Начертательная геометрия

К.т.н., доцент Стрек Ярослав Михайлович

Раздел 1 Предмет и метод начертательной геометрии

- Тема 1.1 Условные обозначения
- Тема 1.2 Методы проецирования
- Тема 1.2.1 Центральное проецирование
- Тема 1.2.2 Параллельное проецирование
- Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

Тема 1.1 Условные обозначения

- Для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между геометрическими фигурами, а также для краткости записей геометрических предложений, алгоритмов решения задач и доказательства теорем используются **символьные обозначения**.
- **Символьные обозначения**, все их многообразие, может быть подразделено на две группы:
  - Первая группа - обозначения геометрических фигур и отношения между ними;
  - Вторая группа - обозначения логических операций, составляющая синтаксическую основу геометрического языка.

Символьные обозначения - Первая группа Символы, обозначающие геометрические фигуры и отношения между ними

- Обозначения геометрических фигур:
Ф - геометрическая фигура;
A, B, C, D, …, L, M, N, … - точки расположенные в пространстве;
1, 2, 3, 4, …, 12, 13, 14, … - точки расположенные в пространстве;
a, b, c, d, …, l, m, n, … - линии, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций;
h, υ(f), ω - линии уровня (горизонталь, фронталь, профильная прямая соответственно);
(AB) - прямая проходящая через точки A и B;
[AB) - луч с началом в точке A;
[AB] - отрезок прямой, ограниченный точками A и B;
α, β, γ, δ, …, ζ, η, θ - поверхность;
∠ABC - угол с вершиной в точке B;
∠α, ∠β, ∠γ - угол α, угол β, угол γ соответственно;
|AB| - расстояние от точки A до точки B (длина отрезка AB);
|Aa| - расстояние от точки A до линии a;
|Aα| - расстояние от точки A до поверхности α;
|ab| - расстояние между прямыми a и b;
|αβ| - расстояние между поверхностями α и β;

Символьные обозначения - Первая группа Символы, обозначающие геометрические фигуры и отношения между ними

H, V, W - координатные плоскости проекций (горизонтальная, фронтальная, профильная соответственно);

$П_1$, $П_2$, $П_3$ - координатные плоскости проекций (горизонтальная, фронтальная, профильная соответственно);

x, y, z - координатные оси проекций (ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат);

k_o - постоянная прямая эпюра Монжа;

O - точка пересечения осей проекций;

`, ", `" - верхние индексы для проекций точек, прямых, углов, фигур, поверхностей на плоскости проекций (горизонтальную, фронтальную, профильную соответственно);

1, 2, 3 - верхние индексы для проекций точек, прямых, углов, фигур, поверхностей на плоскости проекций (горизонтальную, фронтальную, профильную соответственно);

α_H, α_V, α_W - след поверхности оставляемый на горизонтальной, на фронтальной, на профильной плоскости проекций соответственно;

α_H, α_V, α_W - след поверхности α оставляемый на горизонтальной, на фронтальной, на профильной плоскости проекций соответственно;

a_H, a_V, a_W - след прямой a оставляемый на горизонтальной, на фронтальной, на профильной плоскости проекций соответственно;

Символьные обозначения - Первая группа Символы, обозначающие геометрические фигуры и отношения между ними

- Проекции точек, линий, поверхностей любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением верхнего индекса A`, A", A`" или 1`, 1", 1`", соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:
  A`, B`, C`, D`, ..., L`, M`, N`, ... - горизонтальные проекции точек;
  A", B", C", D", ..., L", M", N", ... - фронтальные проекции точек;
  A`", B`", C`", D`", ..., L`", M`", N`", ... - профильные проекции точек;
  a`, b`, c`, d`, ..., l`, m`, n`, ... - горизонтальные проекции линий;
  a", b", c", d", ..., l", m", n", ... - фронтальные проекции линий;
  a`", b`", c`", d`", ..., l`", m`", n`", ... - профильные проекции линий;
  α`, β`, γ`, δ`, ..., ζ`, η`, θ`, ... - горизонтальные проекции поверхностей;
  α", β", γ", δ", ..., ζ", η", θ", ... - фронтальные проекции поверхностей;
  α`", β`", γ`", δ`", ..., ζ`", η`", θ`", ... - профильные проекции поверхностей;

Символьные обозначения - Первая группа

Символы взаиморасположения геометрических объектов

Обозн.	Смысловое значение	Пример символической записи
(...)	способ задания геометрического объекта в пространстве и на комплексном чертеже	A(A`, A") – точка A задана на комплексном чертеже горизонтальной и фронтальной проекциями; α(A, b) – плоскость α задана прямой b и точкой A.
∈ ⊂ , ⊃	принадлежность	A∈l – точка A принадлежит прямой l; l⊂α – прямая l лежит в плоскости α
≡	совпадение	A`≡ B` – горизонтальные проекции точек A и B совпадают.
ǁ , //	параллельность	a // b – прямые a и b параллельны.
⊥	перпендикулярность	c⊥d – прямые c и d перпендикулярны.
∸	скрещивание	m ∸ n – прямые m и n скрещивающиеся.
∩	пересечение	k ∩ l – прямые k и l пересекаются.
∾	подобие	ΔABC ~ ΔDEF – треугольники ABC и DEF подобны.
≅	конгруэнтность	ΔABC ≅ /AB/ = /CD/ – отрезки AB и CD равны.
=	равенство, результат действия	/AB/ = /CD/ – длины отрезков AB и CD равны; k ∩ l = M - прямые k и l пересекаются в точке M.
/	отрицание	A ∉ l – точка A не принадлежит прямой l.
→ ←	отображение, преобразование	V/H → V1/H– система ортогональных плоскостей V/H преобразуется в систему плоскостей V1/H

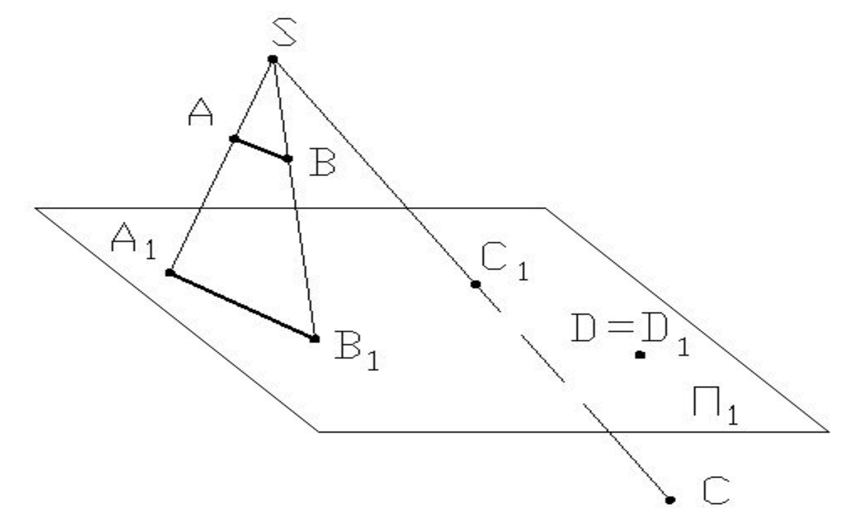
Символьные обозначения - Вторая группа

Символы обозначающие логические операции

Обозн.	Смысловое значение	Пример символической записи
$\wedge$	конъюнкция предложений (соответствует союзу «и»)	$K \in a \wedge K \in d$ – точка K принадлежит прямым a и d
$\vee$	дизъюнкция предложений (соответствует союзу «или»)	$A \in \alpha \vee A \notin \alpha$ – точка A принадлежит плоскости α или точка A не принадлежит плоскости α.
$\Rightarrow$ $\Leftarrow$	логическое следствие – импликация (следовательно, поэтому)	$a \parallel b \wedge c \parallel b \Rightarrow a \parallel c$ – прямые a и c параллельны прямой b, следовательно, они параллельны между собой.
$\Leftrightarrow$	логическая эквивалентность (что то же самое)	$A \in l \Leftrightarrow A` \in l`, A'' \in l''$ – точка A принадлежит прямой l, следовательно, ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой; справедливо и обратное утверждение: проекции точки A лежат на одноименных проекциях прямой l, следовательно, точка принадлежит этой прямой.

