

**«ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ
СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ»**

Симплекс-метод основан на последовательном приближении к оптимальности. Процедура симплекс-метода включает 3 существенных элемента:

- указывается способ нахождения исходного (опорного) плана;
- устанавливается признак, дающий возможность проверить, является ли допустимый план оптимальным;
- формулируются правила, по которым неоптимальный план можно улучшить.

В математическую постановку задачи входит построение ограничений и целевой функции.

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом получается не аналитическим путем, т.е. не с помощью формул, позволяющих вычислить оптимальный план через ограничения и целевую функцию, что здесь и невозможно, а решение получается алгоритмически, шаг за шагом – итерационно.

Особенность метода состоит в том, что составление первоначального плана основывается на понятии «базиса» – совокупности линейно независимых векторов.

Таблица 1.1– Исходные данные

Цена единицы продукции	Способ изготовления продукции			Ограничения на запасы ресурсов по месяцам			Итого
	первый	второй	третий				
	60	90	85				
ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции $a_{ij}; i=1,2,3; j=1,2,3$			1 месяц	2 месяц	3 месяц	
сырье, (усл. ед.)	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800	
труд (чел.-час)	4,64	1,99	2,65	1420	1500	1420	
оборудование (станко -час)	2,30	1,38	1,73	900	950	900	
			Заявки по месяцам	565	575	585	1725

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с ее преобразования к специальному каноническому виду. Для этого вводятся дополнительные переменные S_i , коэффициенты в целевой функции при S_i принимаются равными нулю:

$$1,86 \cdot x_1 + 3,72 \cdot x_2 + 2,79 \cdot x_3 + S_1 = 1860;$$

$$4,64 \cdot x_1 + 1,99 \cdot x_2 + 2,65 \cdot x_3 + S_2 = 1420;$$

$$2,30 \cdot x_1 + 1,38 \cdot x_2 + 1,73 \cdot x_3 + S_3 = 900;$$

Преобразуем эти соотношения к виду:

$$S_1 = 1860 - (1,86 \cdot x_1 + 3,72 \cdot x_2 + 2,79 \cdot x_3);$$

$$S_2 = 1420 - (4,64 \cdot x_1 + 1,99 \cdot x_2 + 2,65 \cdot x_3);$$

$$S_3 = 900 - (2,30 \cdot x_1 + 1,38 \cdot x_2 + 1,73 \cdot x_3).$$

В рассматриваемых далее симплекс-таблицах, соответствующих определенным опорным планам, выделены жирным шрифтом: максимальное значение показателя индексной строки $d_k = \max\{d_j\}$, минимальное значение отношения $B_r/a_{rk} = \min\{B_r/a_{ij}\}$ и разрешающий элемент a_{rk} .

Таблица 1.2 – Первый опорный план

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	1,86	3,72	2,79	1,00	0,00	0,00	1860	500,00
S_2	0	4,64	1,99	2,65	0,00	1,00	0,00	1420	713,57
S_3	0	2,30	1,38	1,73	0,00	0,00	1,00	900	652,17
d_j		60	90	85	0	0	0	0	

Максимальное значение показателя индексной строки равно 90 и соответствует переменной x_2 , которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i2}=500$ и соответствует переменной S_1 , которая будет выводиться из базиса; $a_{1,2}=3,72$. Значение целевой функции для этого плана равно 0.

Переменную x_2 вводят в базис на место S_1 . Результаты перерасчета значений опорного плана приведены в таблице 1.3

