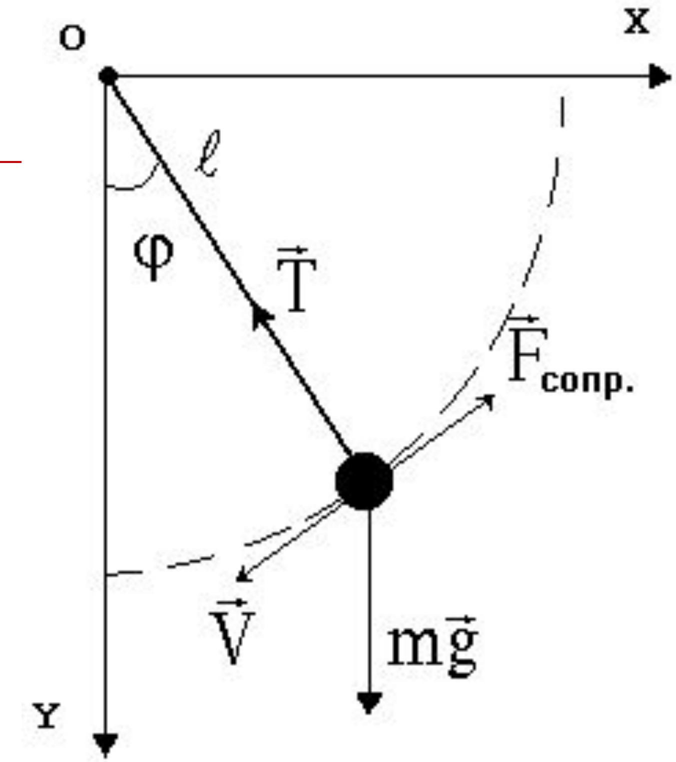
ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ



Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к затуханию колебаний.

В простейшем и наиболее часто встречающемся случае сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$F_x^* = -rV_x = -r\dot{x} \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \Rightarrow$$

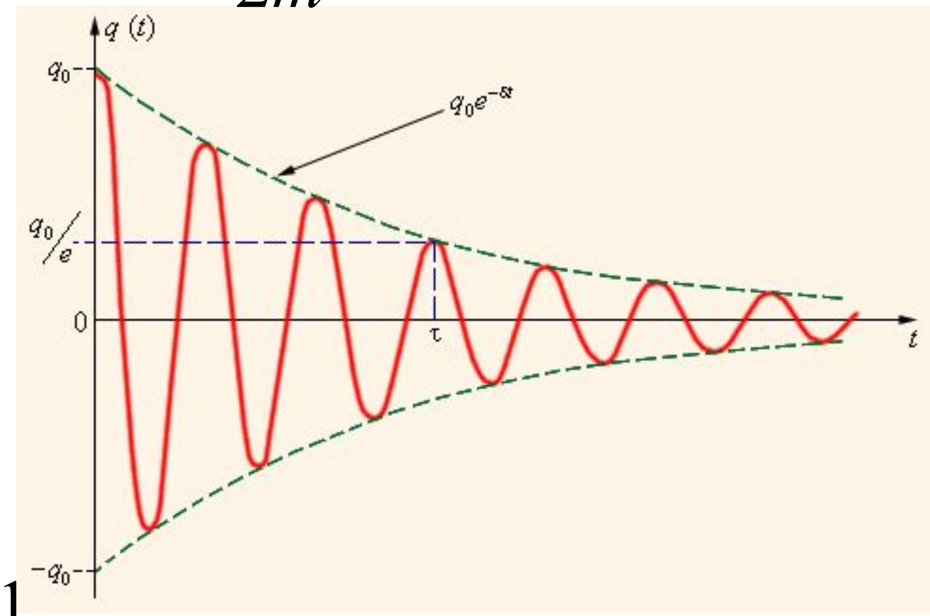
$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0;$$

$$\frac{r}{m} \equiv 2\beta; \quad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Решение дифференциального уравнения движения для затухающих колебаний имеет вид:

$$x(t) = a_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi_0); \quad \beta = \frac{r}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$



Движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой $\omega < \omega_0$ и амплитудой $a(t) = a_0 \exp(-\beta t);$

β – коэффициентом затухания.

Определим время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е=2,7 раз:

$$a(\tau) = a_0 \exp(-\beta\tau) = a_0 / e \Rightarrow \quad \beta\tau = 1.$$

Коэффициент затухания обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в е раз.

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАНИЯ

Отношение амплитуд, соответствующих моментам времени, различающимся на период, называют декрементом затухания

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = \frac{a_0 \exp(-\beta t)}{a_0 \exp\left[-\beta(t+T)\right]} = \exp(\beta T).$$

Логарифм отношения амплитуд, отстоящих на период, называется логарифмическим декрементом затухания

$$\delta \equiv \lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

4. ДОБРОТНОСТЬ

Для характеристики потерь энергии в колебательной системе используется величина, называемая добротностью.

$$Q = -2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

Добротность в π раз превышает число колебаний N_e, совершаемых системой за время τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2,718$ раз.

