

***ОБЩИЕ  
СВЕДЕНИЯ О  
КРИВЫХ  
ЛИНИЯХ И  
ПОВЕРХНОСТЯ  
Х***

**Кривая линия** – совокупность последовательных положений точки, определяемых в процессе ее непрерывного движения в пространстве при условии бесконечно малого промежутка времени перехода в соседние положения.

**Кривую линию** можно рассматривать как траекторию движения точки на плоскости или в пространстве, а также как совокупность точек, удовлетворяющих определенному уравнению.

Кривая линия может являться результатом пересечения между собой поверхностей или поверхности и плоскости.

Кривая линия определяется положением составляющих ее точек. Точки кривой определяются их координатами.

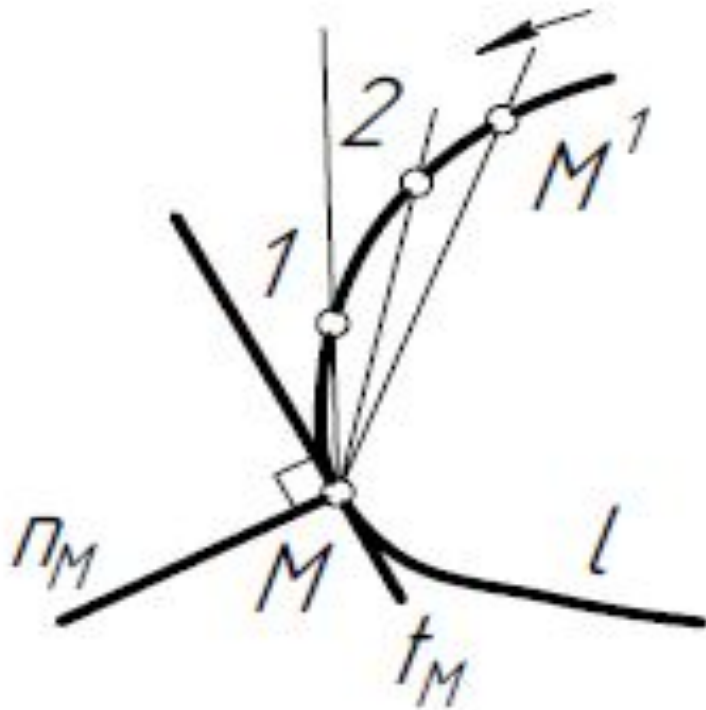
***Закономерная кривая*** – если при своем образовании она подчинена какому-либо геометрическому закону.

Если этот закон можно описать алгебраическим уравнением, то кривая называется ***алгебраической***, в противном случае – ***трансцендентной***.

Алгебраические кривые определяются своим порядком – количеством пересечений с прямой.

Предельное положение секущей в точке  $M$  называется **касательной** к кривой  $l$  в точке  $M$ .

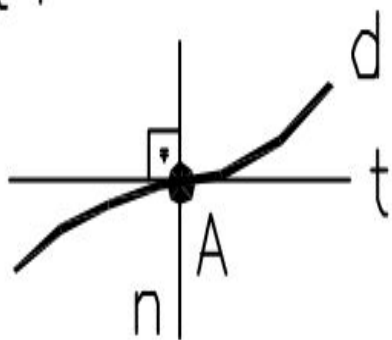
Прямая  $\Pi_M$ , перпендикулярная к касательной  $t_M$  в данной точке  $M$ , называется **нормалью** кривой  $l$  в данной точке  $M$ .



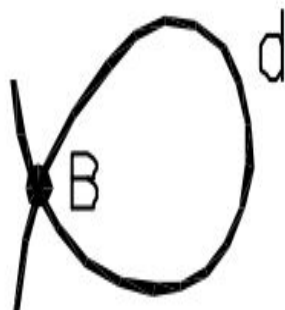
Точку кривой, в которой можно провести только одну касательную и в которой направления движения точки и вращения касательной не изменяются называют обыкновенной, а кривую, состоящую из обыкновенных точек — гладкой.

Точки, в которых можно провести не одну, а две и более касательных или в которых изменяется направление движения точки или вращения касательной, относят к **особым точкам кривой** (точка перегиба, излома).

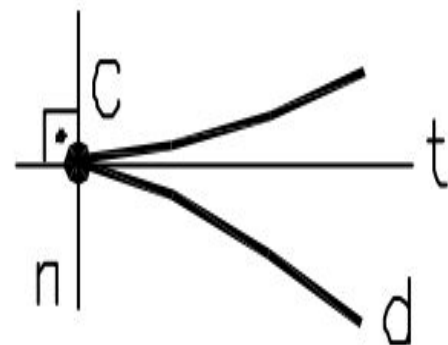
Точка перегиба  $A$ , в которой кривая переходит на другую сторону касательной  $t$ .



Узел или двойная точка  $B$ , в которой кривая пересекает сама себя.



Точка возврата  $C$ , в которой обе ветви кривой имеют общую касательную.



Кривую линию называют плоской, если все точки линии лежат в одной плоскости, и пространственной, если точки не принадлежат одной плоскости.

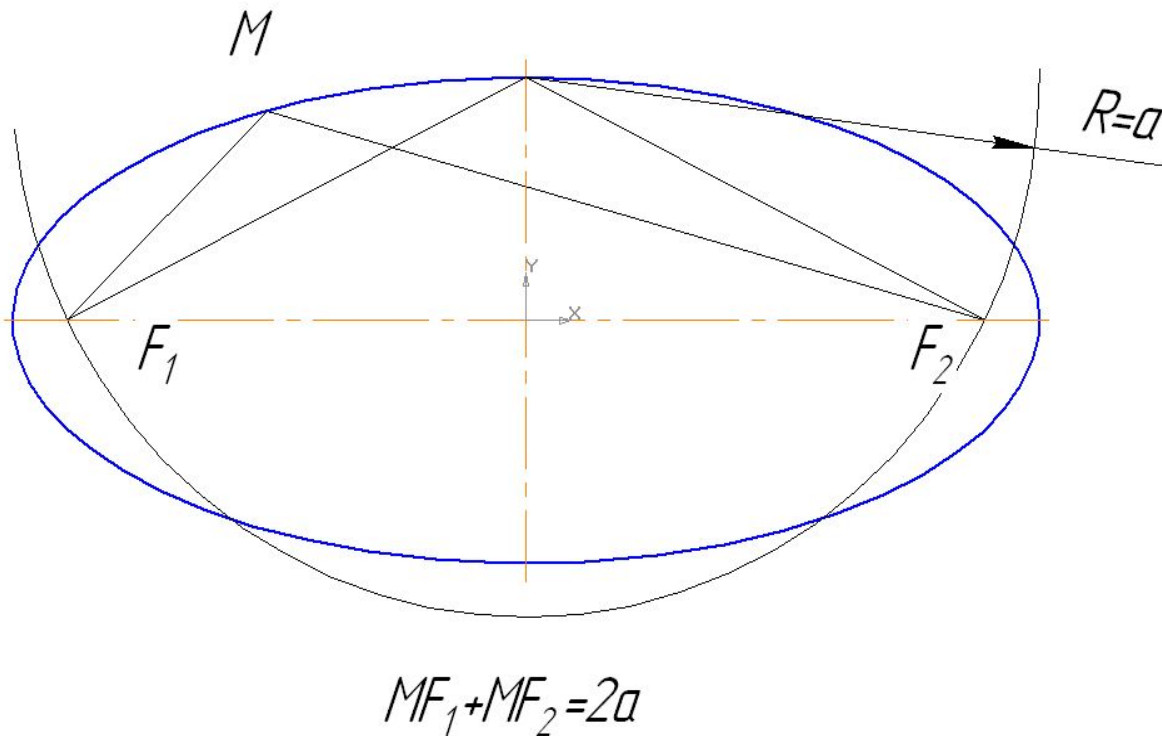
Примеры плоских кривых линий — окружность, эллипс, парабола, гипербола.

Примеры пространственных кривых — винтовая линия, линия пересечения боковых поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса, оси которых не пересекаются.

Для построения проекций кривых линий строят проекции ряда принадлежащих ей точек

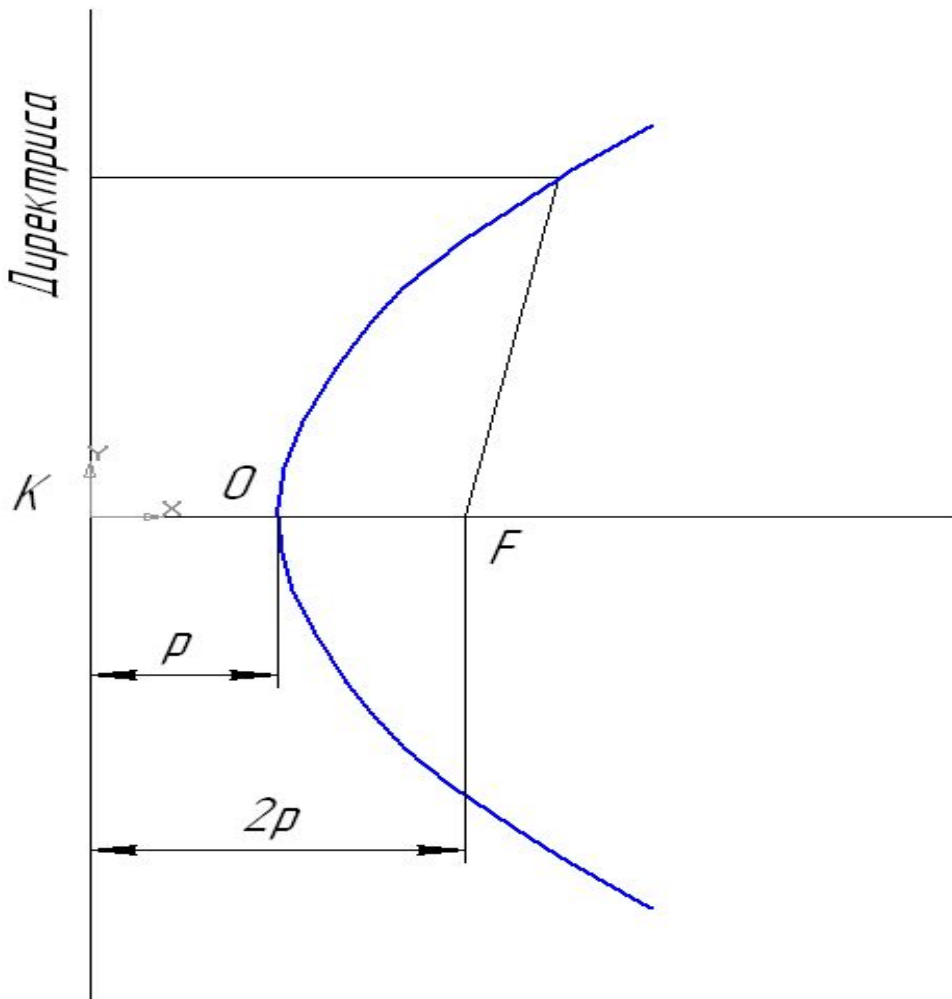
# Плоские кривые второго порядка

- 1. Эллипс** – плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от точек эллипса до двух заданных точек - фокусов, есть величина постоянная и равная длине большой оси эллипса ( $2a$ ).  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , где  $b^2 = a^2 - c^2$  ( $2c$  – расстояние между фокусами).



