
Сложение гармонических колебаний. Волновые процессы

1. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях **одной частоты**. Пусть колебания вдоль оси x происходят с **нулевой начальной фазой**, а вдоль оси y со **сдвигом по фазе на φ** . Тогда уравнения колебаний примут вид:

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \cos(\omega t + \varphi) = b \cos(\omega t) \cos \varphi - b \sin(\omega t) \sin \varphi.$$

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде исключим время t . Из первого уравнения следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя синус и косинус в формулу для y , получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса в общем случае не совпадают с осями координат.

2. ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

Определим форму траектории результирующего колебания для некоторых частных случаев.

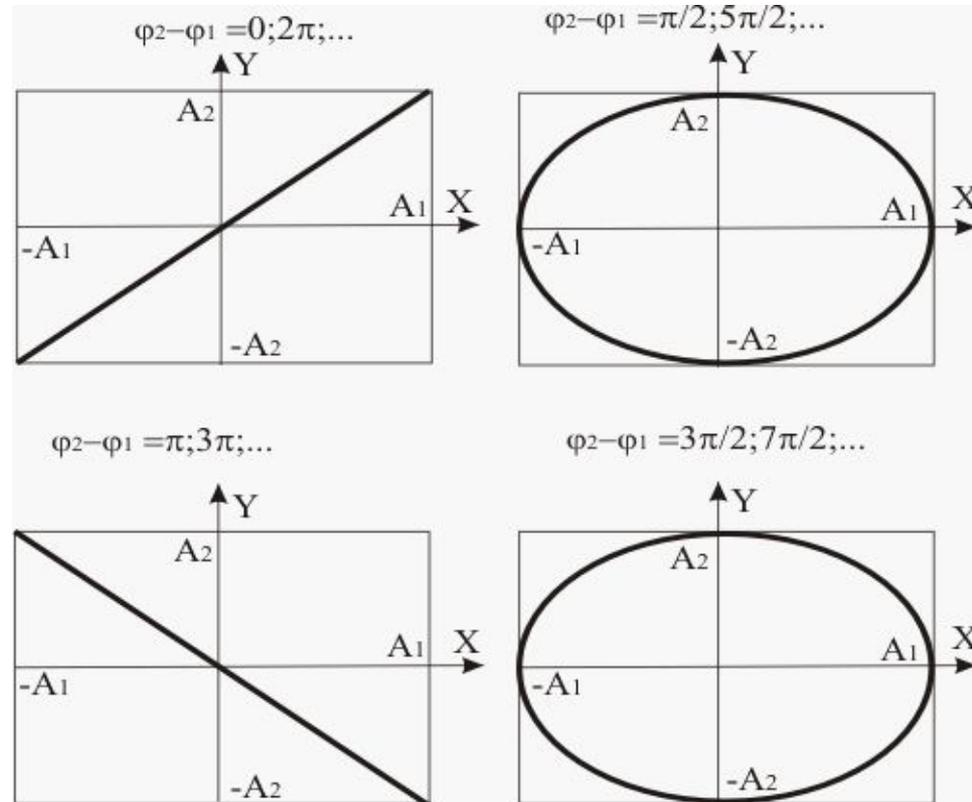
1. Пусть $\Delta \varphi = 0$. В этом случае общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi$$

принимает вид $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow$
 Движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с амплитудой $y = \frac{b}{a}x$
 $\sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Пусть $\Delta \varphi = \pm \pi$. В этом случае $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x$.

Траектория является прямой, лежащей во 2-м и 4-м квадрантах.



3. ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ

При $\varphi = \pm \pi/2$ общее уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $\varphi = +\pi/2$ движение по часовой стрелке

