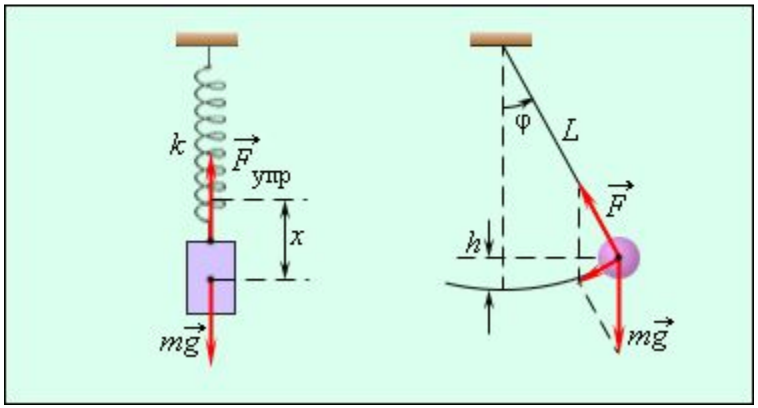
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ



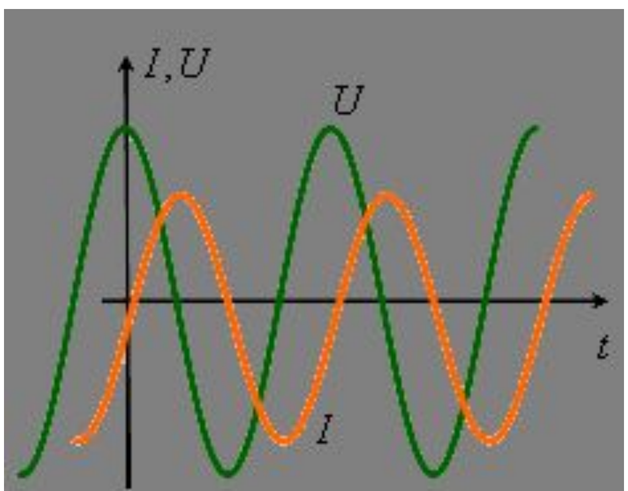


Рис. 7.5

Колебаниями называются периодические процессы. (Процессы обладающие некоторой степенью периодичности).