Частный случай эллипса ( $a=b=R$ ) – окружность  $x^2+y^2=R^2$

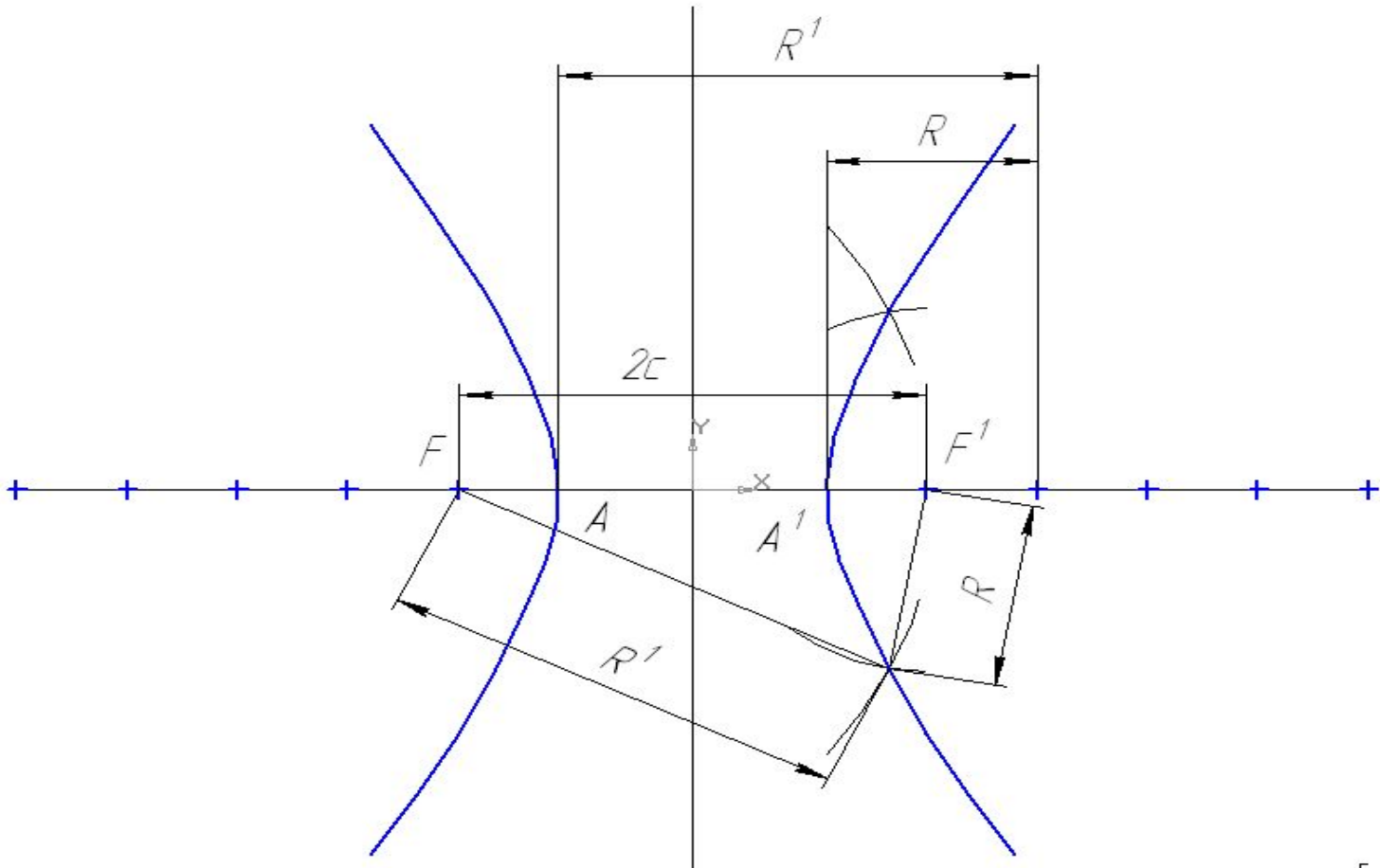
**2. Парабола** – плоская незамкнутая кривая, каждая точка которой равноудалена от прямой, называемой директрисой (направляющей) и от точки  $F$  – фокуса, расположенного на оси ее симметрии. Точку  $O$  пересечения оси симметрии с параболой называют вершиной, расстояние  $KF$  – параметром –  $p$  параболы, где  $2p$  – расстояние между фокусом и





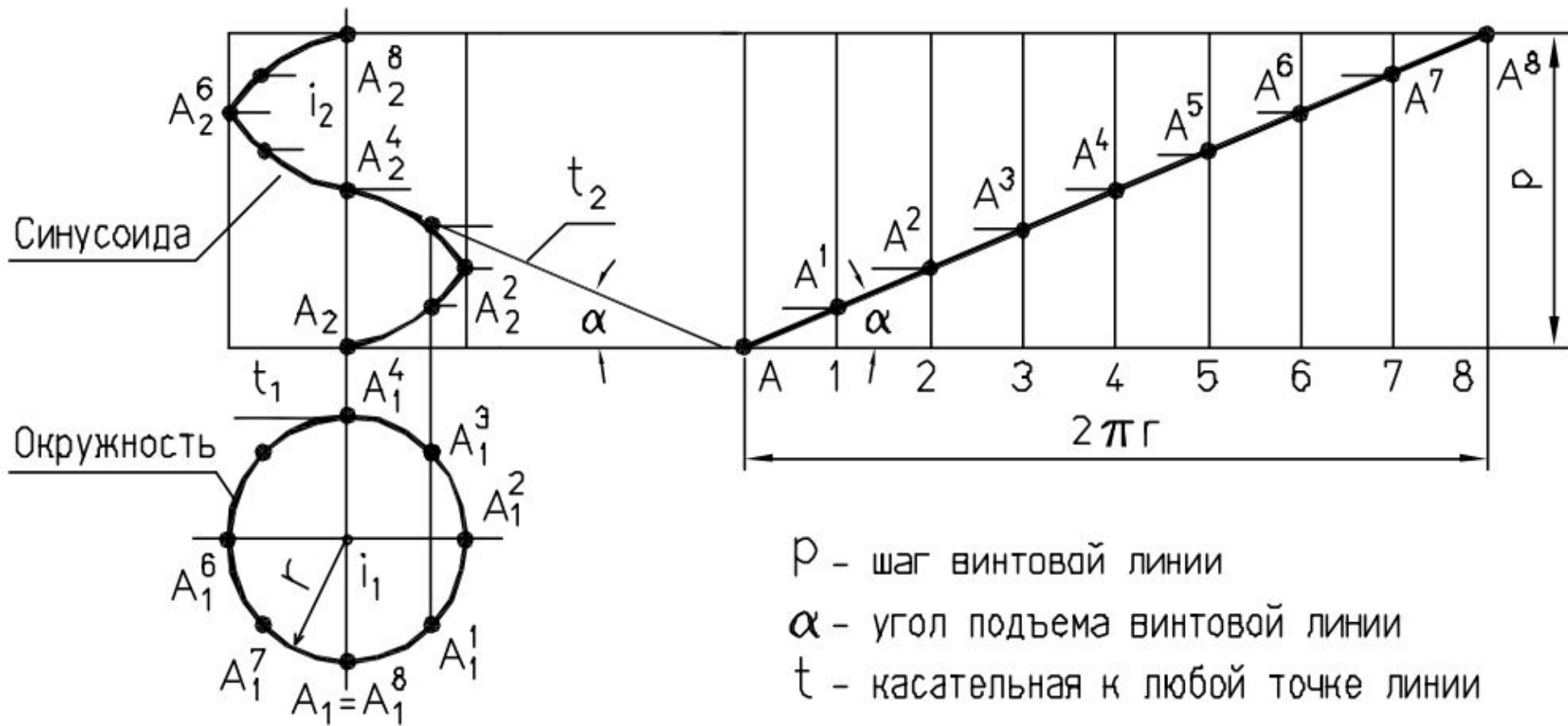
**3. Гипербола** – плоская незамкнутая кривая, для каждой точки которой разность расстояний от двух заданных точек – фокусов, есть величина постоянная и равная расстоянию между ее вершинами( $2a$ ).

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ , где  $b^2 = c^2 - a^2$  ( $2c$  – расстояние между фокусами)



# Пространственные кривые

**Гелиса** (винтовая линия), образуется наложением равномерно поступательного и равномерно вращательного движения точки. Высота, на которую точка поднимается на полный оборот, называется *шагом* винтовой линии. Гелиса есть кратчайшее расстояние между двумя точками кругового цилиндра. Разверткой винтовой линии будет прямая.



Пространственная кривая проецируется в виде плоской, плоская кривая — также в виде плоской или в виде прямой линии, если кривая находится в проецирующей плоскости.

Кривая, представляющая собой прямоугольную проекцию кривой некоторого порядка, сохраняет тот же порядок или оказывается кривой более низкого порядка

## Свойства проецирования кривых

- *Проекция кривой  $n$ -го порядка является кривой порядка не выше  $n$ .*
- *Касательная к кривой в общем случае проецируется в виде касательной к проекции кривой.*
- *Особые точки плоской кривой в общем случае проецируются в особые точки ее проекции.*

# ***ПОВЕРХНОСТЬ***

## ***ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ***

***Поверхность*** можно рассматривать как совокупность последовательных положений  $l_1, l_2, \dots$  линии  $l$ , перемещающейся в пространстве по определенному закону. В процессе образования поверхности линия  $l$  может оставаться неизменной или менять свою форму – изгибаться или деформироваться.