Коэффициенты 1-ой строки второго опорного плана рассчитываются как результат деления коэффициентов 1-ой строки предыдущего плана на значение РЭ ($a_{1,2}=3,72$):

$$a_{1,1}=1,86/3,72=0,5; a_{1,2}=3,72/3,72=1;$$

$$a_{1,3}=2,79/3,72=0,75; a_{1,4}=1/3,72=0,27;$$

$$a_{1,5}=0/3,72=0; a_{1,6}=0/3,72=0;$$

$B_1=1860/3,72=500$; в остальных строках 2-го столбца второго плана записываем нули: $a_{2,2}=a_{3,2}=0$. Для 2-ой и 3-ей строк второго плана коэффициенты рассчитываются по правилу прямоугольника:

$$a_{2,1}=4,64-1,86 \cdot 1,99/3,72=3,65; a_{2,3}=2,65-2,79 \cdot 1,99/3,72=1,16;$$

$$a_{2,4}=0-1 \cdot 1,99/3,72=-0,53; a_{2,5}=1-0 \cdot 1,99/3,72=1;$$

$$a_{2,6}=0-0 \cdot 1,99/3,72=0; B_2=1420-1860 \cdot 1,99/3,72=425;$$

$$a_{3,1}=2,30-1,86 \cdot 1,38/3,72=1,61; a_{3,3}=1,73-2,79 \cdot 1,38/3,72=0,70;$$

$$a_{3,4}=0-1 \cdot 1,38/3,72=-0,37; a_{3,5}=0-0 \cdot 1,38/3,72=0;$$

$$a_{3,6}=1-0 \cdot 1,38/3,72=1; B_3=900-1860 \cdot 1,38/3,72=210.$$

Таблица 1.3 – Второй опорный план



	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	0,50	1,00	0,75	0,27	0,00	0,00	500,00	666,67
S_2	0	3,65	0,00	1,16	-0,53	1,00	0,00	425,00	367,17
S_3	0	1,61	0,00	0,70	-0,37	0,00	1,00	210,00	302,16
d_i		15	0	17,5	-24,19	0	0	45000,00	



Максимальное значение показателя индексной строки равно 17,5 и соответствует переменной x_3 , которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i3}=302,16$ и соответствует переменной S_3 , которая будет выводиться из базиса; $a_{3,3}=0,70$. В результате преобразования симплекс-таблицы для второго плана в соответствии с алгоритмом получим третий опорный план (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – Третий опорный план – оптимальный



	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	-1,24	1,00	0,00	0,67	0,00	-1,08	273,38	
S_2	0	0,96	0,00	0,00	0,08	1,00	-1,67	75,25	
x_3	85	2,32	0,00	1,00	-0,53	0,00	1,44	302,16	
d_j		-25,54	0	0	-14,85	0	-25,18	50287,77	



Для всех переменных третьего плана значение показателя оптимальности $d_j \leq 0$ – следовательно, получен оптимальный план.

Значение целевой функции (доход) в количестве 50288 у.д.е. обеспечивается при изготовлении 273,38 ед. продукции 2-ым способом и 302,16 ед. продукции 3-им способом.

Решение задачи в MS EXCEL

1. Заполняем исходными данными таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
2	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
3	S_1	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860
4	S_2	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420
5	S_3	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900
6	d_j		60	90	85	0	0	0	0

2. d_j – индексная строка. Находим наибольшее значение. $d_j = 90$ при переменной x_2 (столбец D).
Выделяем данный столбец

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
2	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
3	S_1	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860
4	S_2	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420
5	S_3	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900
6	d_j		60	90	85	0	0	0	0

3. Создаем столбец J по следующей формуле: B_i/a_{ik} , где a_{ik} - значения столбца D

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
2	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
3	S_1	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860	500
4	S_2	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420	713,57
5	S_3	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900	652,17
6	d_j		60	90	85	0	0	0	0	

J
B_i/a_{ik}
=I3/D3
=I4/D4
=I5/D5

4. Выбираем строку с наименьшим значением столбца **J** (Значение 500. Строка 3). Выделяем ее.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
2	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
3	S_1	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860	500
4	S_2	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420	713,57
5	S_3	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900	652,17
6	d_j		60	90	85	0	0	0	0	

5. Создаем новую таблицу и начинаем пересчитывать базис

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
9		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
10	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
11	x_2	90								
12	S_2	0								
13	S_3	0								
14	d_j									

S_1 (ячейка **A11**) заменяется на x_2 (из ячейки **D2**). В **B11** записываем значение ячейки **D1**