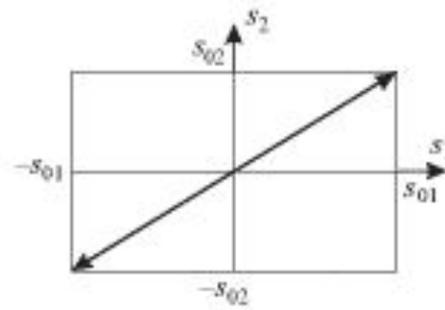
$$x = a \cos(\omega t);$$

$$y = -b \sin(\omega t);$$

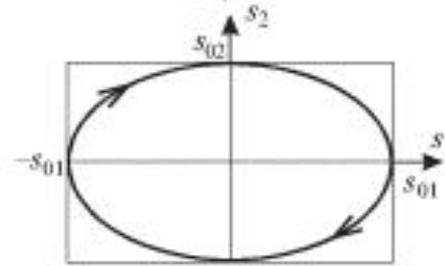
При $\varphi = -\pi/2$ движение против часовой стрелки.

$$x = a \cos(\omega t);$$

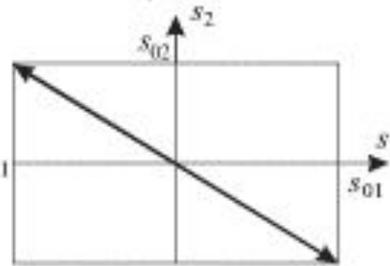
$$y = b \sin(\omega t);$$



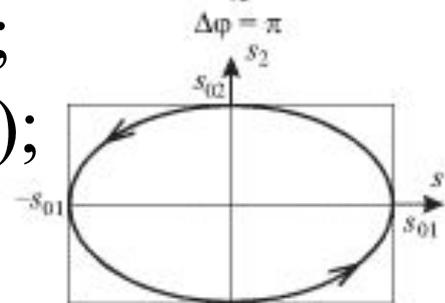
$$\Delta\varphi = 0$$



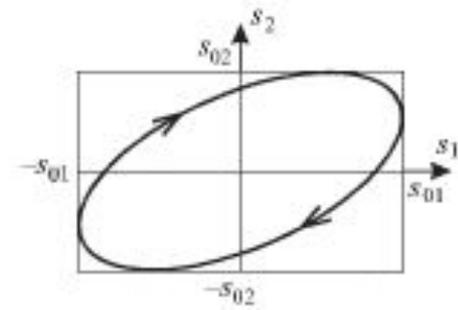
$$\Delta\varphi = \pi/2$$



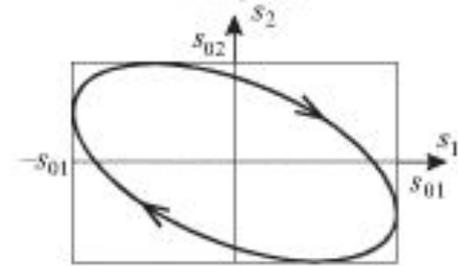
$$\Delta\varphi = \pi$$



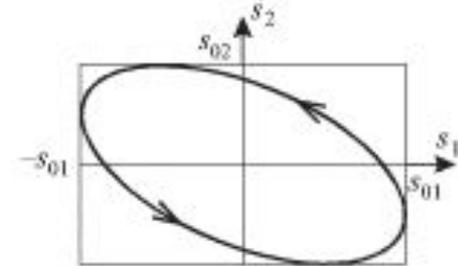
$$\Delta\varphi = 3/2 \pi$$



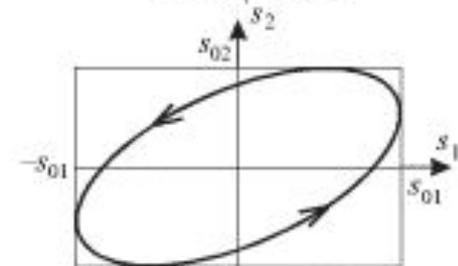
$$0 < \Delta\varphi < \pi/2$$



$$\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$$



$$\pi < \Delta\varphi < 3/2 \pi$$



$$3/2 \pi < \Delta\varphi < 2\pi$$

4. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Если $\varphi = \pm \pi/2$, $a = b = r$,
то уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

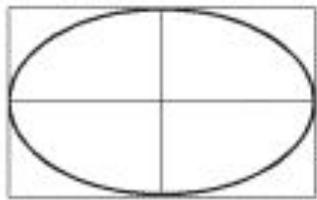
принимает вид $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$.

При равенстве амплитуд
эллипс вырождается
в окружность.