*Существуют три способа задания кривых поверхностей:*

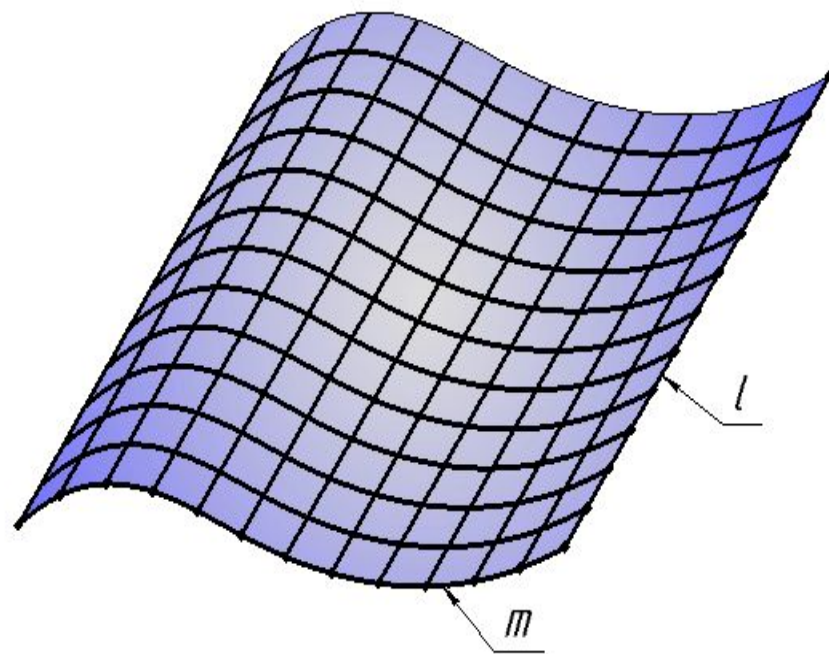
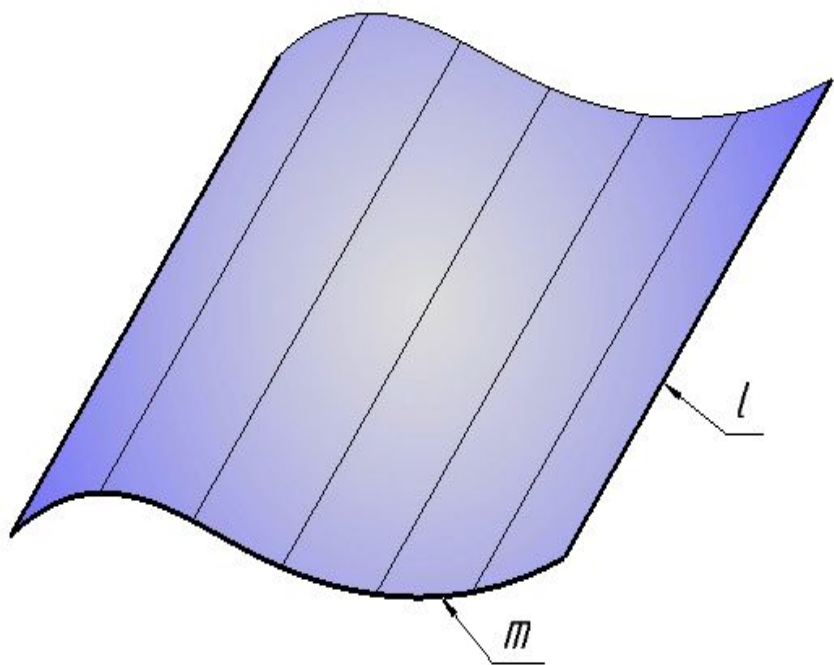
1. *Аналитический* - при помощи уравнений;
2. *При помощи каркаса*;
3. *Кинематический*, т. е. перемещением линий в пространстве

**При каркасном способе** задания кривая поверхность задается совокупностью некоторого количества линий, принадлежащих поверхности.

**Каркас поверхности** - это упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы называют **точечными или линейными.**

**Линейным каркасом** называется множество таких линий, которые имеют единый закон образования и связаны между собой определенной зависимостью



**Кинематический способ** образования поверхности можно представить как множество положений движущейся линии - **образующей** по другой линии – **направляющей**.

Этот способ дает возможность сформулировать понятие **определителя поверхности**. Под этим понятием обычно подразумевают **необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и кинематических связей между ними, которые однозначно определяют поверхность**.

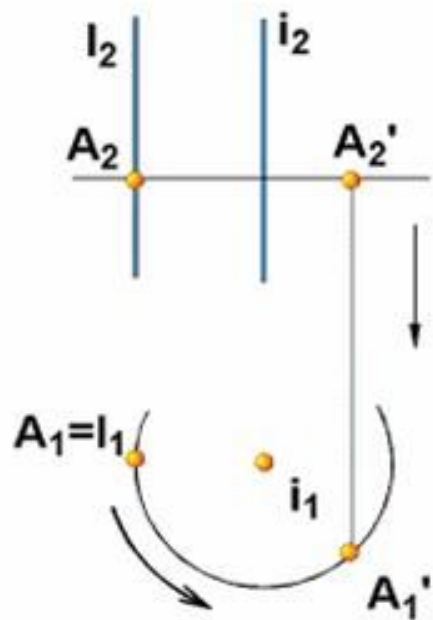
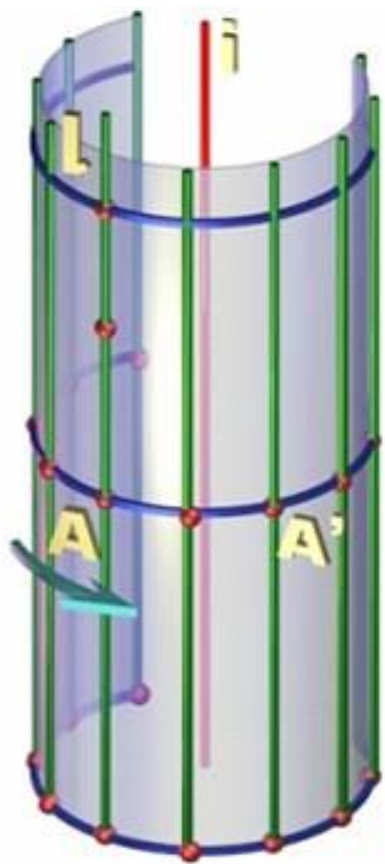
**Определитель поверхности состоит из двух частей:**

**Геометрической части** - совокупности геометрических фигур, с помощью которых можно образовать поверхность ( образующая и направляющая линии).

**Алгоритмической части** - алгоритма формирования поверхности при помощи фигур, входящих в геометрическую часть определителя.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если относительно любой точки пространства, заданной на чертеже, можно однозначно решить вопрос о принадлежности ее данной поверхности.

**Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности**



*Цилиндрическая поверхность вращения может быть образована вращением прямой  $l$   $i$  вокруг оси  $i$*

*Геометрическая часть определителя поверхности состоит из образующей  $l$  и оси  $i$ .*

*Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей линии  $l$  вокруг оси  $i$ .*

Определитель цилиндрической поверхности вращения имеет вид  $\Phi(l \ i, i) [A]$ . На чертеже цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя

Определитель цилиндрической поверхности: а – поверхность образована вращением прямой  $l$   $i$  вокруг оси  $i$ ; б - цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя



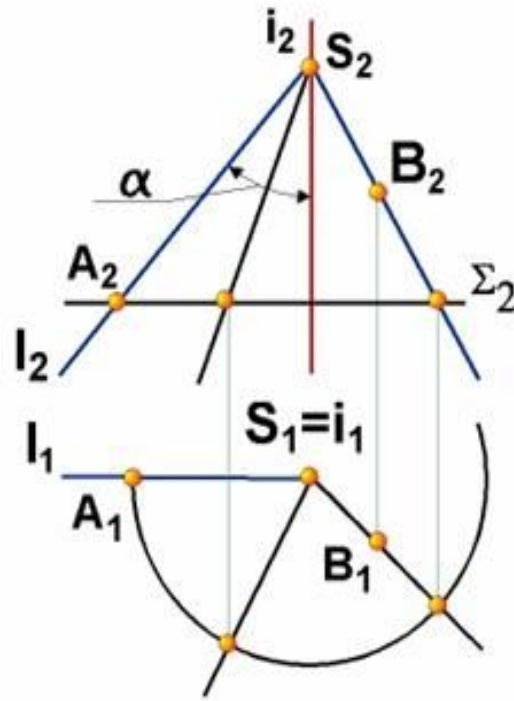
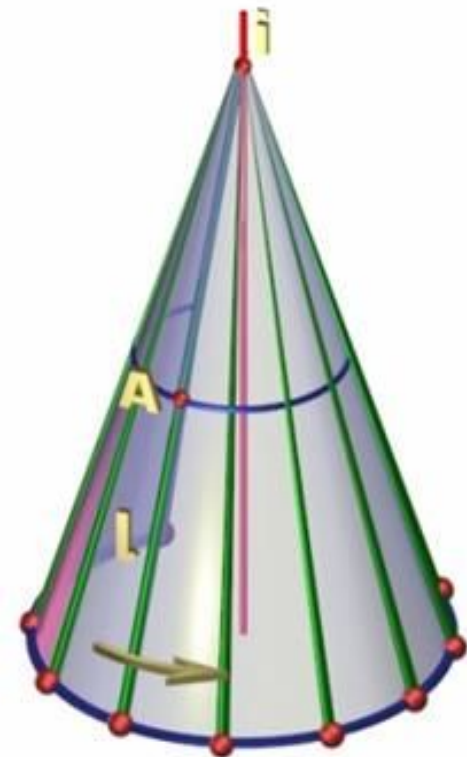
## ***Коническая поверхность***

***вращения*** может быть образована вращением прямой  $l$ , пересекающей ось вращения  $i$  под некоторым углом. Алгоритмическая часть определителя состоит из словесного указания о том, что поверхность образуется вращением образующей  $l$  вокруг оси  $i$ .

***Определитель конической поверхности*** вращения имеет вид  $\Phi(l\ i)[A]$ .

На чертеже конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя:  $l(l1l2)\ i(i1i2)$

Изображение определителя конической поверхности: а - алгоритмическая часть; б - геометрическая часть

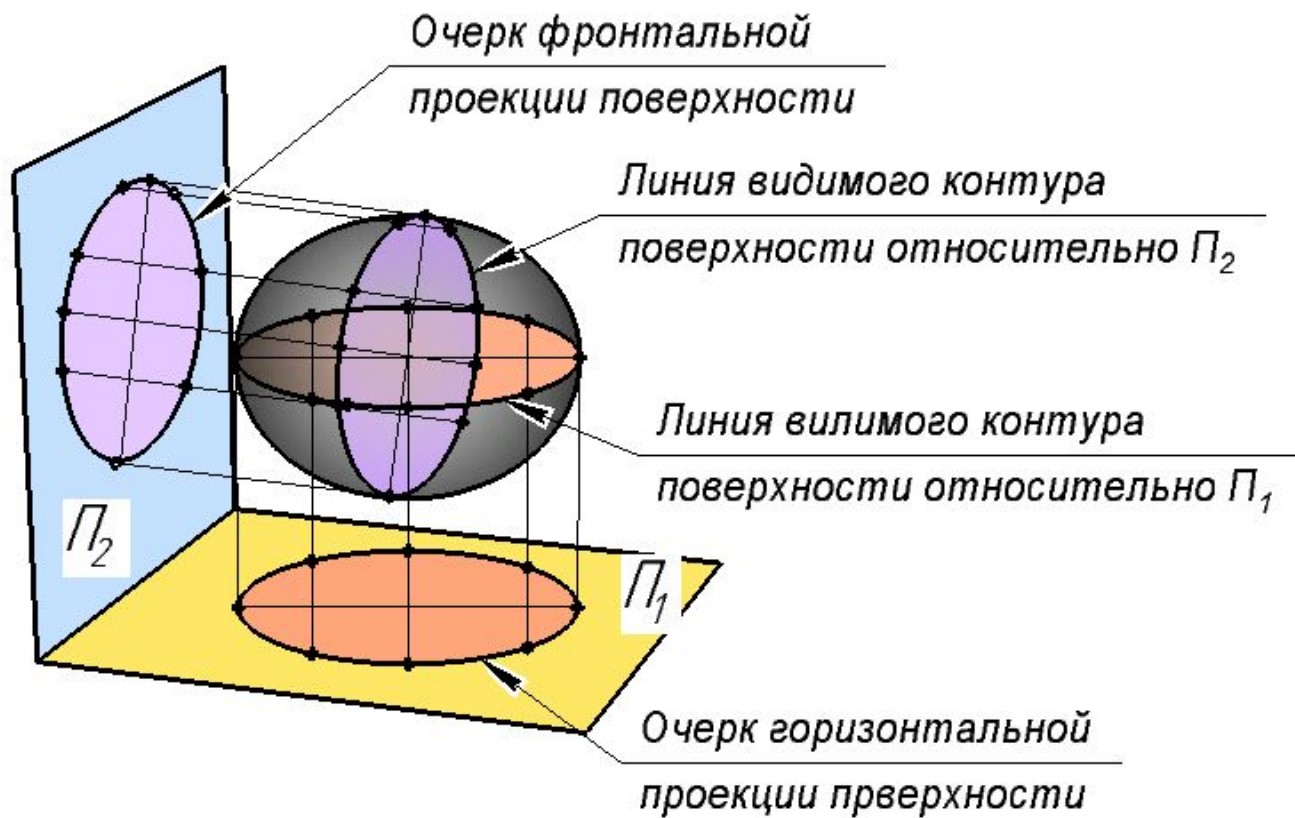




Для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению **очерков** ее проекций