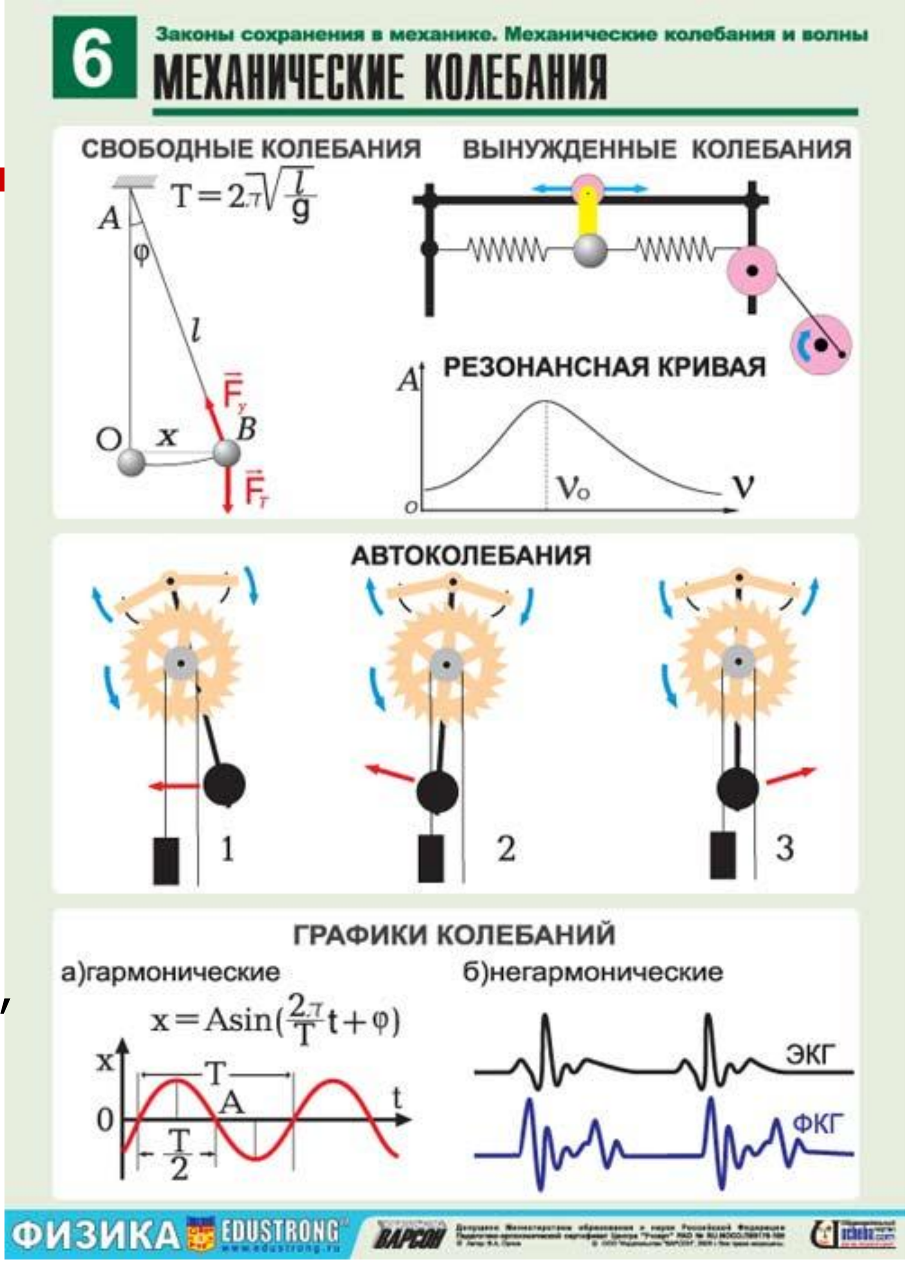
В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают:
механические колебания – колебания зданий, деталей машин, маятников, струн, камертонов, частиц среды;
электромагнитные колебания – колебания напряжения на обкладках конденсатора и силы тока в катушке колебательного контура радиоприемника;
экономические, демографические, популяционные, климатические колебания.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными (или собственными), называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической силы.

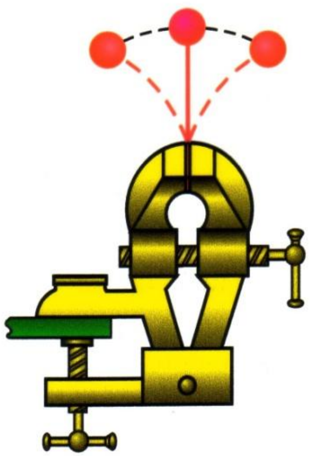


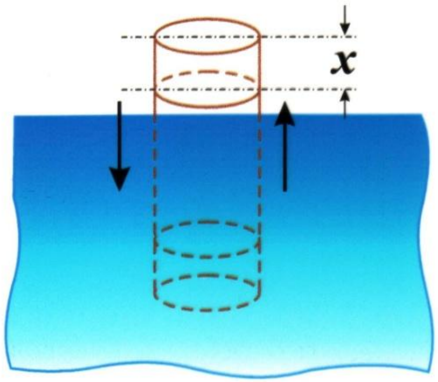
3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Колебания

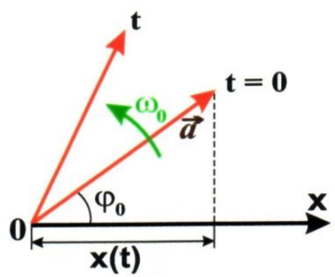
Колебания процессы, в той или иной степени повторяющиеся во времени

Примеры механических колебаний





Графическое представление гармонических колебаний ($\omega_0 = const$)



$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

a - аплитуда колебаний,

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ - фаза колебаний,

φ_0 - начальная фаза колебаний

Простейшими являются гармонические колебания то есть такие, при которых колеблющаяся величина изменяется по гармоническому закону (синус или косинус).

