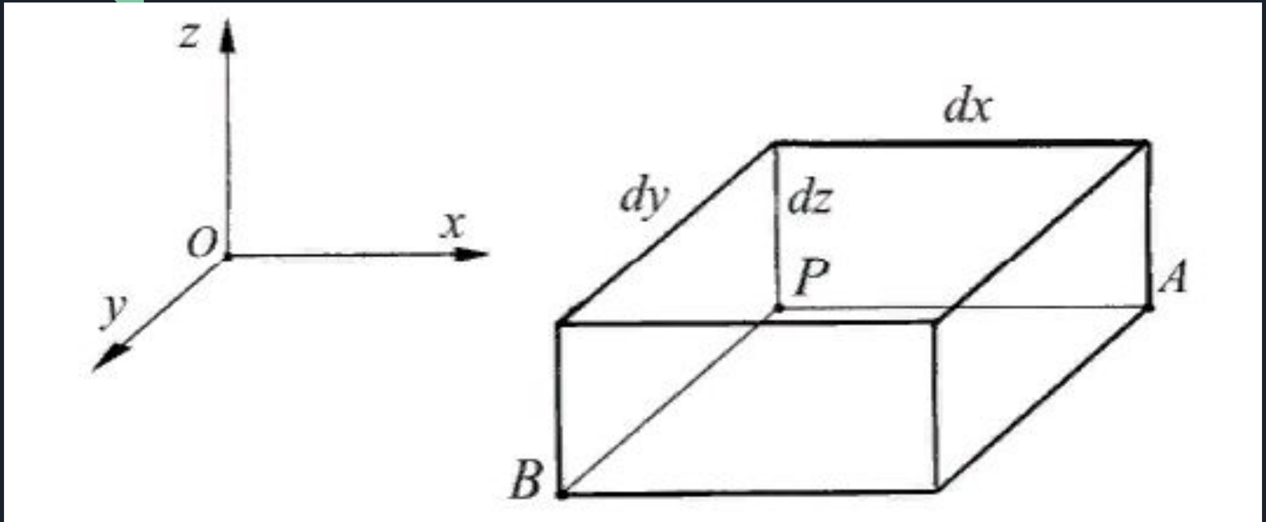
который характеризует напряжённое состояние в рассматриваемой точке O твёрдого тела.

<u>Тензор деформаций</u>

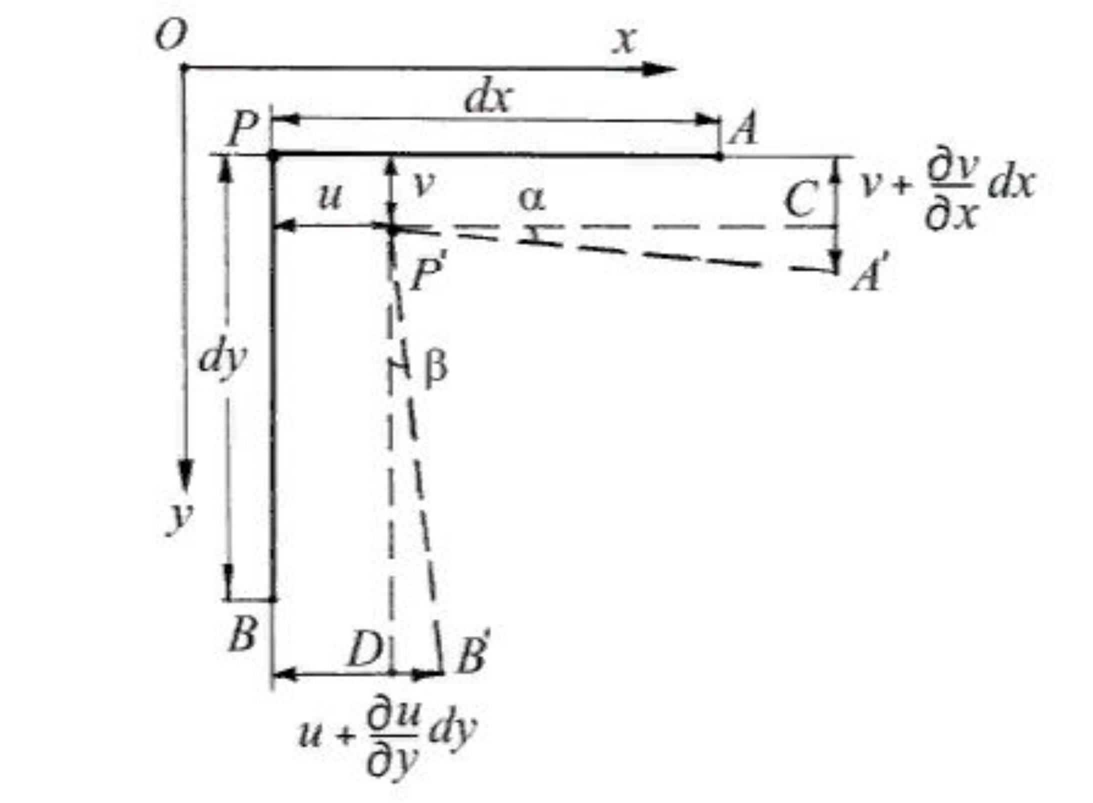


$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned}\right\}$$

Тензор деформаций



$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$



O
x
dx
P
A
$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$
u
v
α
C
P'
A'
dy
β
y
B
D
B'
$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

Тензор деформаций

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях y, z и x, z. В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

– трёх линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{1.16}$$

– трёх угловых деформаций:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1.17}$$

Полученные уравнения (1.16) и (1.17) устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются *формулами Коши*.

Тензор деформаций

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда *тензор деформаций* – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_Д = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}. \qquad (1.18)$$

Спасибо за внимание!