**Очерк проекции поверхности** является проекцией соответствующей **линии видимого контура**

Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части – видимую, обращенную к наблюдателю, и невидимую. **Никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка**



# Классификация поверхностей

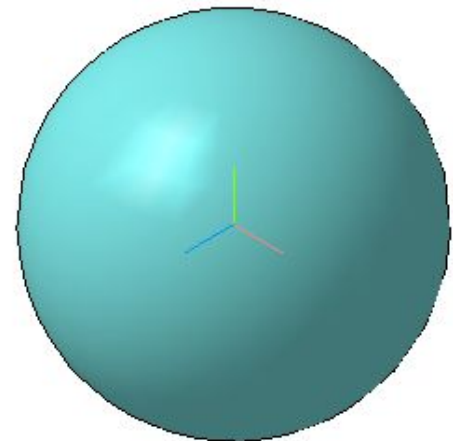
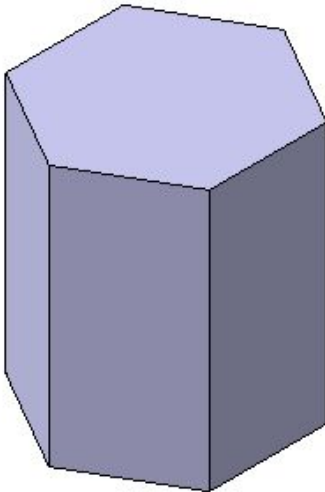
Поверхности можно разделить на несколько классов в зависимости от формы образующей, от формы, числа и расположения направляющих, а также других факторов:

## 1. Поверхности закономерные и не закономерные.

Если образующая поверхности движется по определенному закону, то поверхность называется закономерной или правильной, в противном случае поверхность называется не закономерной.

## 2. Поверхности линейчатые и нелinearчатые.

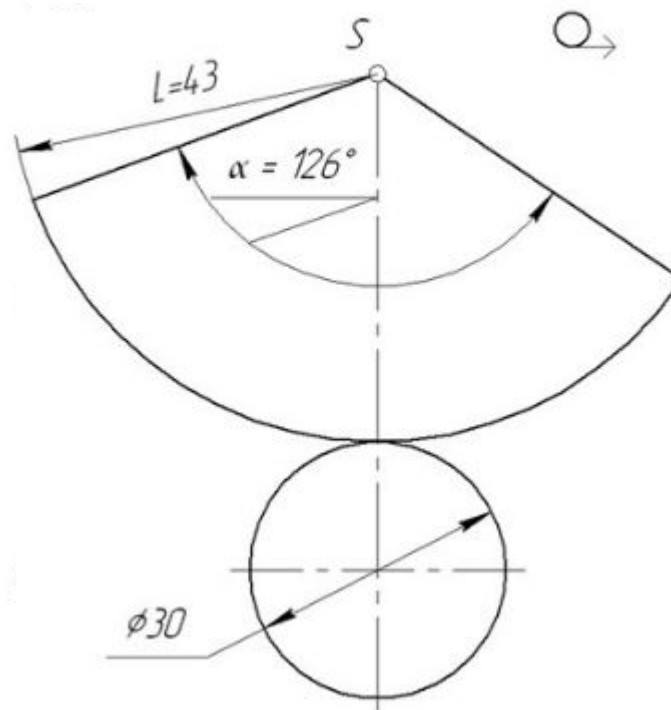
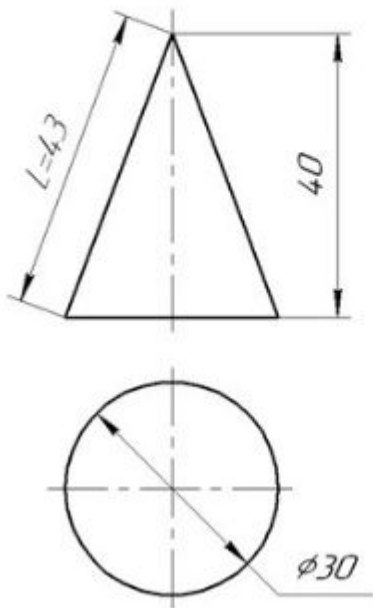
Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии.



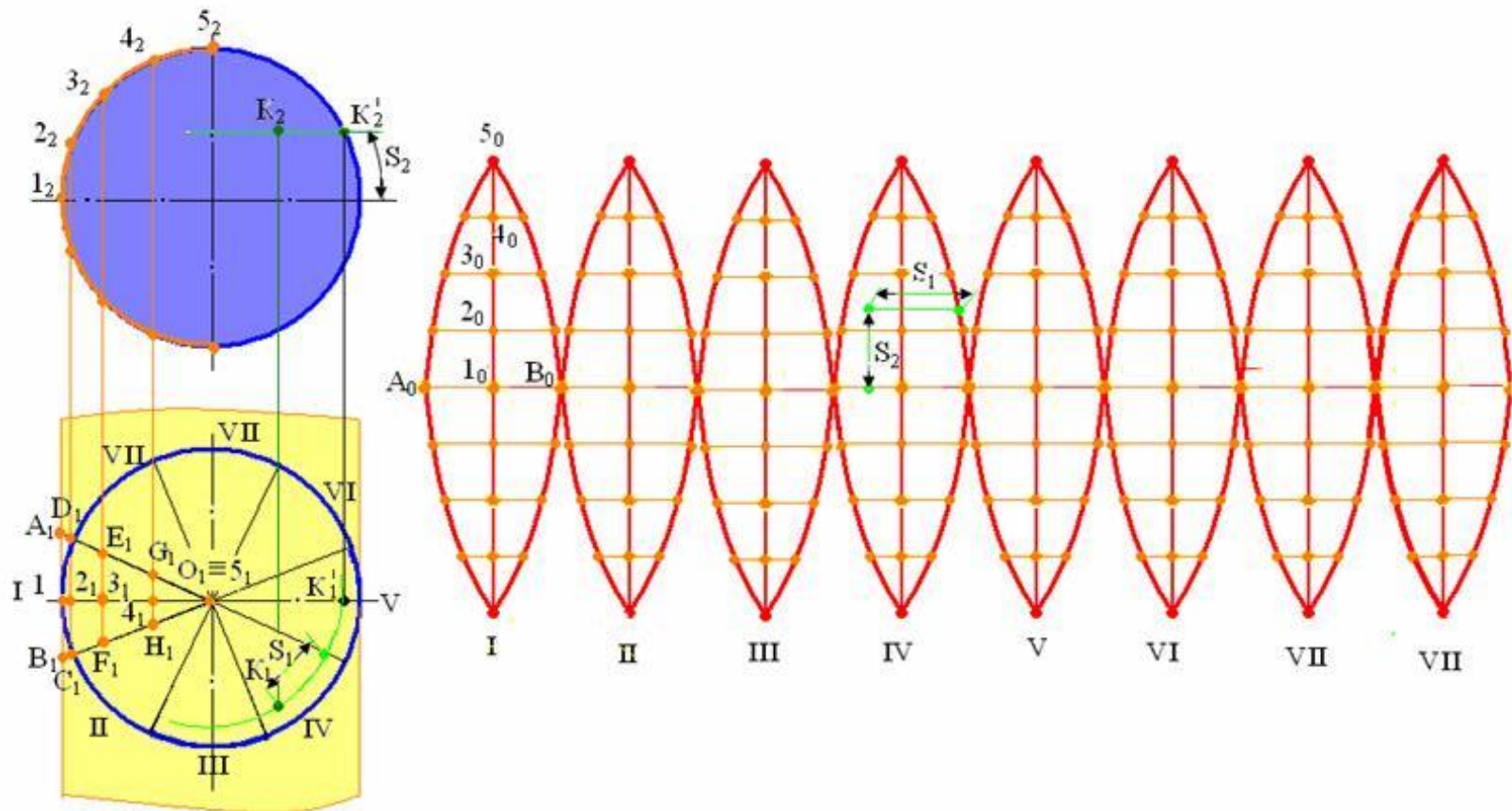
### 3. Поверхности развертывающиеся и неразвертывающиеся.

Развертывающиеся поверхности – поверхности, которые после разреза их по образующей могут быть односторонне совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

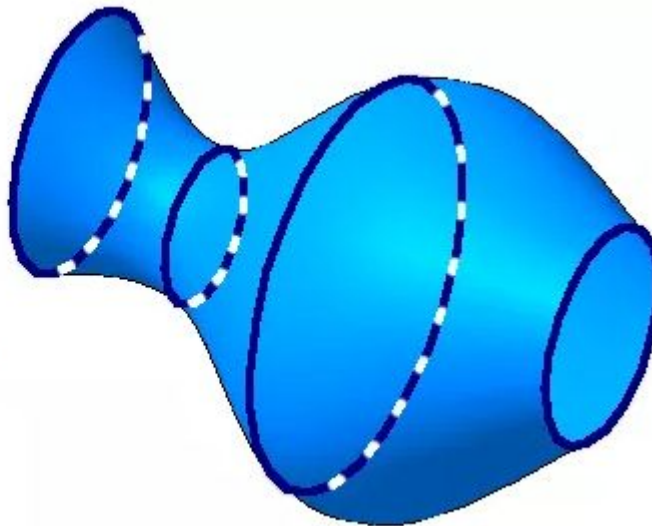
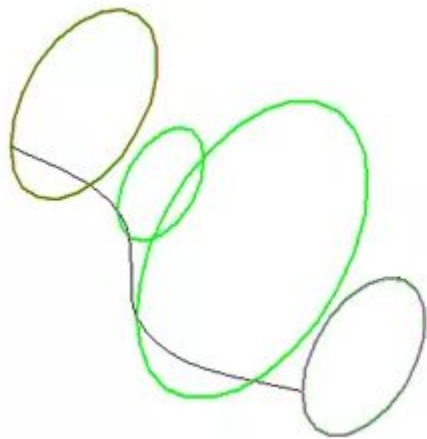
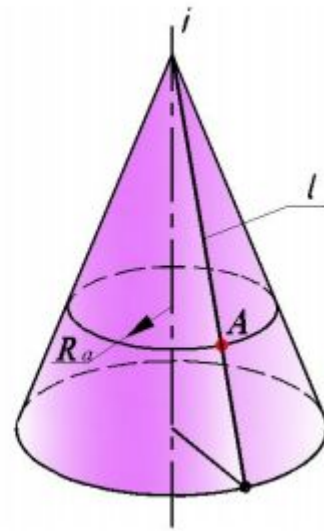
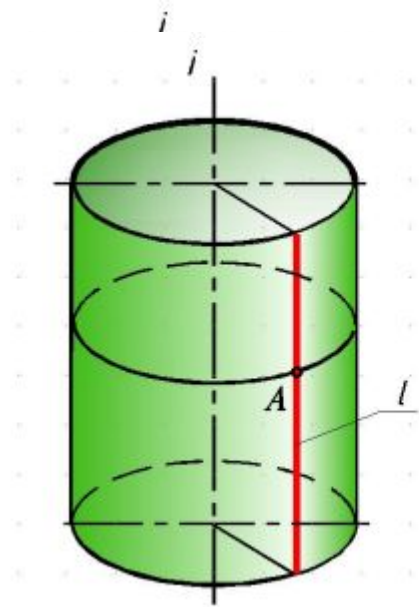
$$\alpha = \frac{360^\circ \times d}{2L} = \frac{360 \times 30}{2 \times 43} = \frac{10800}{86} = 125.6^\circ \approx 126^\circ$$