Система, в которой некоторая физическая величина совершает колебания по закону синуса или косинуса называется гармоническим осциллятором.

Колебания в природе и технике часто имеют характер очень близкий к гармоническим.

Негармонические периодические процессы могут быть представлены суммой гармонических колебаний.

4. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора.

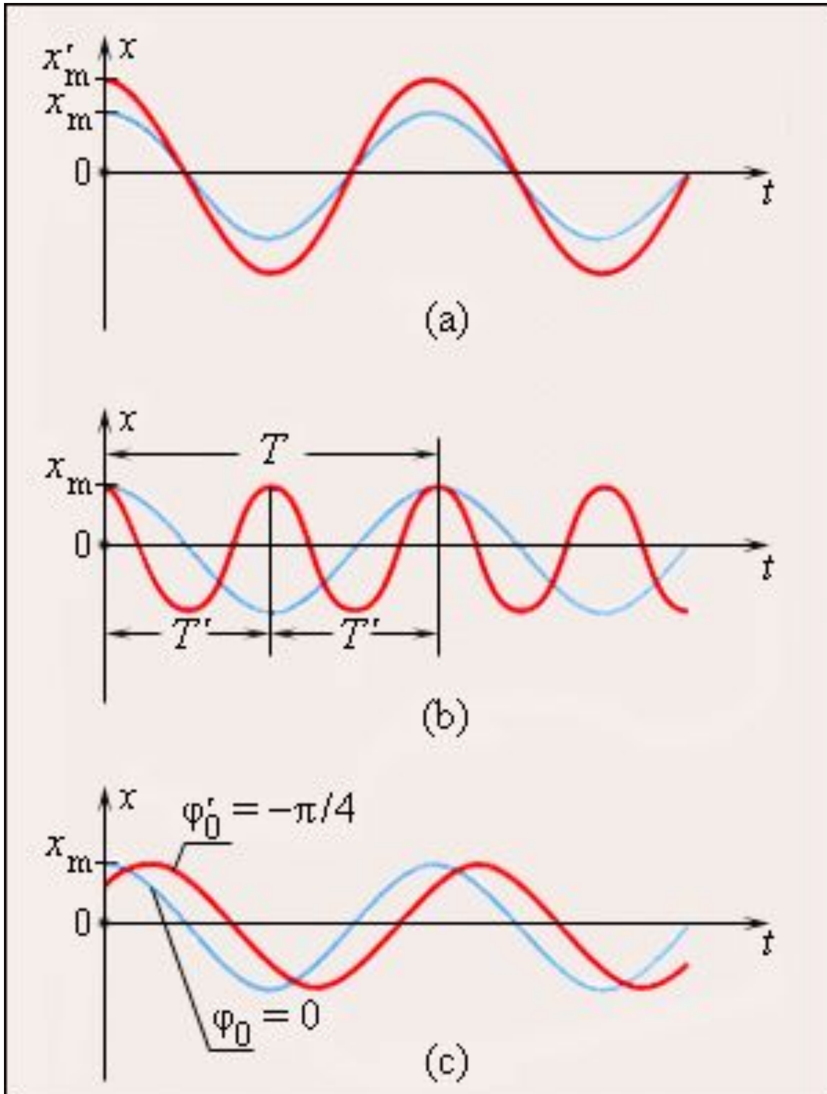
Они описываются уравнением

$$ma_x = F_x; \quad a_x \equiv \dot{V}_x \equiv \ddot{x}; \quad F_x = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi_0).}$$

5. ПАРАМЕТРЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебаний $a \equiv x_m > 0$:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \quad -a \le x \le a.$$

Величина $\varphi \equiv \omega_0 t + \varphi_0$, являющаяся аргументом гармонической функции называется фазой колебаний.