Тема 1.2 **Методы проецирования**

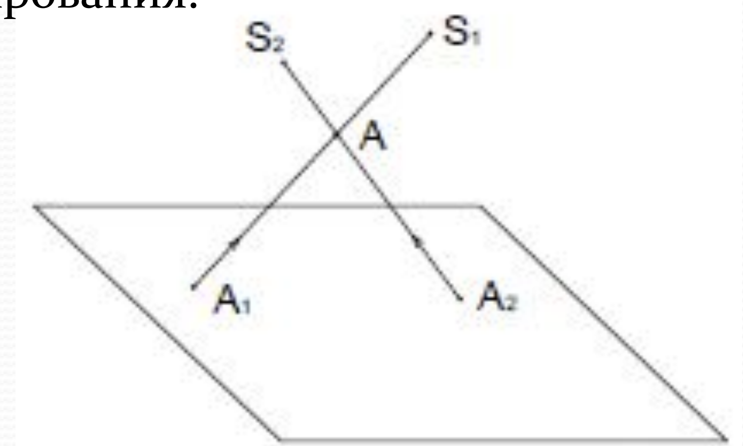
Тема 1.2.1 Центральное проецирование



- Проецирующие лучи проводятся из одной точки S – центра проекций. $П_1$ – плоскость проекций, точки A, B, C, D – точки пространства, $D \in П_1$; SA, SB – проецирующие лучи.
- A_1, B_1, C_1, D_1 – центральные проекции точек A, B, C, D на плоскости проекций $П_1$; $D_1 \equiv D$.

Выводы:

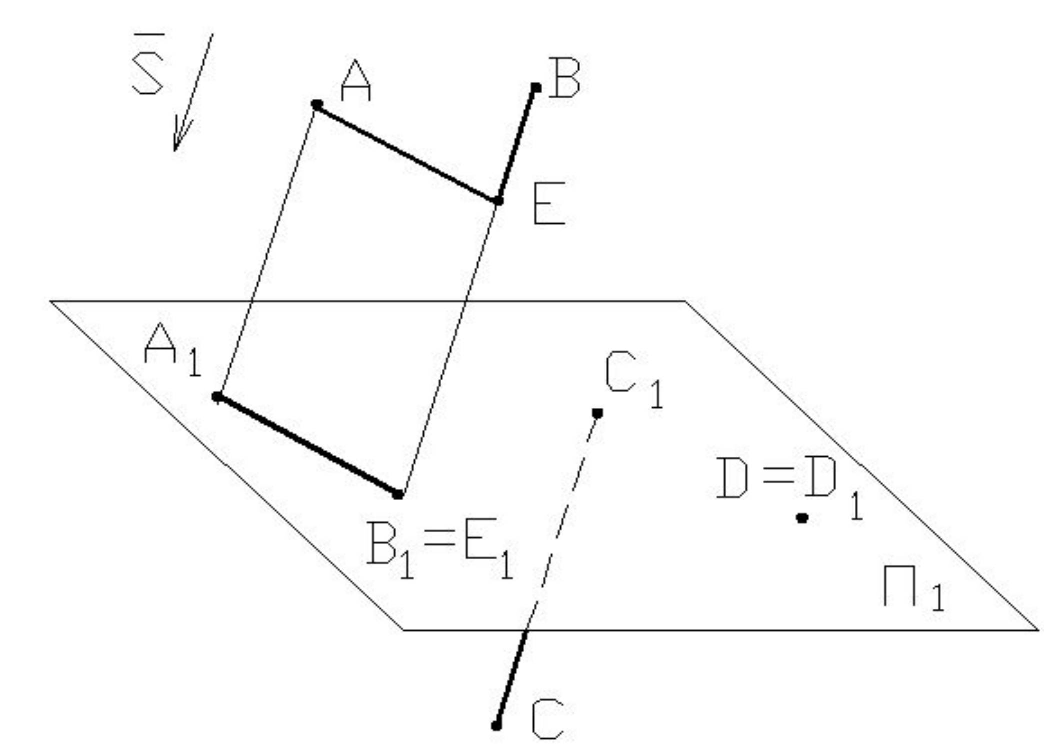
- Каждой точке пространства соответствует одна единственная проекция на плоскости П1 при заданном S.
- Одна проекция точки не определяет положения точки в пространстве.
- Для того, чтобы определить положение точки в пространстве нужно иметь две центральные проекции точки на плоскости, полученные при двух центрах проецирования.



Центральные проекции дают представление только о форме предмета, геометрического объекта, а не о его размерах, $A_1B_1>AB$.
Поэтому центральные проекции применяются в архитектурно-строительных чертежах, а в машиностроительных чертежах почти не применяются.

Тема 1.2 **Методы проецирования**

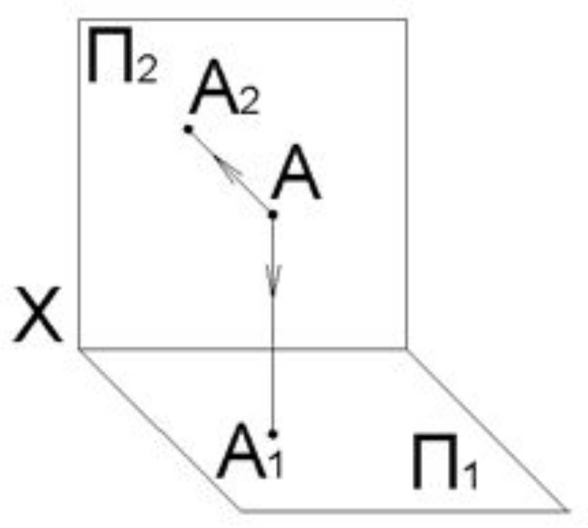
Тема 1.2.2 Параллельное проецирование



Проецирующие лучи параллельны направлению проецирования $\bar{S}$.
П1 – плоскость проекций;
точки A, B, C, D, E – точки пространства, D∈П1,
Точки B и E расположены на одном проецирующем луче.
A1, B1, C1, D1, E1 – параллельные проекции точек A, B, C, D на плоскости П1; D1≡D; B1≡E1.
В зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости проекций параллельное проецирование разделяют на косоугольное и прямоугольное (ортогональное).
При ортогональном проецировании S⊥П1

Выводы:

- Каждой точке пространства соответствует одна единственная проекция на плоскости $П_1$ при заданном S.
- Одна проекция точки не определяет положения точки в пространстве.
- При ортогональном проецировании для получения двух проекций одной точки необходимо иметь две не параллельные плоскости проекций. Выберем две взаимно перпендикулярные плоскости проекций $П_1 \perp П_2$



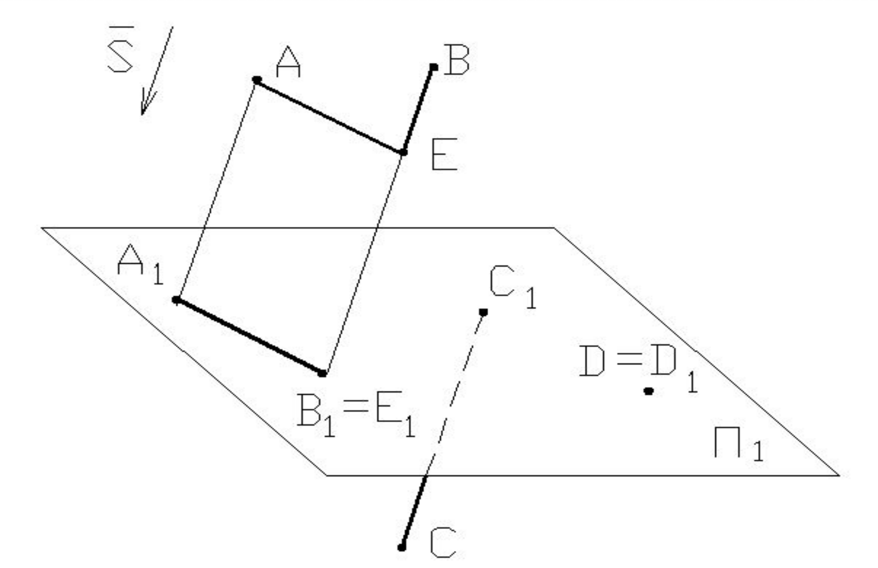
Тема 1.2 **Методы проецирования**

Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

- При параллельном проецировании метрические характеристики геометрических объектов нарушаются. В общем случае происходит искажение линейных и угловых величин.

  Сохраняются следующие свойства:

  1. Проекция точки на плоскости есть точка A→A1



Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

- 2. Проекция прямой линии на плоскости есть прямая, за исключением прямой, направление которой совпадает с направление проецирования.

$$m \rightarrow m_1,\ n \parallel S \Rightarrow n \rightarrow N_1$$

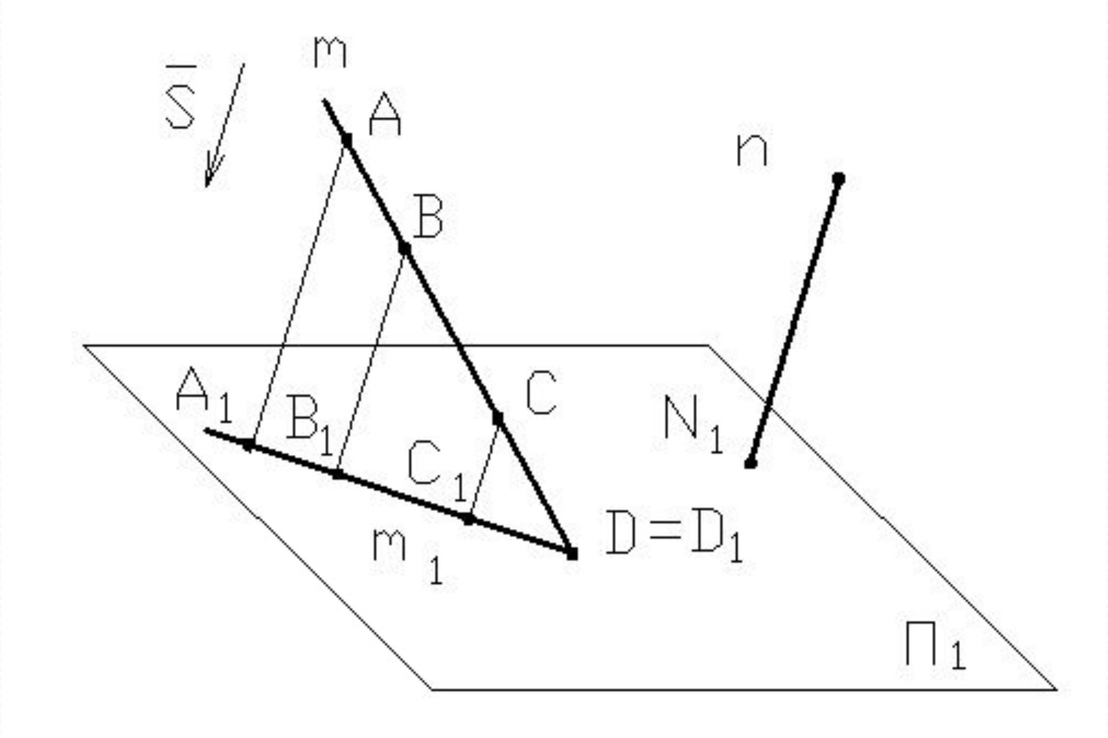
- 3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой

$$A \in m \Rightarrow A_1 \in m_1$$

Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

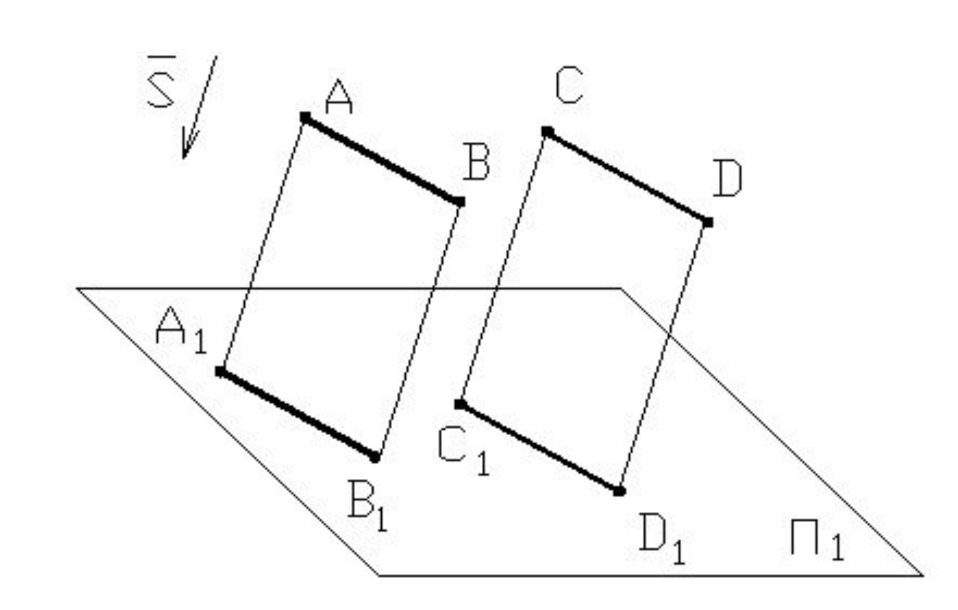
- 4. Если отрезок прямой делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении

$$B \in AC \Rightarrow AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$$



Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

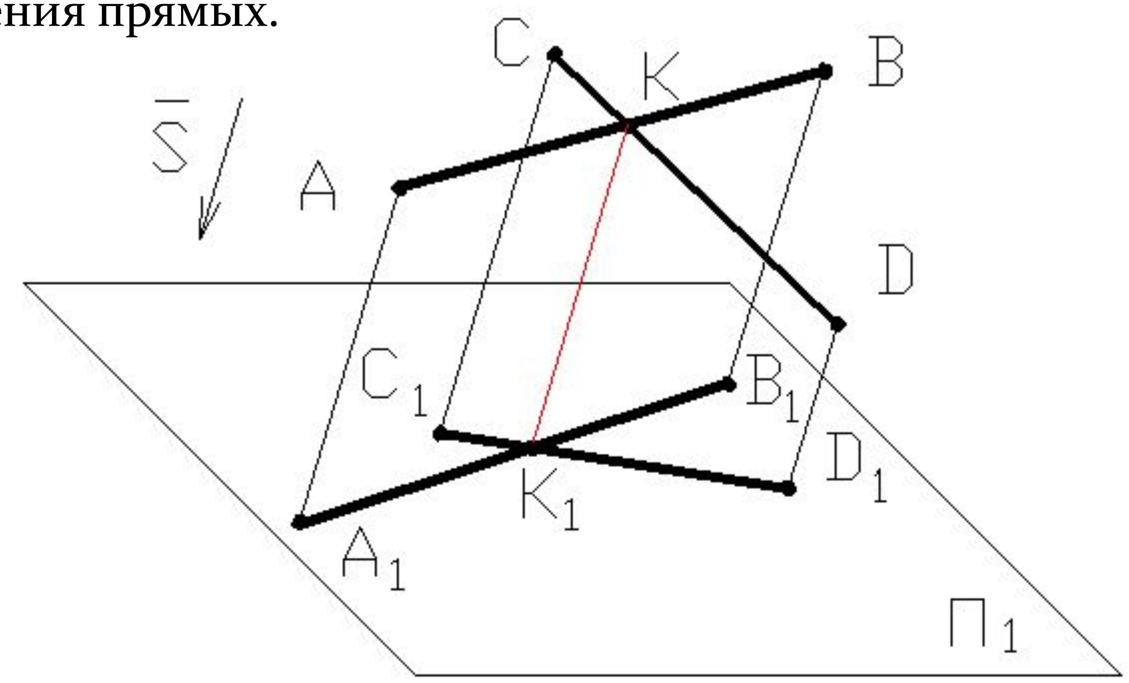
- 5. Проекции отрезков параллельных прямых и их длины находятся в том же отношении, что и длины проецируемых отрезков.



$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1 \wedge AB:CD \Rightarrow A_1B_1:C_1D_1$

Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

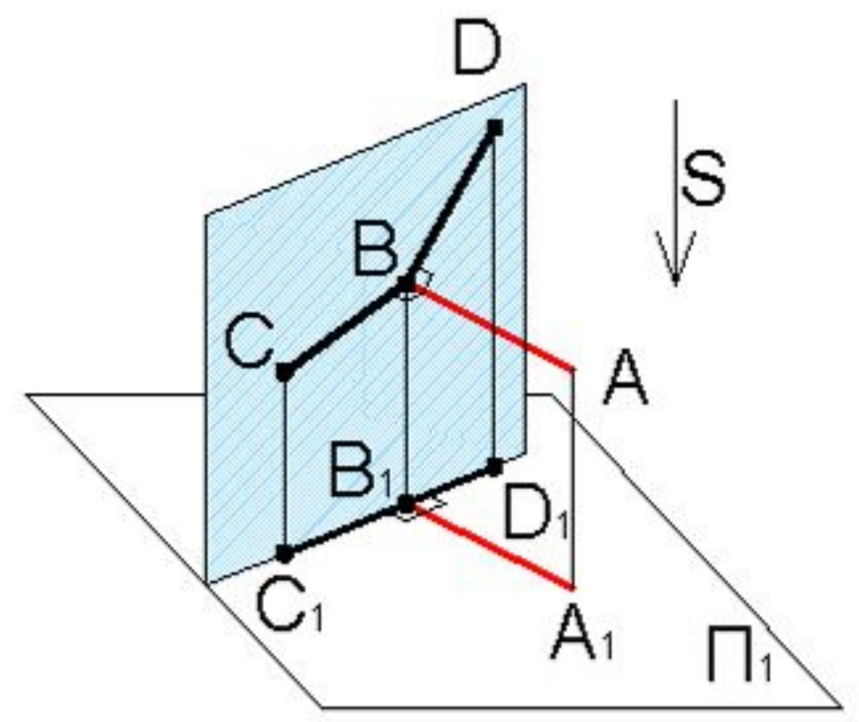
- 6. Проекции пересекающихся прямых пересекаются. Точка пересечения проекций двух пересекающихся прямых является проекцией точки пересечения прямых.



$K = AB \cap CD \Rightarrow K_1 = A_1B_1 \cap C_1D_1 \wedge K_1 \in K$

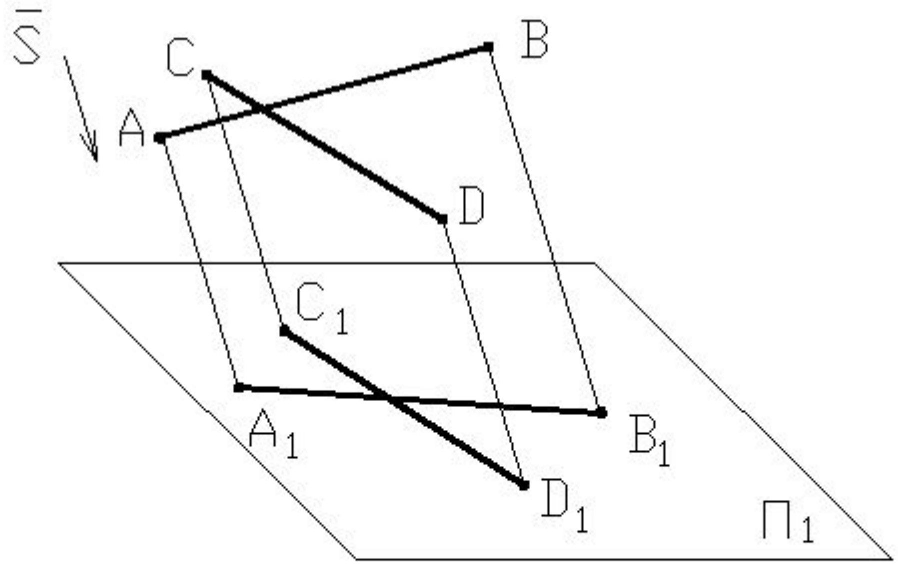
Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