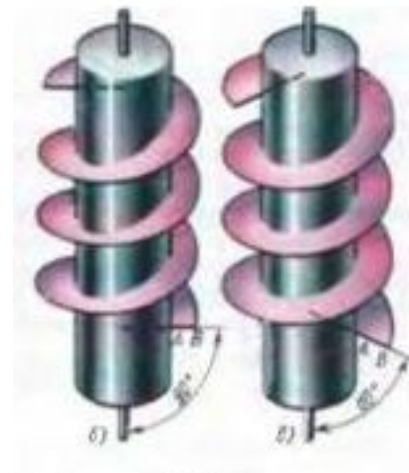
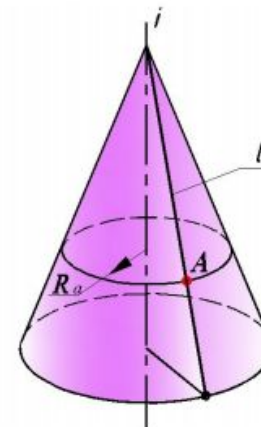
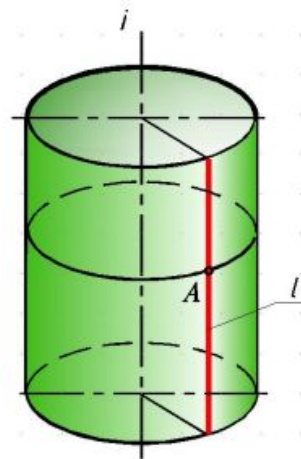
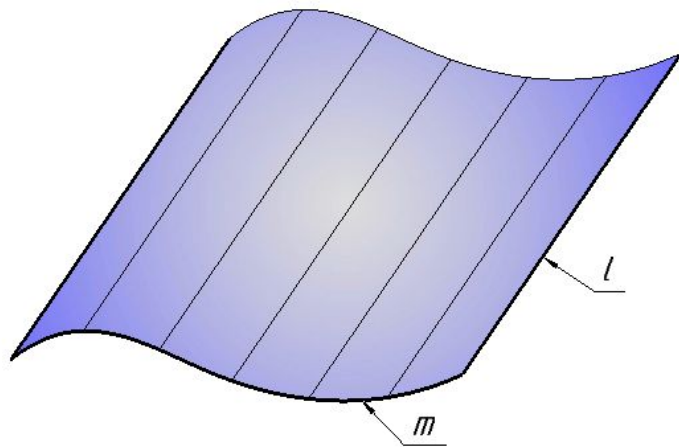
Неразвертывающиеся поверхности – поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.



4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.



**5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.**





Рассмотрим основные виды **линейчатых** поверхностей:

**Гранные** – поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломанной линии.

Их элементами являются грани, ребра и вершины.

Отсеки плоскостей, образующие многогранную поверхность, называются **гранями**, линии пересечения смежных граней - **ребрами**, точки пересечения не менее чем трех граней - **вершинами**.

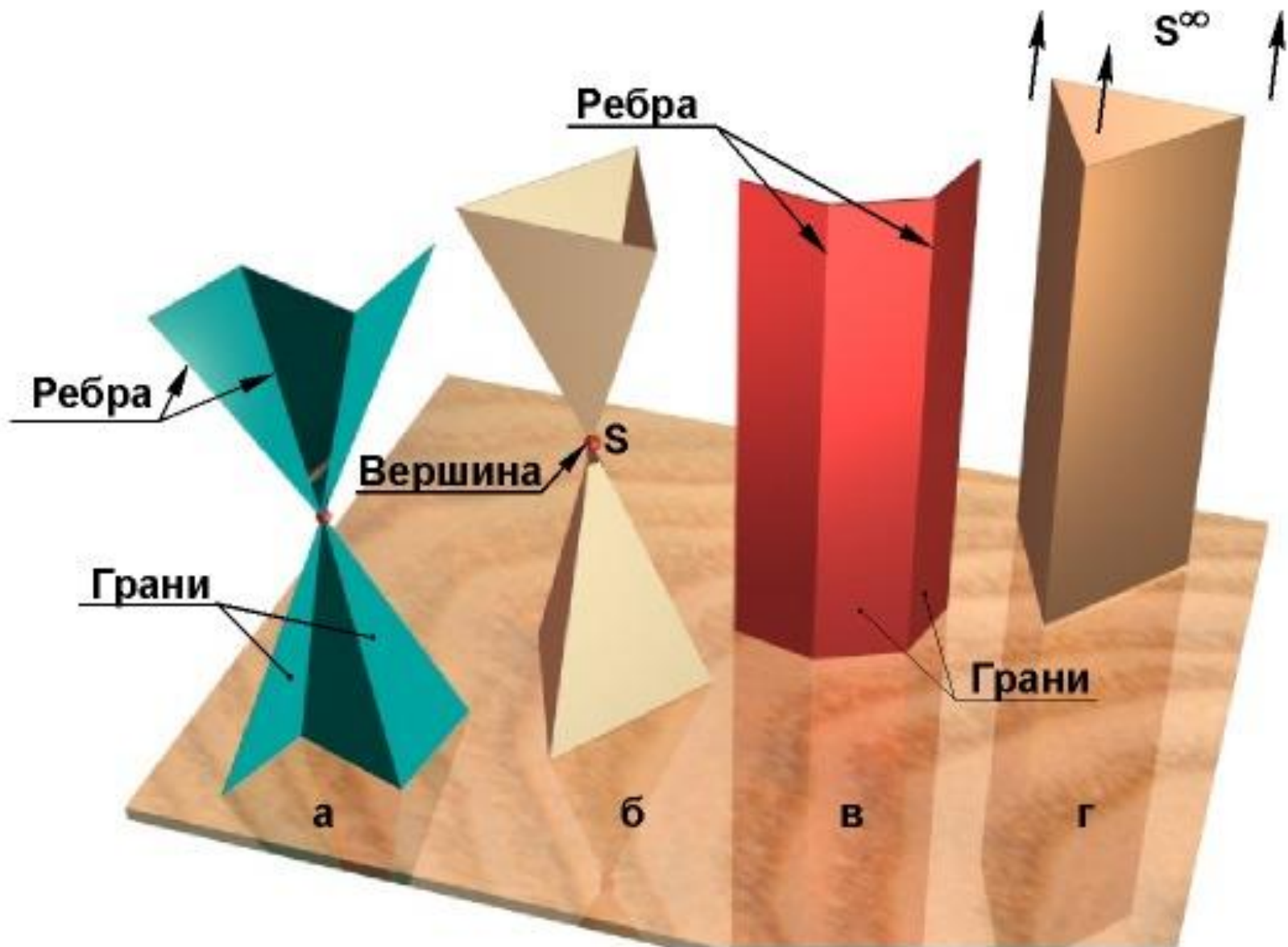
Если каждое ребро многогранной поверхности принадлежит одновременно двум ее граням, ее называют замкнутой (рис. б, г), в противном случае - незамкнутой (рис. а, в).

Многогранная поверхность называется **пирамидальной**, если все ее ребра пересекаются в одной точке - вершине (рис. а).

Многогранная поверхность называется **призматической**, если все ее ребра параллельны между собой (рис. г).

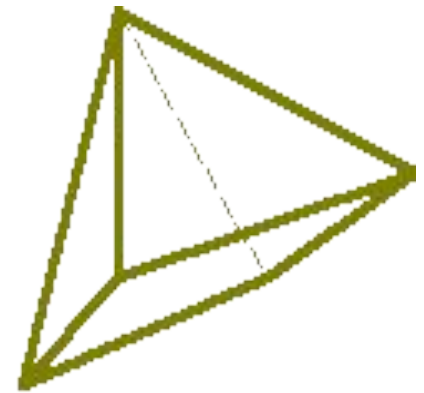
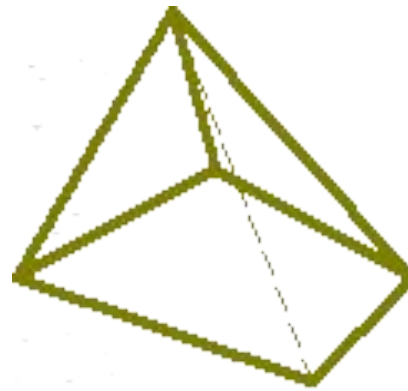
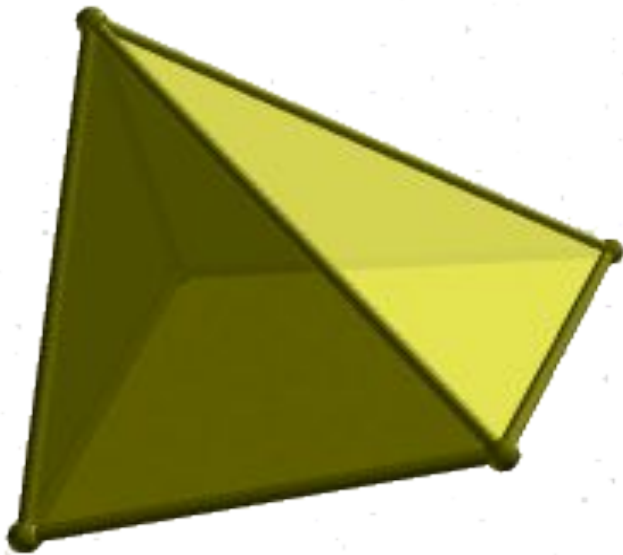
Геометрическое тело, со всех сторон ограниченное плоскими многоугольниками, называется **многогранником**.