Косинус – периодическая функция с периодом 2π радиан. Различные состояния колеблющейся системы повторяются через промежуток времени, называемый периодом, за который фаза колебаний получает приращение 2π радиан:

$$T = 2\pi/\omega_0;\ \ \omega_0 = 2\pi/T;\ \ T = 1/\nu \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu.$$

6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ

Закон гармонического движения:

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Дифференцируя $x(t)$ по времени, получим проекцию скорости:

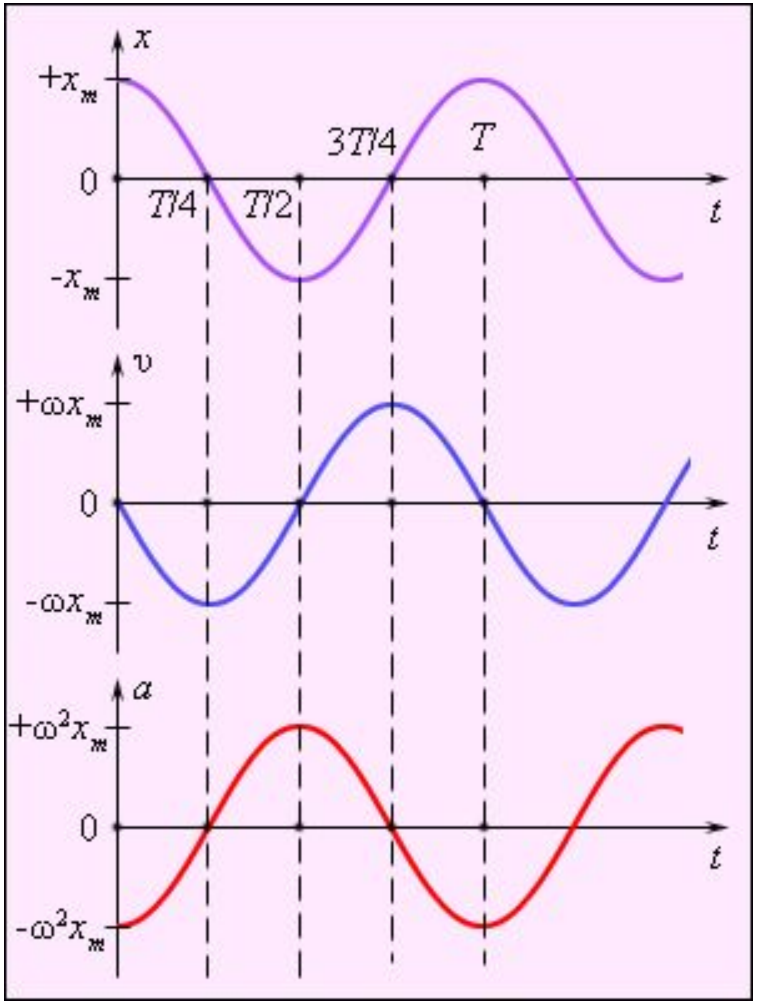
$$V_x = \dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$V_m = x_m \omega_0;$$

Дифференцируя $V_x(t)$ по времени получим проекцию ускорения:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = \ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$a_m = x_m \omega_0^2;$$



7. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАНИЙ

Квазиупругая сила $F_x = -kx$ является консервативной. Ей отвечает потенциальная энергия $U(x) = kx^2/2,$ полная энергия гармонических колебаний должна оставаться неизменной.

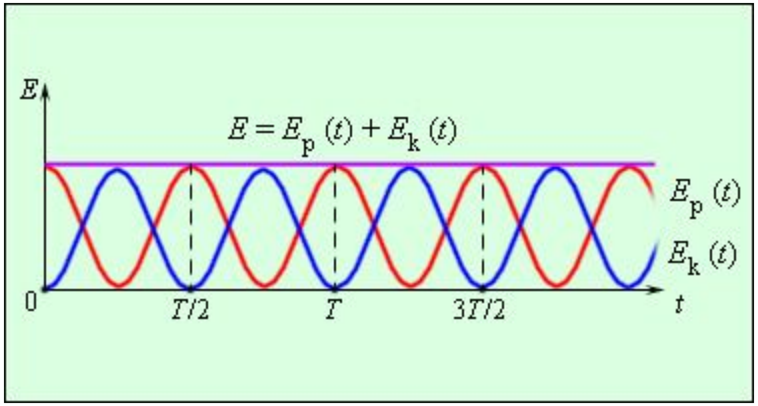
$$E = U_m = K_m; \quad U_m = kx_m^2/2; \quad K_m = mV_m^2/2;$$

$$U_m = K_m \Rightarrow \quad kx_m^2 = mV_m^2; \quad k = m\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$m\omega_0^2 x_m^2 = mV_m^2 \Rightarrow V_m^2 = (x_m\omega_0)^2 \Rightarrow V_m = x_m\omega_0.$$

$$U(t) = U_m/2 + U_m/2\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0);$$