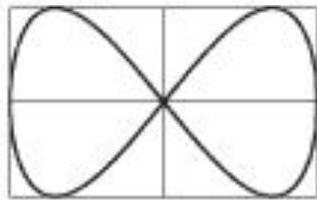
Это означает что равномерное
движение по окружности
радиуса r с угловой
скоростью ω может быть
представлена как сумма двух
взаимно перпендикулярных
колебаний $x = r \cos(\omega t)$;
 $y = \pm r \sin(\omega t)$.

Знак «+» в выражении для y
соответствует движению против
часовой стрелки, знак «-» – движению
по часовой стрелке.

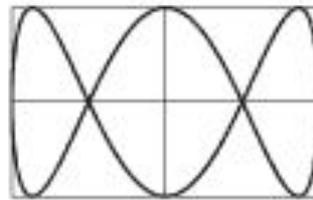
5. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ



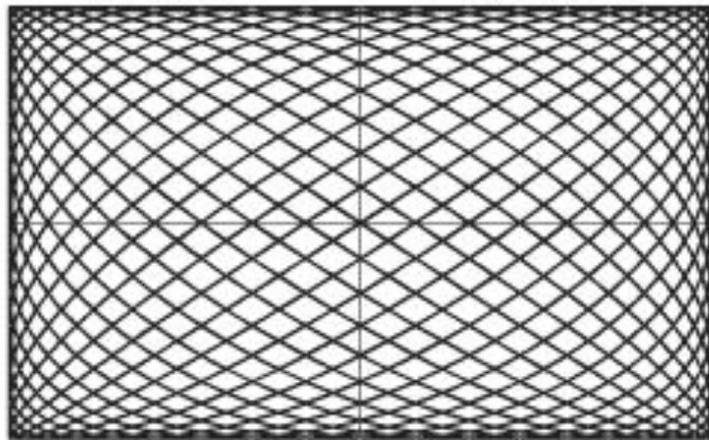
$m = 1, n = 1$



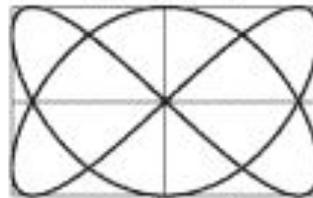
$m = 1, n = 2$



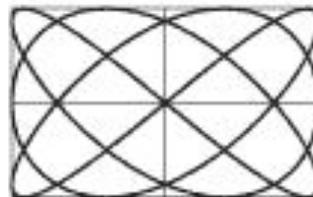
$m = 1, n = 3$



$m = 19, n = 20$



$m = 2, n = 3$



$m = 3, n = 4$

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний **неодинаковы**, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**. Наиболее **простой вид** имеют фигуры Лиссажу для случая, если **отношение частот** – это **простая рациональная дробь**.

Пусть, частоту колебаний вдоль оси x можно представить в виде $\omega_x = m\omega$, а вдоль оси y – $\omega_y = n\omega$, где m и n – натуральные числа. **За то время, пока вдоль оси x точка успеет переместиться из одного крайнего положения в другое m раз, вдоль оси y она совершит n таких перемещений.**

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.