Простейшими многогранниками являются ***пирамиды и призмы***

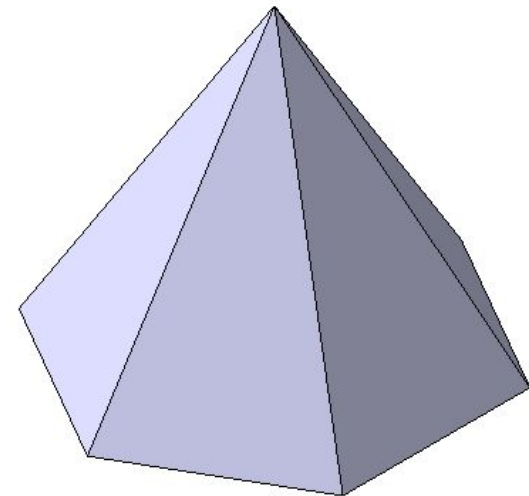
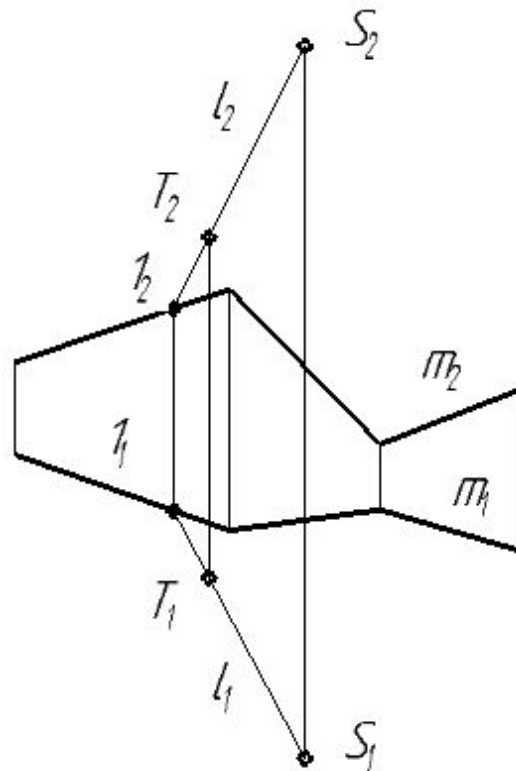
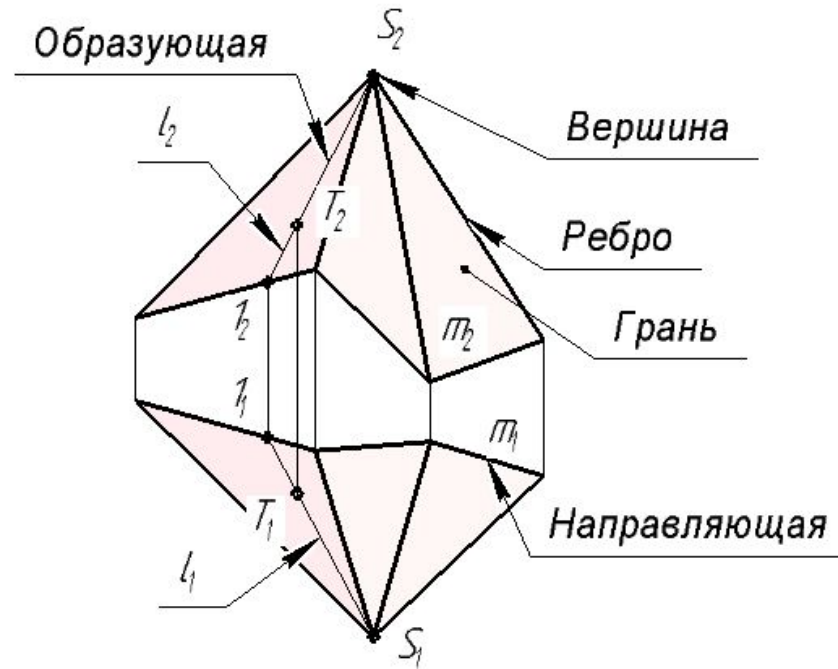
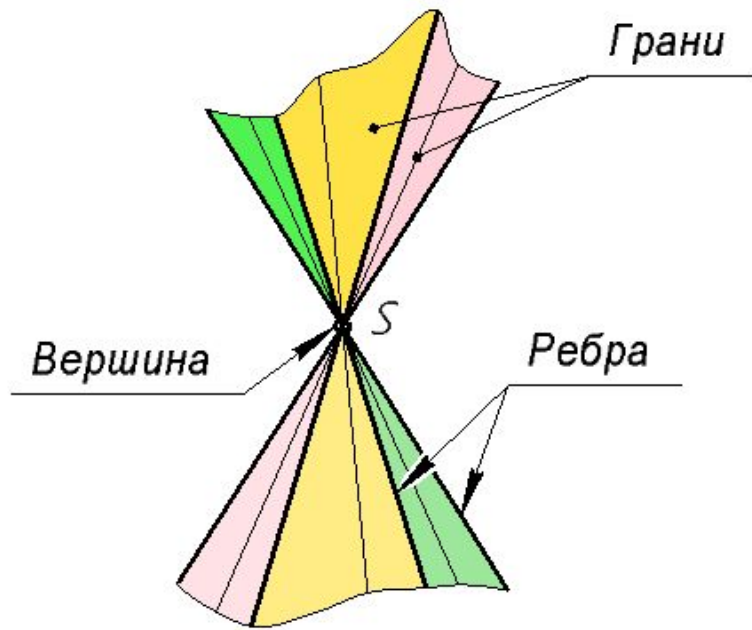




**Пирамида** - это многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные грани - треугольники с общей вершиной. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр многоугольника. Пирамида называется усеченной, если вершина её отсекается плоскостью

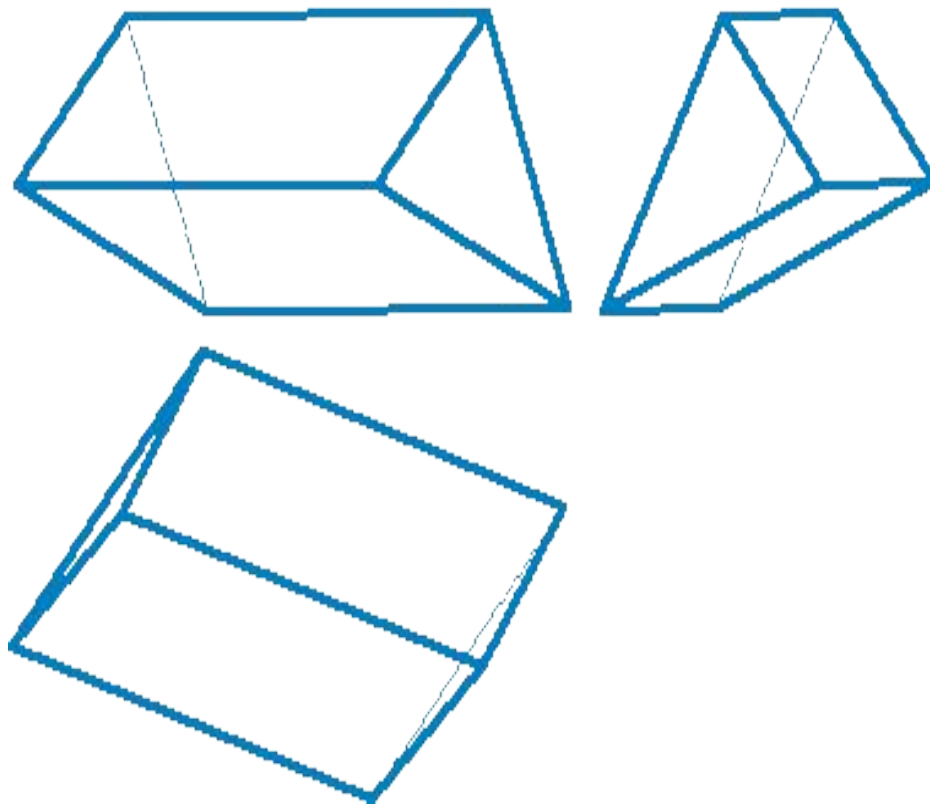
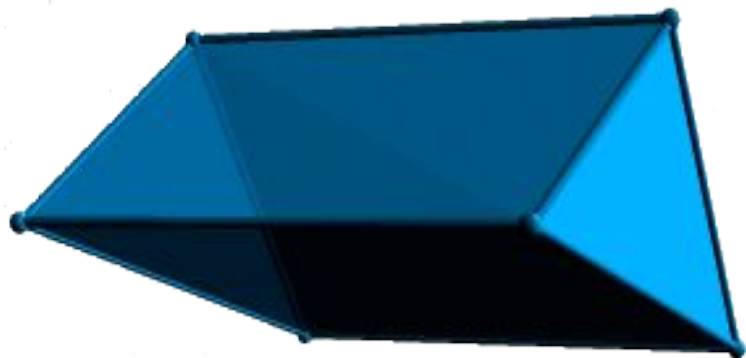