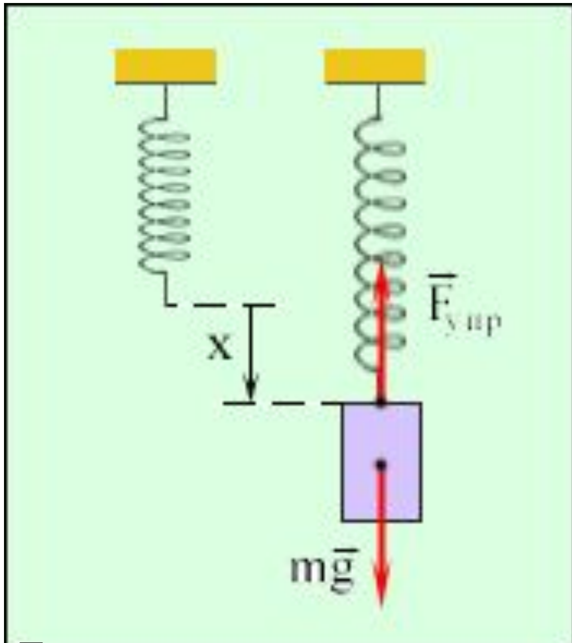
$$K(t) = K_m/2 - K_m/2\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0);$$



$$K(t) + U(t) = E = K_m = U_m.$$

8. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Маятником называют тело, совершающее колебания под действием силы тяжести.



Рассмотрим систему, состоящую из тела массой m, подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь.

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается упругой силой $mg = kx_0$.

Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x, причем ось x направим вертикально вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика.

Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой x, то удлинение пружины станет равным $x_0 + x$, а проекция результирующей силы примет значение

$$F_x = mg - k(x_0 + x) = mg - kx_0 - kx \Rightarrow F_x = -kx.$$

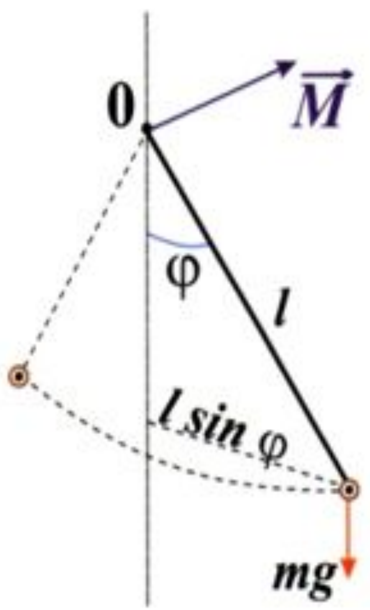
$$ma_x = F_x \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \Rightarrow$$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \boxed{T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}.}$$

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Физический маятник – любое твердое тело, совершающее малые колебания относительно оси, не проходящей через его центр масс.

Математический маятник



$$I\vec{\beta}=\vec{M}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

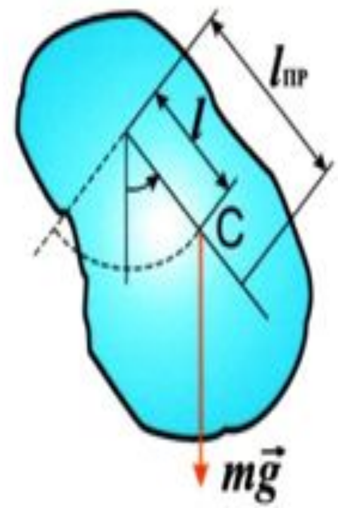
Для малых углов, обозначив $\frac{g}{l}=\omega_0^2$, имеем