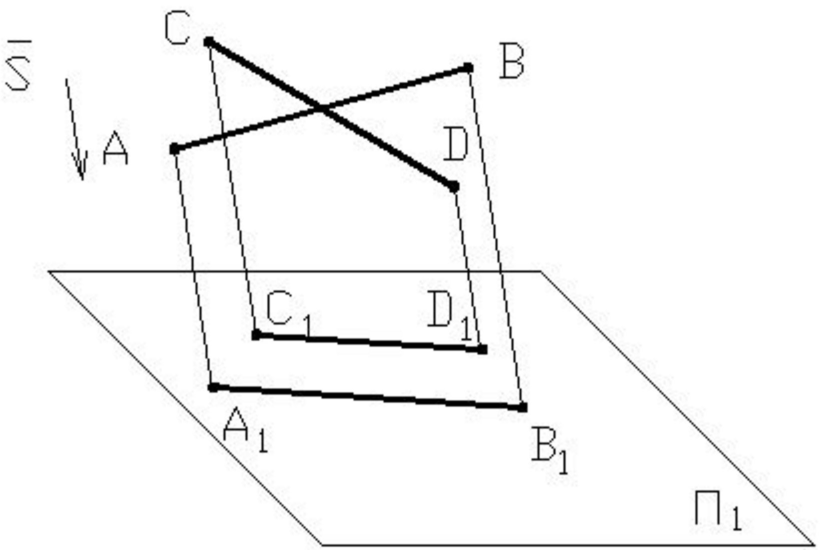
- 7. При **ортогональном** проецировании прямой угол проецируется без искажения, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей.



Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

- 8. Проекции двух скрещивающихся прямых в зависимости от направления проецирования могут или пересекаться, или быть параллельными.





Тема 1.2.3 Инвариантные свойства параллельного проецирования

- 9. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость без искажения

$$\triangle ABC \parallel \Pi_1 \rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = |\triangle ABC|$$

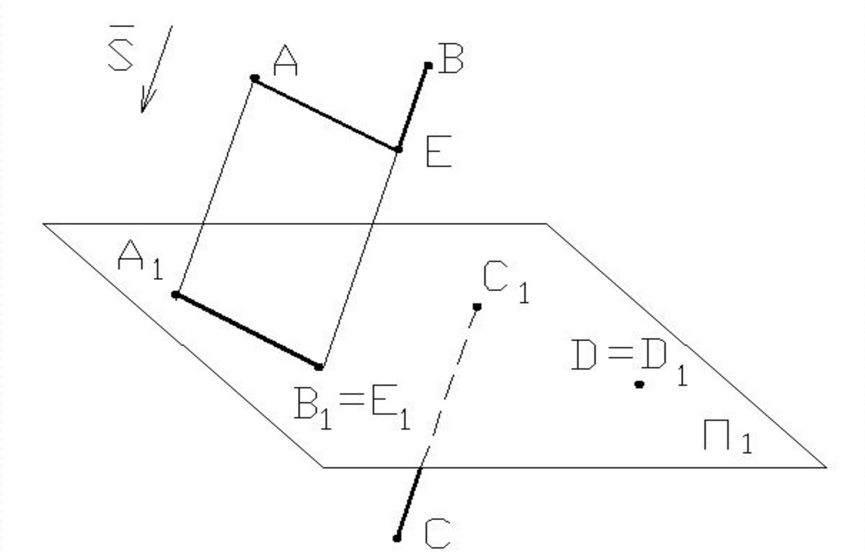
- 10. При параллельном перемещении фигуры или плоскости проекций изображение фигуры на этой плоскости не изменяется.

Раздел 2 Задание геометрических объектов на чертеже

- Тема 2.1 Ортогональный чертеж точки
- Тема 2.2 Ортогональный чертеж прямой
- Тема 2.3 Длина отрезка прямой, углы его наклона к плоскостям проекций. Способ прямоугольного треугольника
- Тема 2.4 Ортогональный чертеж плоскости
- Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения
- Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

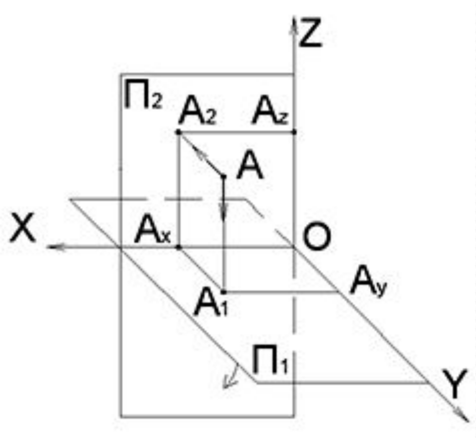
- Метод проецирование позволяет строить изображения по заданному оригиналу, т.е. решать прямую задачу начертательной геометрии. Однако, возникает и обратная задача, заключающаяся в восстановлении оригинала по его проекционным изображениям.

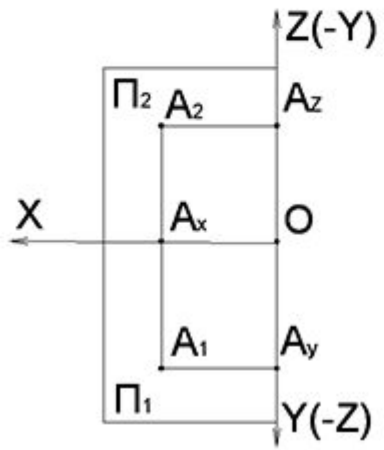


- Рассмотрим точки В и Е. Они расположены на одном проецирующем луче. Изображения этих точек на плоскости П1 совпадают. По проекциям нельзя установить, какая из точек расположена ближе к плоскости П1. Следовательно, проекционный чертеж не обладает свойством **обратимости**.

Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- По схеме Гаспара Монжа геометрический объект проецируется ортогонально на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций
- $П_1 \perp П_2$
- $П_1$ – горизонтальная плоскость проекций;
- $П_2$ – фронтальная плоскость проекций.
- Эти плоскости делят пространство на четыре квадранта.