6. В следующей таблице указаны формулы для пересчета базиса. Далее рассмотрим каждую подробнее

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
10	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
11	x_2	90	=C3/\$D\$3	=D3/\$D\$3	=E3/\$D\$3	=F3/\$D\$3	=G3/\$D\$3	=H3/\$D\$3	=I3/\$D\$3
12	S_2	0	=C4-C\$3*\$D4/\$D\$3	0	=E4-E\$3*\$D4/\$D\$3	=F4-F\$3*\$D4/\$D\$3	=G4-G\$3*\$D4/\$D\$3	=H4-H\$3*\$D4/\$D\$3	=I4-I\$3*\$D4/\$D\$3
13	S_3	0	=C5-C\$3*\$D5/\$D\$3	0	=E5-E\$3*\$D5/\$D\$3	=F5-F\$3*\$D5/\$D\$3	=G5-G\$3*\$D5/\$D\$3	=H5-H\$3*\$D5/\$D\$3	=I5-I\$3*\$D5/\$D\$3
14	d_j		=C6-C\$3*\$D6/\$D\$3	0	=E6-E\$3*\$D6/\$D\$3	=F6-F\$3*\$D6/\$D\$3	=G6-G\$3*\$D6/\$D\$3	=H6-H\$3*\$D6/\$D\$3	=I6-I\$3*\$D6/\$D\$3

D
90
x2
=D3/\$D\$3
0
0
0

Столбец **D** (ранее выделенный)

Ячейка **D3** находилась на пересечении выделенных строки и столбца, таким образом, делим ее саму на себя

Строка **11** (дублирует ранее выделенную строку **3**)

Каждое предыдущее значение данной строки делим на значение ячейки **D3**

11	x2	90	=C3/\$D\$3	=D3/\$D\$3	=E3/\$D\$3	=F3/\$D\$3	=G3/\$D\$3	=H3/\$D\$3	=I3/\$D\$3
----	----	----	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		c _j	60	90	85	0	0	0	B _i
10	базис	c _i	x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃	
11	x ₂	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500
12	S ₂	0		0					
13	S ₃	0		0					
14	d _j			0					

Все остальные ячейки рассчитываются методом квадрата

Например, для ячейки **C12** (дублирует ячейку **C4**): =

$$C4 - C\$3 * \$D4 / \$D\$3$$

Перемножаем значения из выделенных ячеек,

стоящих на пересечении с ячейкой **C4**

(по горизонтали от **C4** – **D4**, по вертикали – **C3**)

и делим полученное значение на ячейку **D3**.

Все это необходимо вычесть из ячейки **D4**.

Таким образом, в данной формуле фиксируются параметры выделенных строки и столбца (**3** и **D**).

И формула копируется во все оставшиеся пустые ячейки.

КОРЕНЬ					
	A	B	C	D	E
1		c _j	60	90	85
2	базис	c _i	x ₁	x ₂	x ₃
3	S ₁	0	1,86	3,72	2,79
4	S ₂	0	4,64	1,99	2,65
5	S ₃	0	2,3	1,38	1,73
6	d _j		60	90	85

7. Получаем пересчитанную таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
10	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
11	x_2	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500
12	S_2	0	3,645	0	1,16	-0,53	1	0	425
13	S_3	0	1,61	0	0,70	-0,37	0	1	210
14	d_j		15	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00

8. Находим наибольшее значение d_j . 17,5 при переменной x_3 (столбец E). Выделяем данный столбец. Также рассчитываем столбец J

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
9		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
10	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
11	x_2	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500	666,67
12	S_2	0	3,645	0	1,16	-0,53	1	0	425	367,17
13	S_3	0	1,61	0	0,70	-0,37	0	1	210	302,16
14	d_j		15	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00	