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$$

5. ЭНЕРГИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Полная механическая энергия колебательной системы складывается из кинетической и потенциальной энергии, то есть $E = kx^2/2 + mV_x^2/2.$
Для затухающих колебаний

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$V_x = \dot{x} = -a_0 \beta e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - a_0 \omega e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$E = \frac{ka_0^2}{2}\exp(-2\beta t)\left[1 + \frac{\beta}{\omega_0}\sin(2\omega t + 2\varphi_0 + \psi)\right]; \quad \psi = arctg\left(\frac{\beta}{\omega}\right).$$

Скорость изменения энергии системы равна мощности, развиваемой силой сопротивления:

$$dE/dt = F_x^* V_x; \;\; F_x^* = -rV_x \Rightarrow dE/dt = -rV_x^2.$$

В моменты времени, для которых скорость тела равна нулю мощность силы сопротивления также равна нулю.
Во все остальные моменты мощность отрицательна и энергия убывает.

6. УРАВНЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим движение тела, на которое действуют: возвращающая сила (квазиупругая) $F_x = -kx;$ сила сопротивления $F_x^* = -rV_x;$ внешняя гармоническая вынуждающая сила с амплитудой F_0 : $F_x' = F_0 \cos(\omega t).$

Уравнение движения в данном случае будет иметь вид:

$$ma_x = -kx - rV_x + F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t).} \quad \frac{r}{m} \equiv 2\beta; \ \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2; \ \frac{F_0}{m} \equiv f_0 \Rightarrow$$

f_0 – амплитуда ускорения и ω - частота внешней вынуждающей силы.

7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение движения вынужденных колебаний является неоднородным:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t).$$

Согласно известной математической теореме, общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, то есть $x(t) = x_o(t) + x_ч(t).$

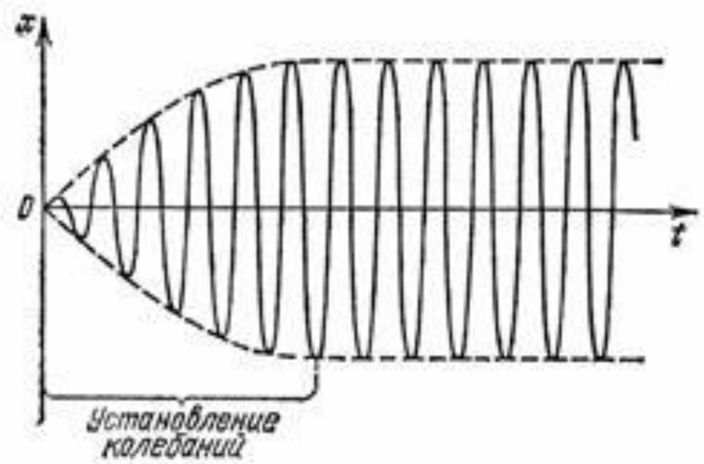
$x_o(t) = a_0\exp(-\beta t)\cos(\omega' t + \varphi_0);$ $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний.

$$x_ч(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

8. АНАЛИЗ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

$$x(t) = a_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right)+\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right).$$

Первое слагаемое описывает собственные затухающие колебания системы. Оно играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при установлении колебаний. С течением времени из-за множителя $\exp(-\beta t)$ роль первого слагаемого уменьшается и им можно пренебречь, оставляя в решении лишь второе слагаемое. Оно представляет собой гармоническое колебание с частотой внешней вынуждающей силы ω.



9. РЕЗОНАНС

Амплитуда вынужденных колебаний определяется выражением

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной.

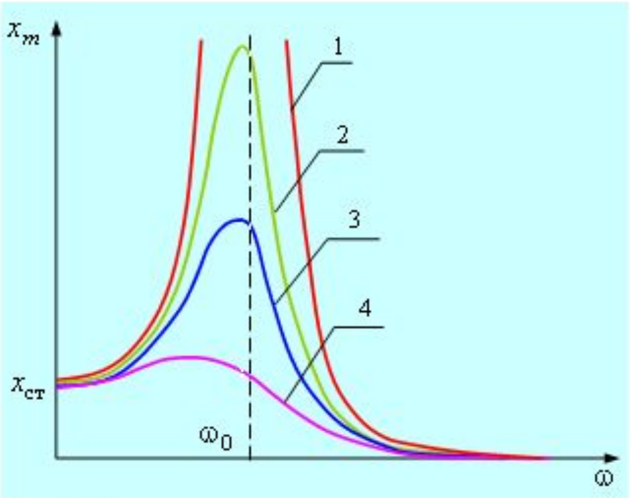


Рис. 7.9. Резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания: 1 – коэффициент $\beta = 0$; 2, 3, 4 – реальные резонансные кривые для колебательных систем с $\beta_2 < \beta_3 < \beta_4$

Резонансную частоту определим из условия максимального значения амплитуды A или минимального значения для подкоренного выражения в знаменателе. Продифференцировав это выражение по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее резонансную частоту:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_p^2)\omega_p + 8\beta^2\omega_p = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.}$$