$$\boxed{\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=0}$$

Так как $T=2\pi/\omega_0$, то

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Физический маятник



$$\ddot{\varphi}=-\frac{mgl}{I}\sin\varphi$$

Для малых углов, обозначив $\frac{mgl}{I}=\omega_0^2$, имеем

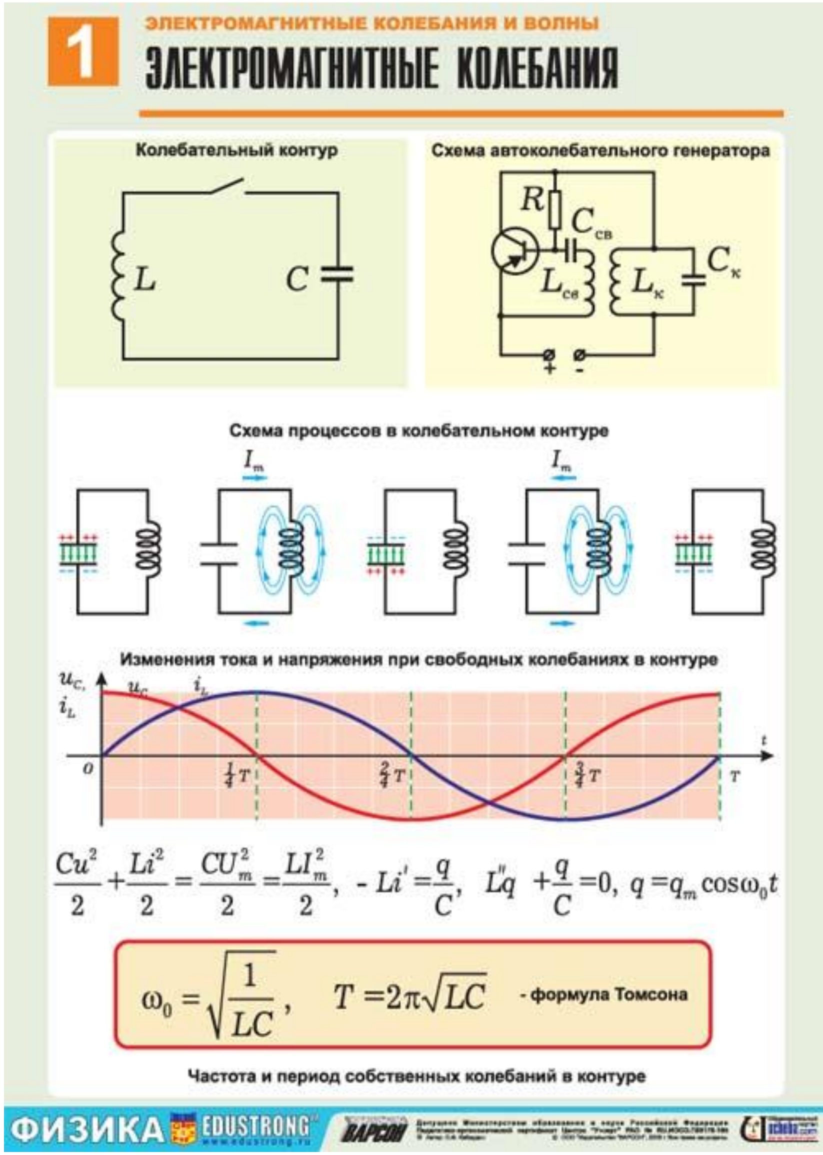
$$\boxed{\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=0}$$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}}$$

Приведенная длина физического маятника $\boxed{l_{пр}=\frac{I}{ml}}$

$$\boxed{\varphi=\varphi_m\cos(\omega_0 t+\alpha_0).}$$

10. ИДЕАЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР



$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}; \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C};$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}; \qquad R = 0 \Rightarrow$$

$$0 = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}; \; I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \ddot{q} \Rightarrow$$

$$0 = -\frac{q}{C} - L\ddot{q} \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0;}$$

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);}$$

$$I = \dot{q} = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$I_m = q_m\omega_0;$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad U_m = \frac{q_m}{C}.$$