# Пирамидальная поверхность

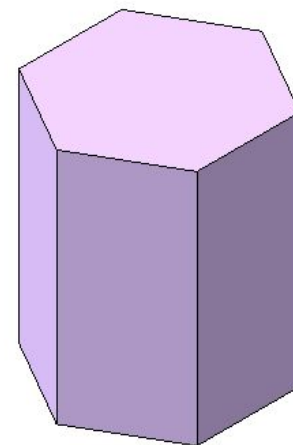
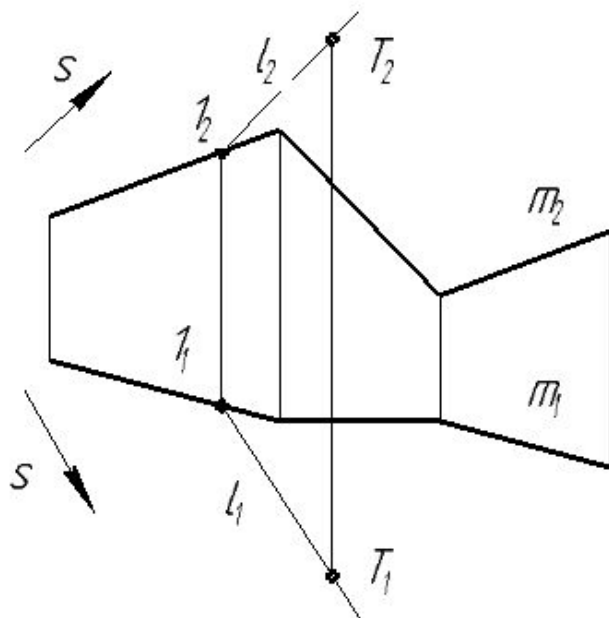
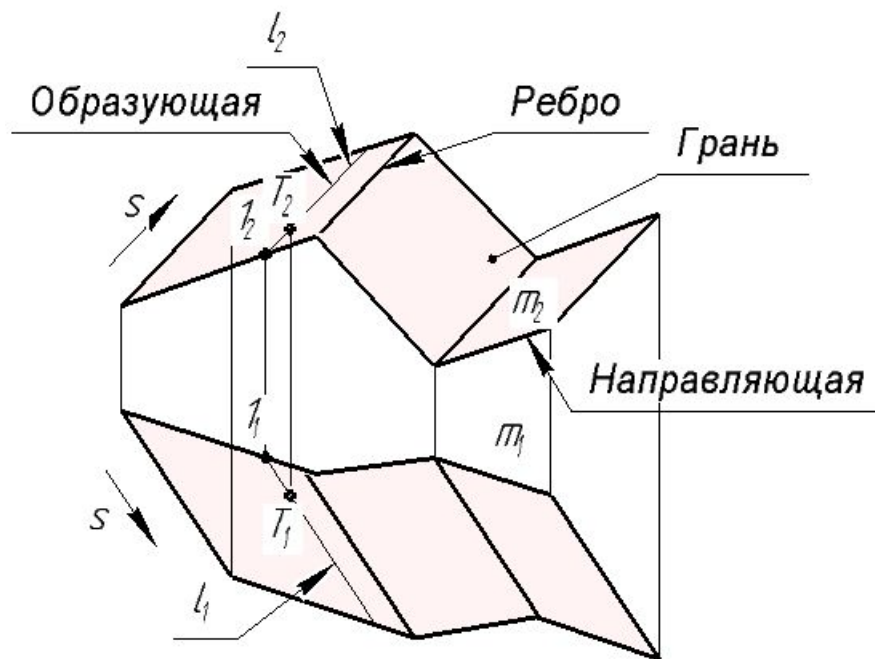
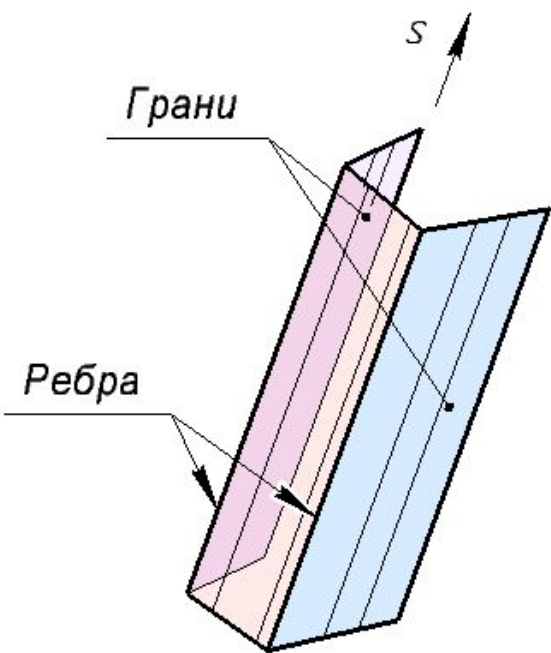


IDS  
Inm  
TCI

**Призма** - многоугольник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани параллелограммы. Призма называется прямой, если её ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом



# Призматическая поверхность

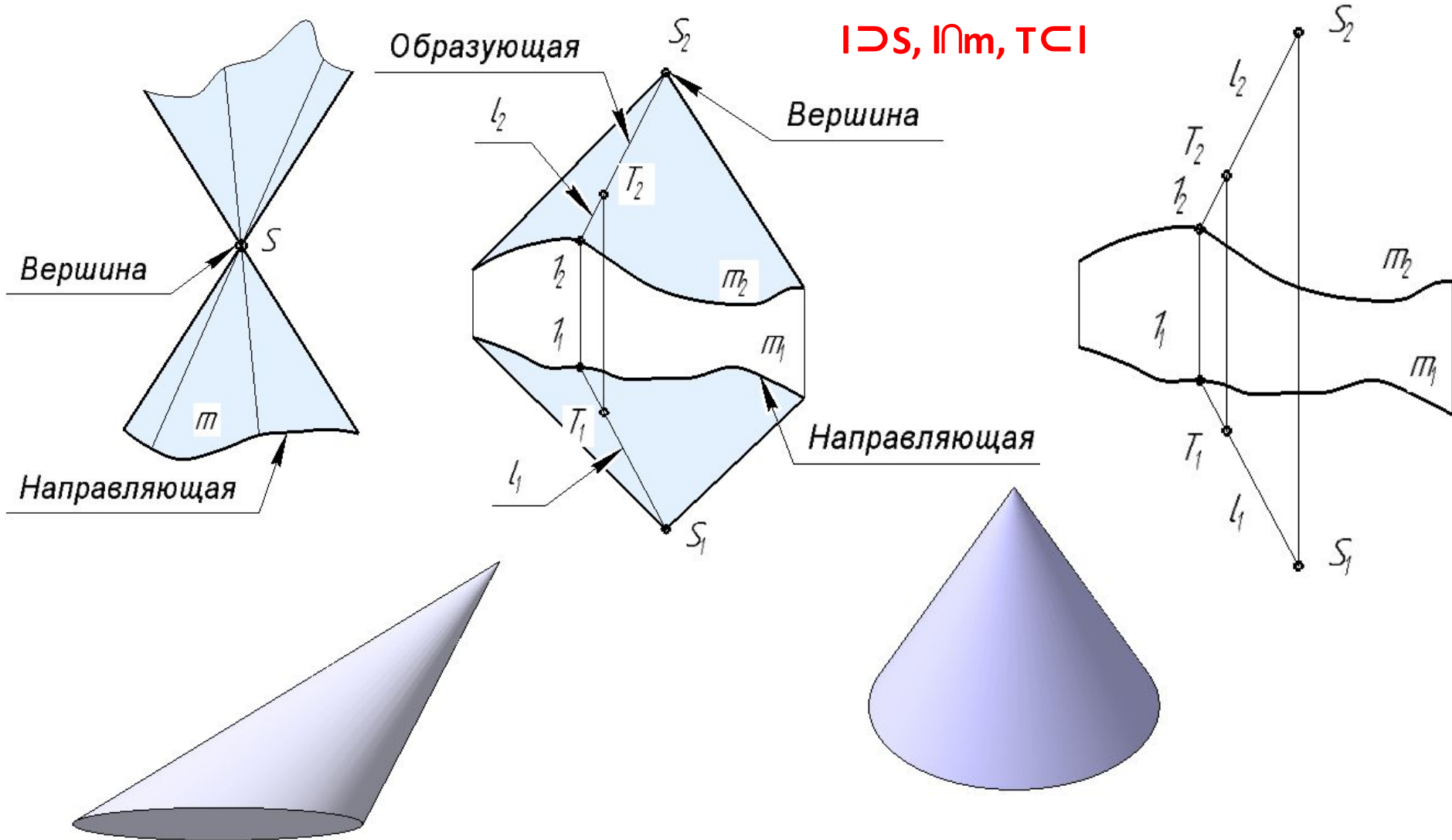


Il s  
Um  
TCl

# Коническая

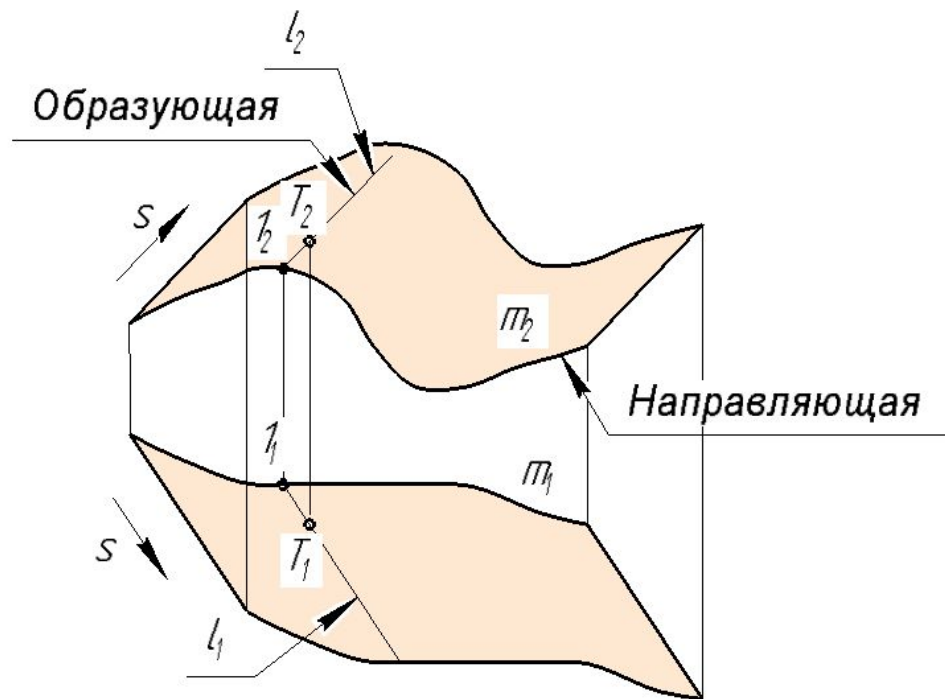
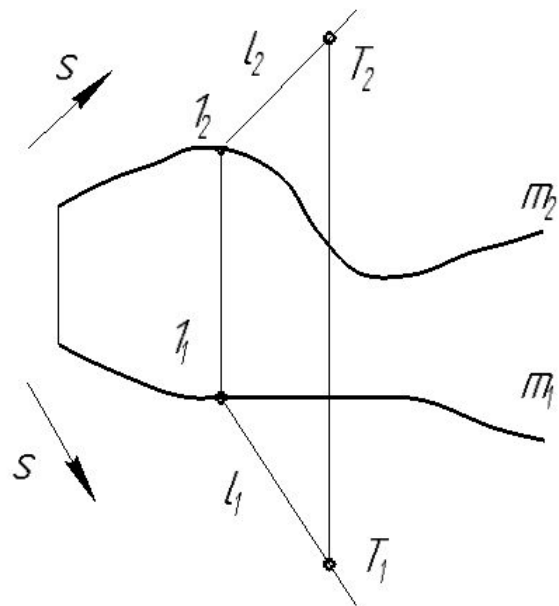
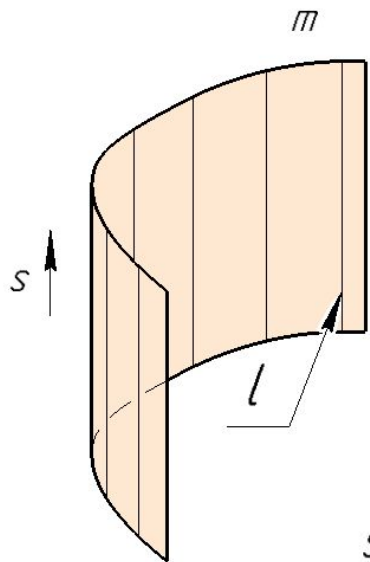
# поверхность

Коническая поверхность — поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по кривой направляющей  $m$ , при этом одна точка —  $S$  образующей  $l$  неподвижна.



# Цилиндрическая поверхность

Цилиндрическая поверхность — поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по кривой направляющей  $m$ , при этом образующая  $l$  во всех положениях параллельна некоторому заданному направлению.