6. ВИДЫ ВОЛН

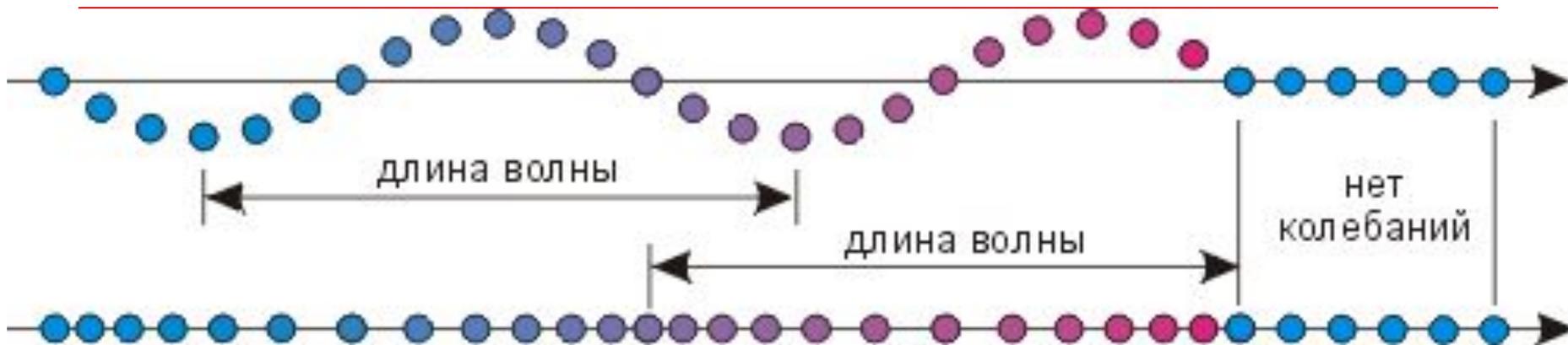


Волнами называется процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Характерное свойство волн состоит в том, что перенос энергии волной происходит без переноса вещества.

Основными видами волн являются механические (упругие) волны: в частности, звуковые и сейсмические волны, волны на поверхности воды; и электромагнитные волны: в частности, световые волны и радиоволны.

7. ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ



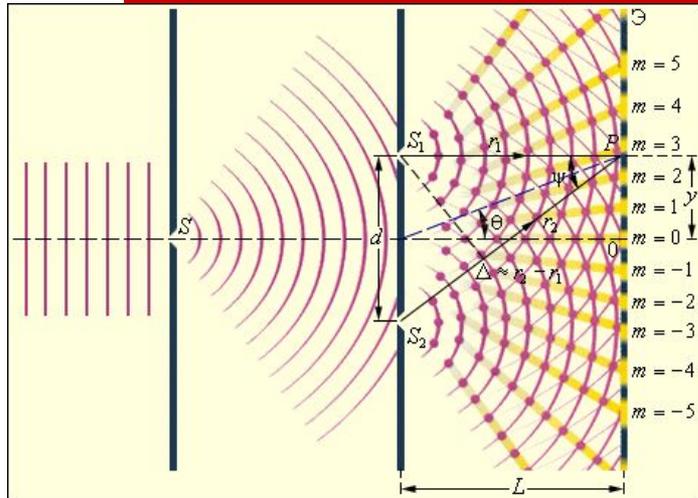
В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна различают продольные и поперечные волны.

В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

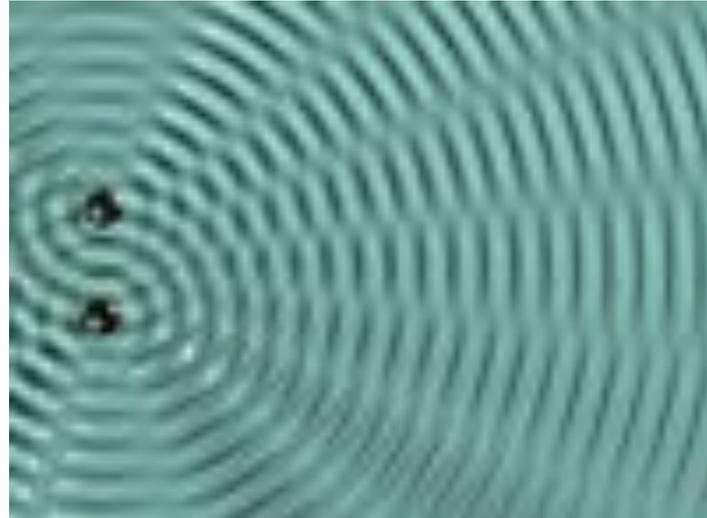
Упругие поперечные волны могут возникать лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

8. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ВОЛН



Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции волн.



В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами, обладают в каждой из точек среды постоянной разностью фаз, волны называются когерентными.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга.

9. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad (\text{принцип суперпозиции волн})$$

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx) \quad \xi_2 = a \cos(\omega t + kx)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos kx \cos \omega t$$

$$\xi = 2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{пучности}} &= \pm n \frac{\lambda}{2} \\ x_{\text{узла}} &= \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Колебания, возникающие при наложении двух плоских встречных волн с одинаковой амплитудой, называются стоячей волной.

Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

В каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн. Амплитуда колебаний является периодической функцией

$$A = \left| 2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right|.$$