J
B_i/a_{ik}
=I11/E11
=I12/E12
=I13/E13

9. Выбираем строку с наименьшим значением столбца J (Значение 302,16. Строка 13). Выделяем ее.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
9	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
10	x_2	90	0,5	3,72	0,75	0,2688	0	0	500	666,67
11	S_2	0	3,65	0	1,16	-0,53	1,00	0,00	425,00	367,17
12	S_3	0	1,61	0	0,70	-0,37	0,00	1,00	210,00	302,16
13	d_j		15,00	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00	

10. Создаем новую таблицу и начинаем пересчитывать базис

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
15		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	B_i/a_{ik}
16	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
17	x_2	90								
18	S_2	0								
19	x_3	85								
20	d_j									

S_3 (ячейка **A19**) заменяется на x_3 (из ячейки **E10**). В **B19** записываем значение ячейки **E9**

11. Далее формулы для пересчета базиса

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
15		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
16	базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
17	x_2	90	=C10-C\$12*\$E10/\$E\$12	=D10-D\$12*\$E10/\$E\$12	0	=F10-F\$12*\$E10/\$E\$12	=G10-G\$12*\$E10/\$E\$12	=H10-H\$12*\$E10/\$E\$12	=I10-I\$12*\$E10/\$E\$12
18	S_2	0	=C11-C\$12*\$E11/\$E\$12	=D11-D\$12*\$E11/\$E\$12	0	=F11-F\$12*\$E11/\$E\$12	=G11-G\$12*\$E11/\$E\$12	=H11-H\$12*\$E11/\$E\$12	=I11-I\$12*\$E11/\$E\$12
19	x_3	85	=C12/\$E\$12	=D12/\$E\$12	=E12/\$E\$12	=F12/\$E\$12	=G12/\$E\$12	=H12/\$E\$12	=I12/\$E\$12
20	d_j		=C13-C\$12*\$E13/\$E\$12	=D13-D\$12*\$E13/\$E\$12	0	=F13-F\$12*\$E13/\$E\$12	=G13-G\$12*\$E13/\$E\$12	=H13-H\$12*\$E13/\$E\$12	=I13-I\$12*\$E13/\$E\$12

E
85
x_3
0
0
=E12/\$E\$12
0

Столбец **E** (ранее выделенный)

Ячейка **E12** находилась на пересечении выделенных строки и столбца, таким образом, делим ее саму на себя

Строка **19** (дублирует ранее выделенную строку **12**)

Каждое предыдущее значение данной строки делим на значение ячейки **E12**

19	x_3	85	=C12/\$E\$12	=D12/\$E\$12	=E12/\$E\$12	=F12/\$E\$12	=G12/\$E\$12	=H12/\$E\$12	=I12/\$E\$12
----	-------	----	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

Формула для расчета C17 (дублирует C10) и всех последующих ячеек:

$$C10 - C\$12 * \$E10 / \$E\$12$$

В данной формуле фиксируются параметры выделенных строки и столбца (12 и E).

12. После пересчета получаем таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
15		c_j	60	90	85	0	0	0	B_i
16	базис	c_i	x₁	x₂	x₃	S₁	S₂	S₃	
17	x₂	90	-1,237	3,72	0	0,6691	0	-1,079	273,38129
18	S₂	0	0,9636	0	0,00	0,0829	1	-1,665	75,251799
19	x₃	85	2,32	0,00	1,00	-0,53	0,00	1,44	302,16
20	d_j		-25,54	0	0,00	-14,85	0	-25,18	-50287,77

Заметим, что все значения d_j стали отрицательными, следовательно, план оптимален и не нуждается в дальнейшем перерасчете.

Значение целевой функции B_i равно 50287,77 (берем модуль полученного значения).

В ячейках **I17-I19** показано, сколько усл. ед. продукции необходимо изготовить для получения максимальной прибыли.

В базисе (столбец **A**) есть x_2 и x_3 . Таким образом, необходимо изготовить 273,38 усл. ед. 2м способом и 302,16 усл. ед. 3м.

Если необходимо получить результат в целых значениях (количество единиц продукции), тогда необходимо изготовить 273 усл. ед. 2м способом и 302 усл. ед. 3м. Прибыль будет равна 50240.