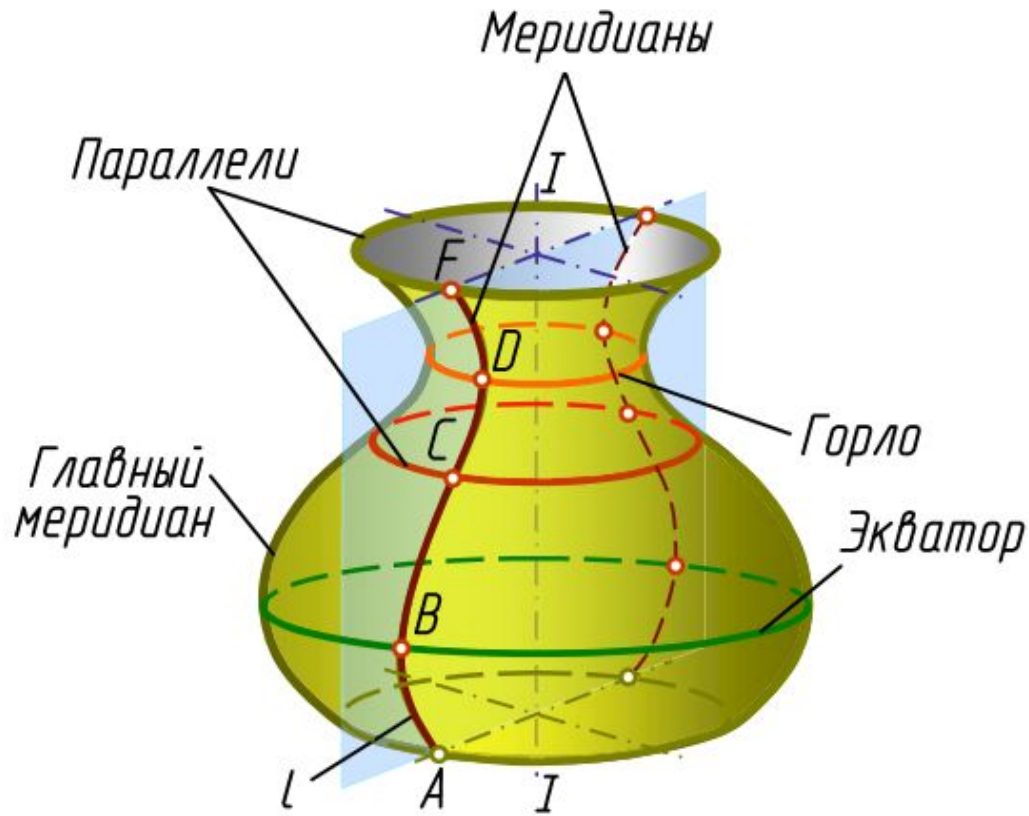


$l \parallel s$   
 $l \perp m$   
 $T \in l$

# Поверхности вращения

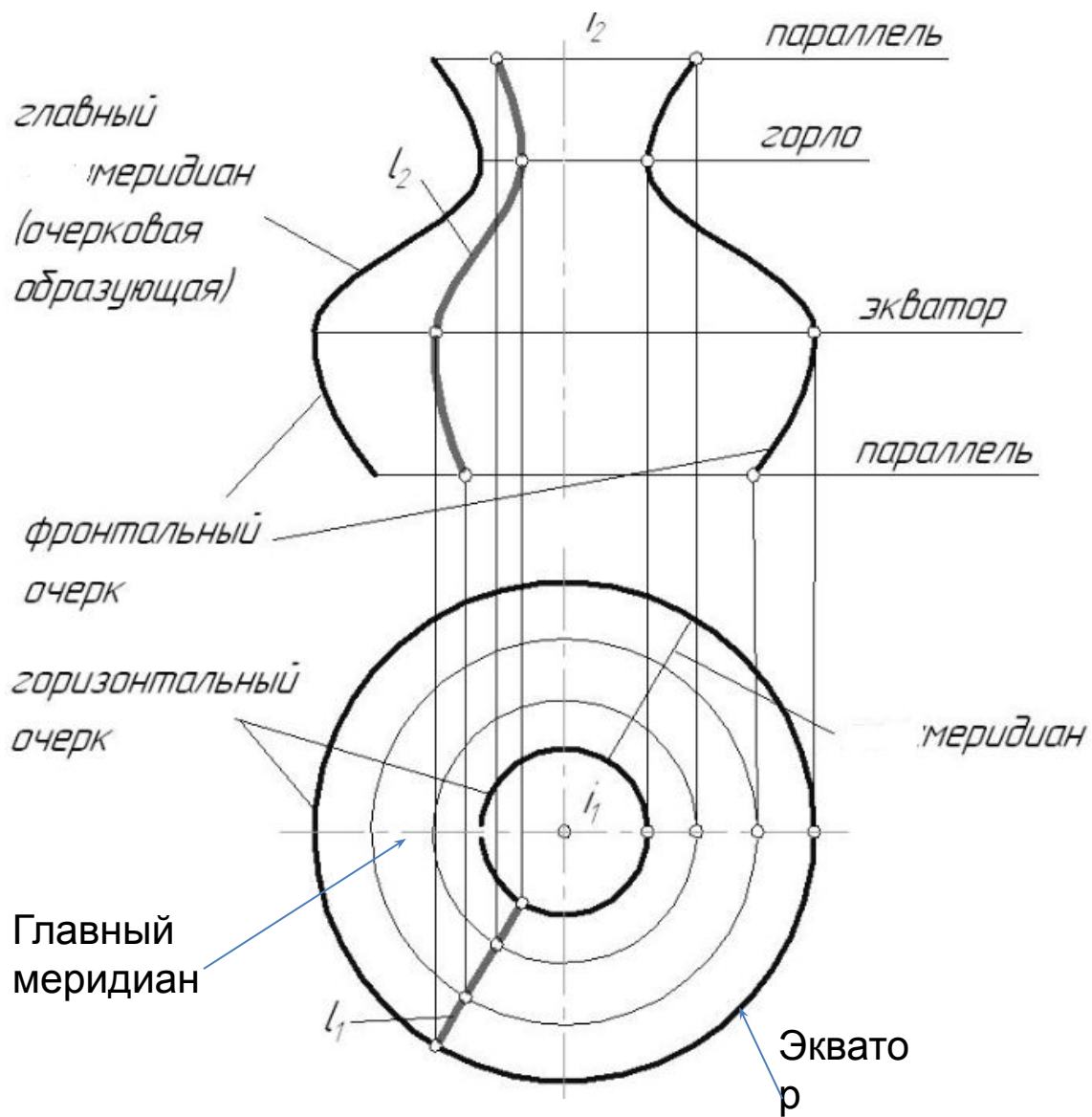
Поверхности вращения – поверхности, образованные вращением линии (образующей) вокруг прямой – оси вращения.

Поверхности вращения могут быть линейчатыми и нелинейчатыми.



При образовании поверхностей вращения любая точка образующей описывает в пространстве окружность. Эти окружности называются параллелями. Плоскости параллелей всегда перпендикулярны к оси вращения. Параллель наименьшего диаметра – *горло*, а наибольшего – *экватор*.





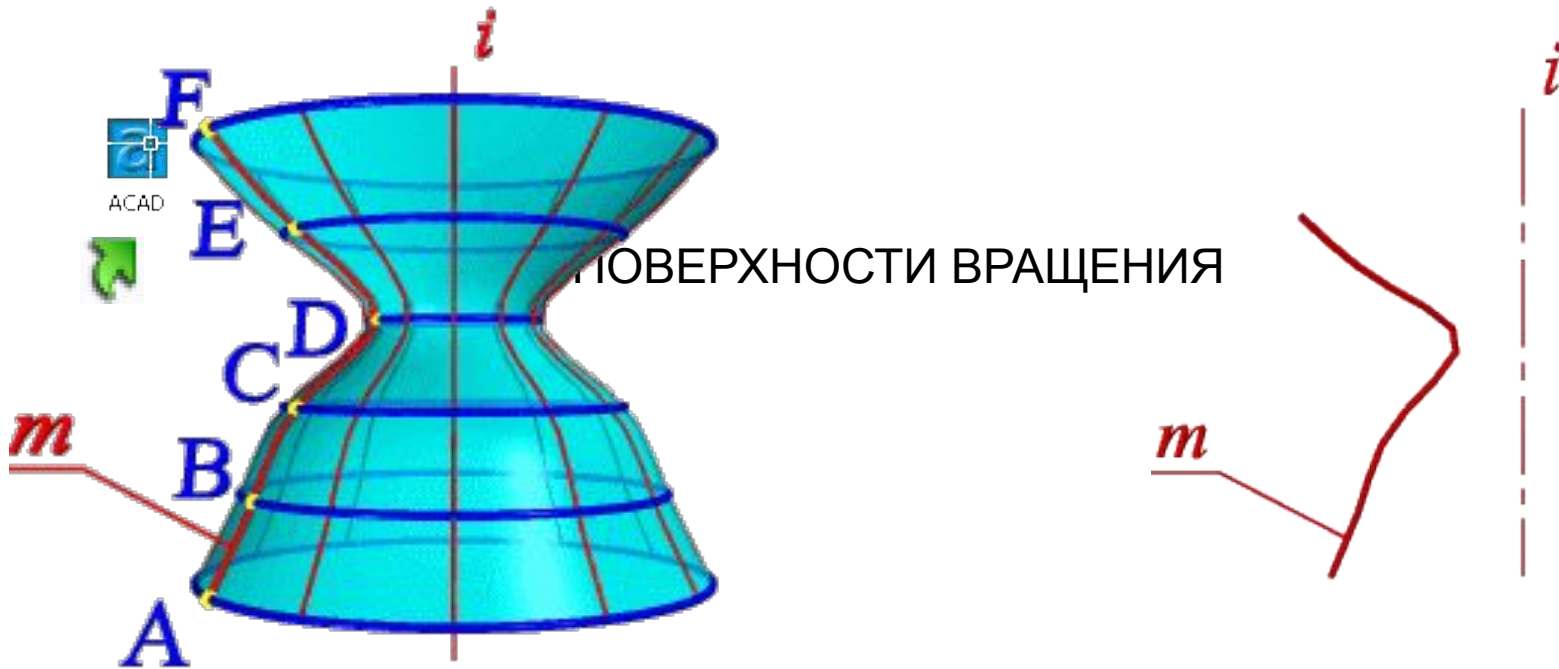
Линия пересечения поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ось вращения – **меридиан**. Если плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций, то такой меридиан называется **главным**.



**Геометрическая часть определителя** состоит из двух линий:  
образующей  $m$  и оси  $i$

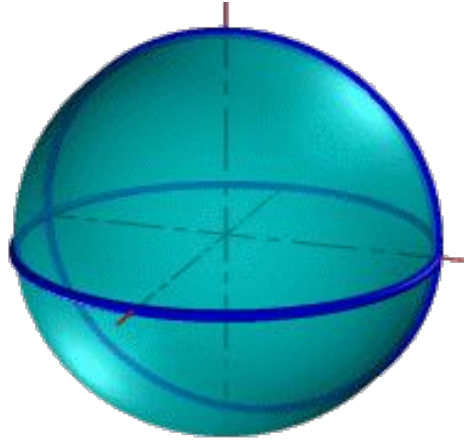
**Алгоритмическая часть** включает две операции:

1. на образующей  $m$  выделяют ряд точек  $A, B, C, \dots, F,$
2. каждую точку вращают вокруг оси  $i$ .



Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:

**Сфера** – образуется вращением окружности вокруг её диаметра



**Тор** – образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности