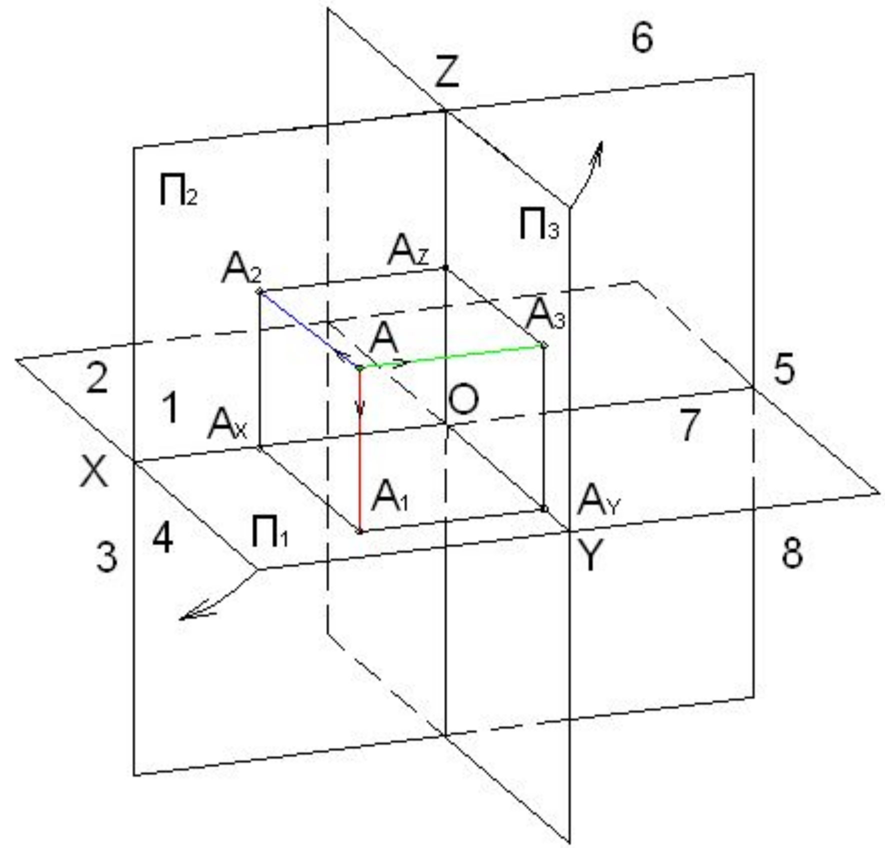


После проецирования оригинала плоскости $П_1$ и $П_2$ совмещаются в одну плоскость. Плоскость $П_1$ вращается вокруг оси OX по часовой стрелке. Полученный чертеж называется **эпюром Монжа**. Эпюр Монжа называют также **комплексным чертежом**.

Тема 2.1 Ортогональный чертеж точки

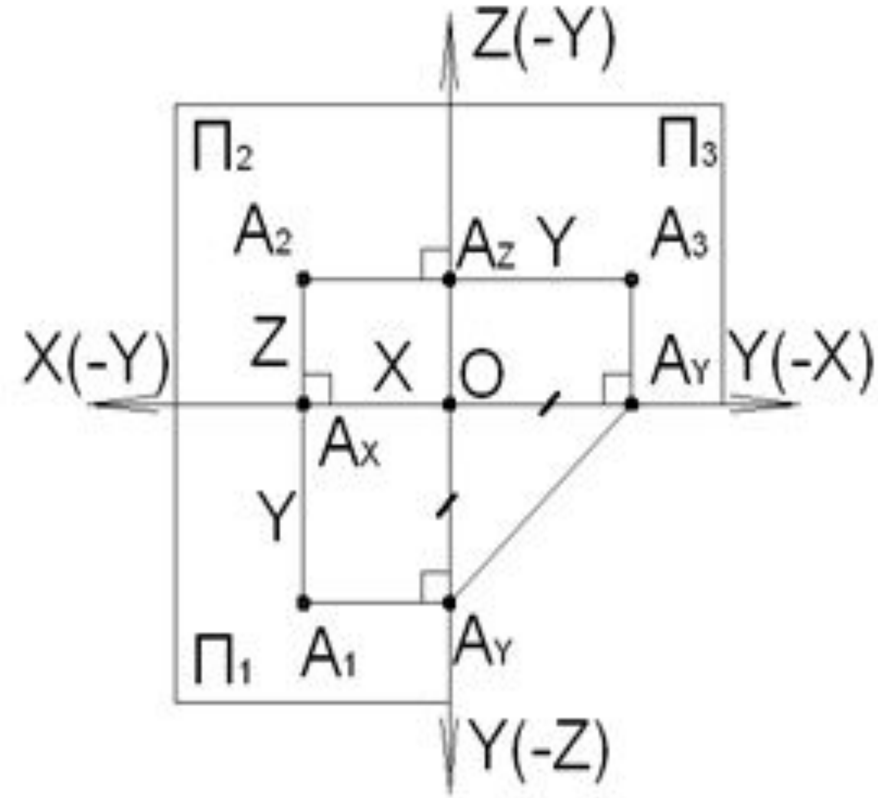
- На практике при изображении сложных геометрических форм приходится увеличивать число проекций. Введем третью плоскость проекций П3.

П1 – горизонтальная плоскость проекций;
П2 – фронтальная плоскость проекций;
П3 – профильная плоскость проекций.
OX – ось абсцисс;
OY – ось ординат;
OZ – ось аппликат.
Точка O – начало координат.
Пространство делится тремя взаимно перпендикулярными плоскостями проекций на восемь октантов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



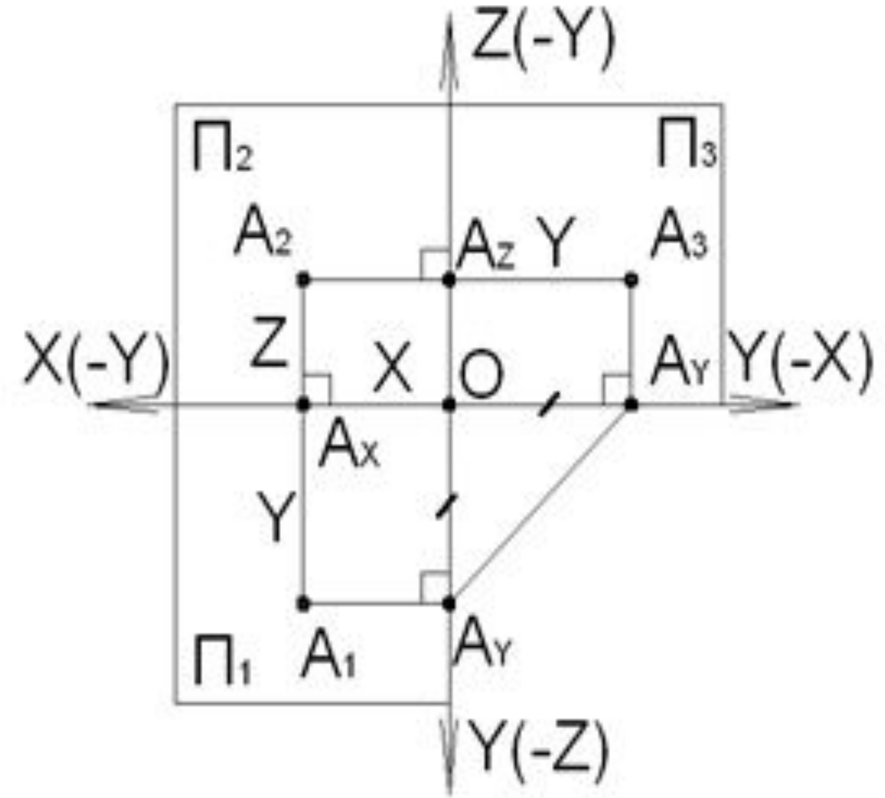
Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- Рассмотрим точку пространства А относительно П1 ⊥П2⊥П3.
- Построим ортогональные проекции точки А, для этого опустим перпендикуляры из точки А на плоскости проекций.
- А1 – горизонтальная проекция точки А,
- А2 – фронтальная проекция точки А,
- А3 – профильная проекция точки А.
- Комплексный чертеж получается, если горизонтальную и профильную плоскости проекций совместить с фронтальной плоскостью проекций.



Тема 2.1 Ортогональный чертеж точки

- На рисунке представлен **комплексный чертеж** точки А. Расстояния от точки до плоскостей проекций называются **координатами точки** – X, Y, Z – A(X,Y,Z).
- X=A–A3=A2–AZ=A1–AY=O–AX – расстояние до плоскости проекций П3;
- Y=A–A2=A3–AZ=A1–AX=O–AY – расстояние до плоскости проекций П2;
- Z=A–A1=A2–AX=A3–AY=O–AZ – расстояние до плоскости проекций П1.
- На комплексном чертеже две проекции точки A1 и A2, A1 и A3, A2 и A3 расположены на одном перпендикуляре, называемом **линией проекционной связи**, к соответствующей оси координат. Линии проекционной связи проходят через точки Ax, Ay, Az.



(A1–A2) ⊥ OX, (A1–A3) ⊥ OY, (A2–A3) ⊥ OZ

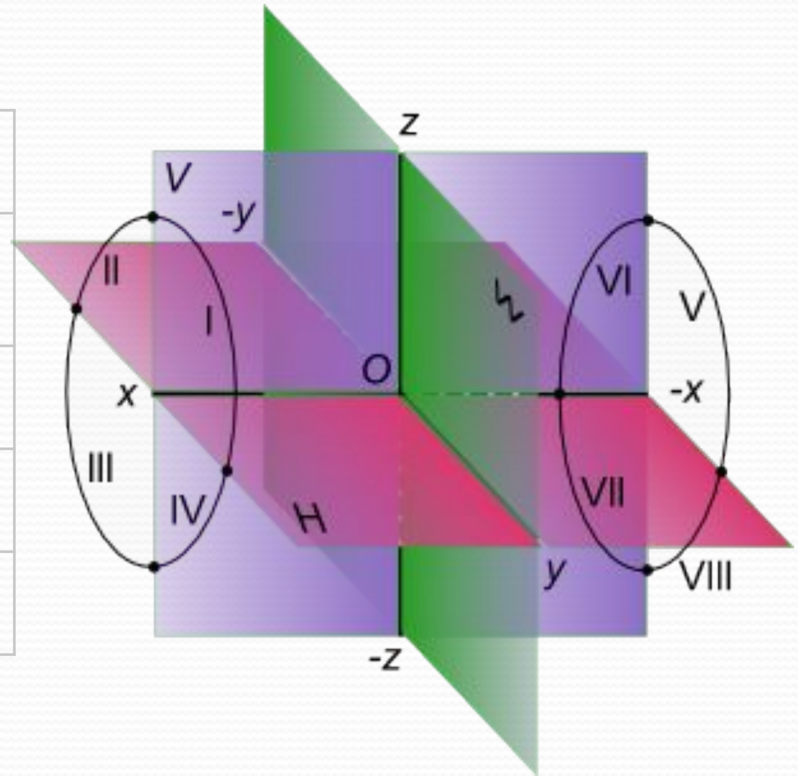
Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- Выводы:
- Положение точки в пространстве однозначно определяется тремя ее координатами A(X,Y,Z).
- Две проекции точки вполне определяют положение точки в пространстве.
- По двум ортогональным проекциям точки можно построить ее третью проекцию.
- Горизонтальная проекция точки имеет координаты X и Y, фронтальная проекция – X и Z, профильная проекция – Y и Z.

Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

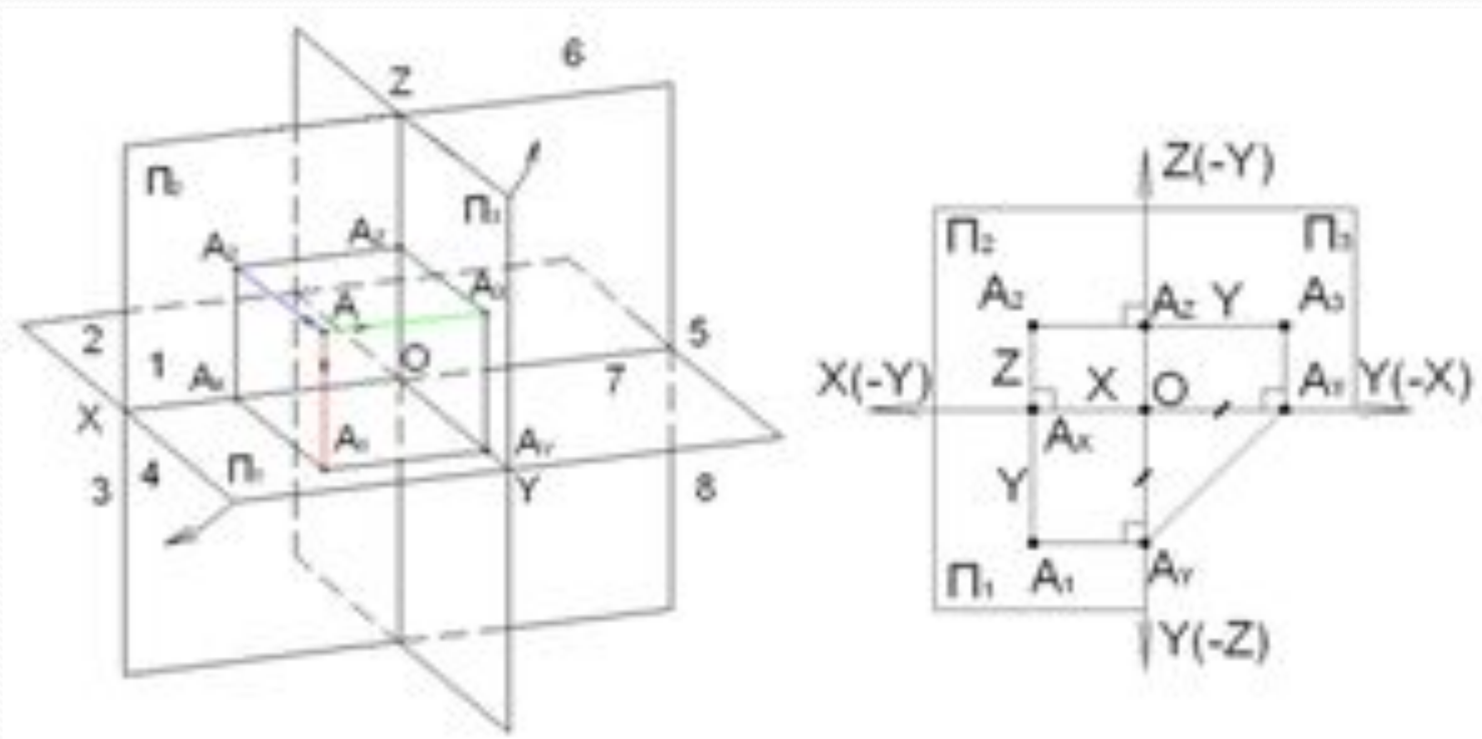
- В таблице приведены знаки координат у точек, расположенных в различных квадрантах пространства.

Координаты	Квадрант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	+	+	+	–	–	–	–
Y	+	–	–	+	+	–	–	+
Z	+	+	–	–	+	+	–	–



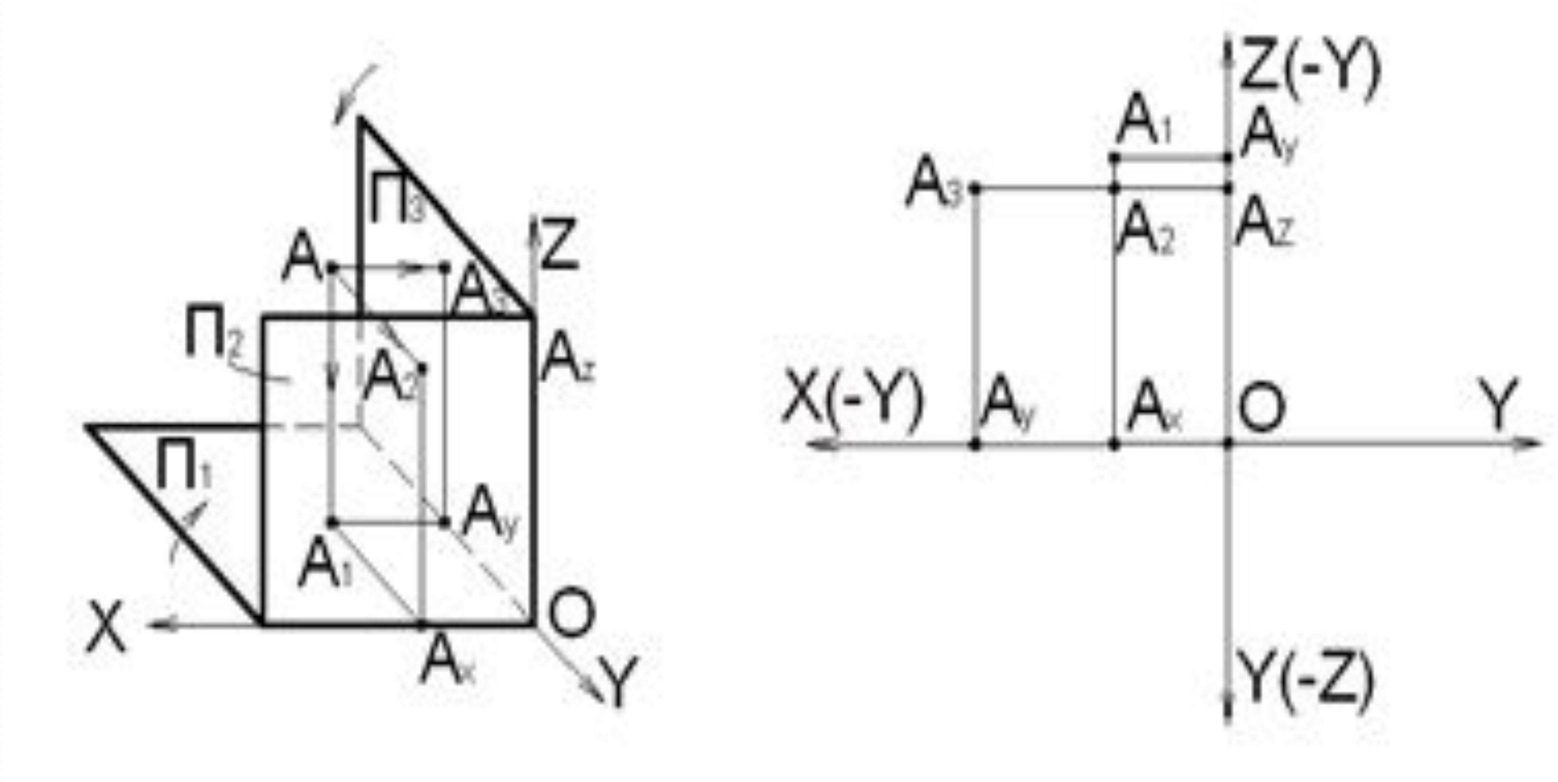
Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- Рассмотрим подробнее комплексные чертежи точек, расположенных в различных квадрантах пространства.
- Точка А расположена в I квадранте



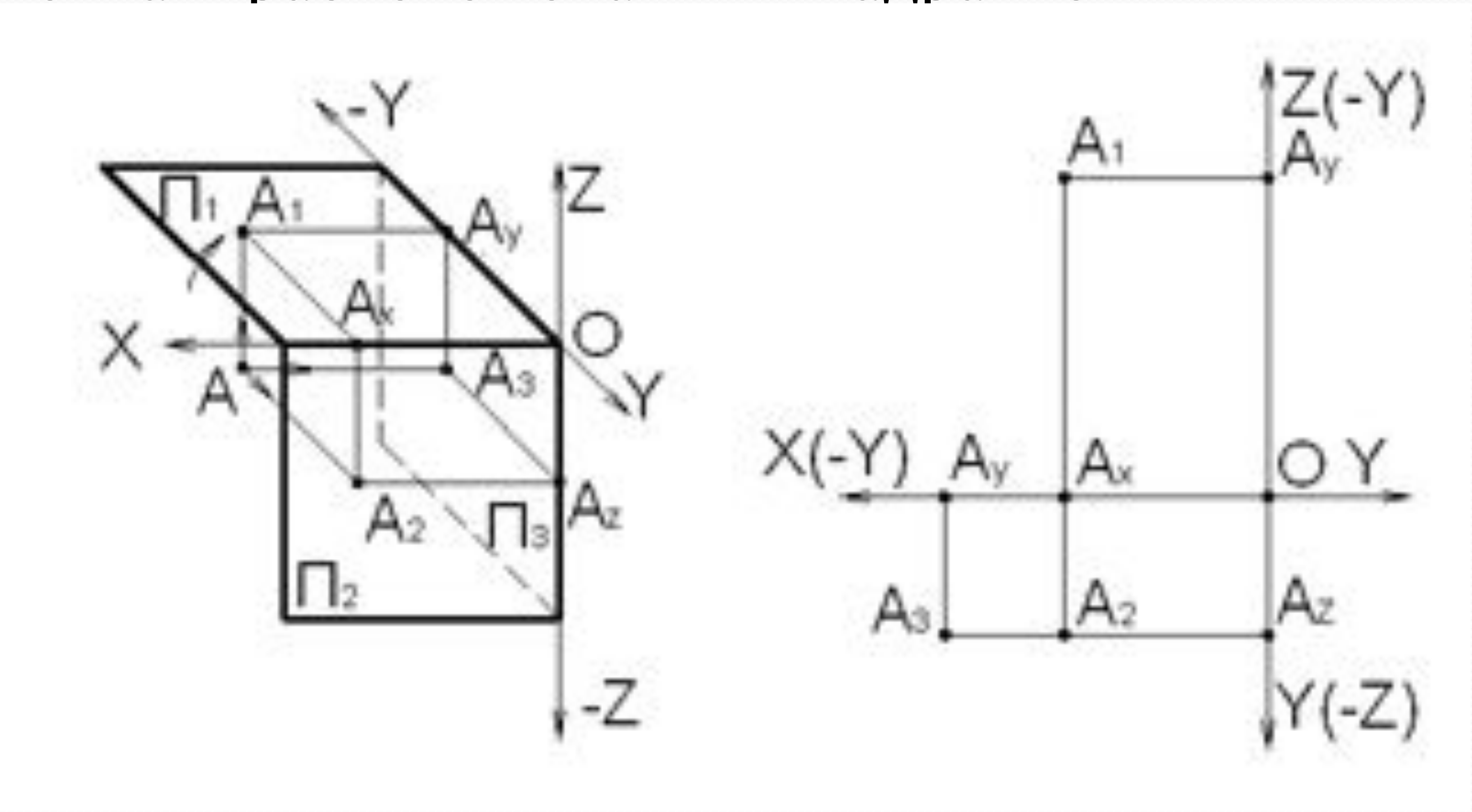
Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- Точка А расположена в II квадранте



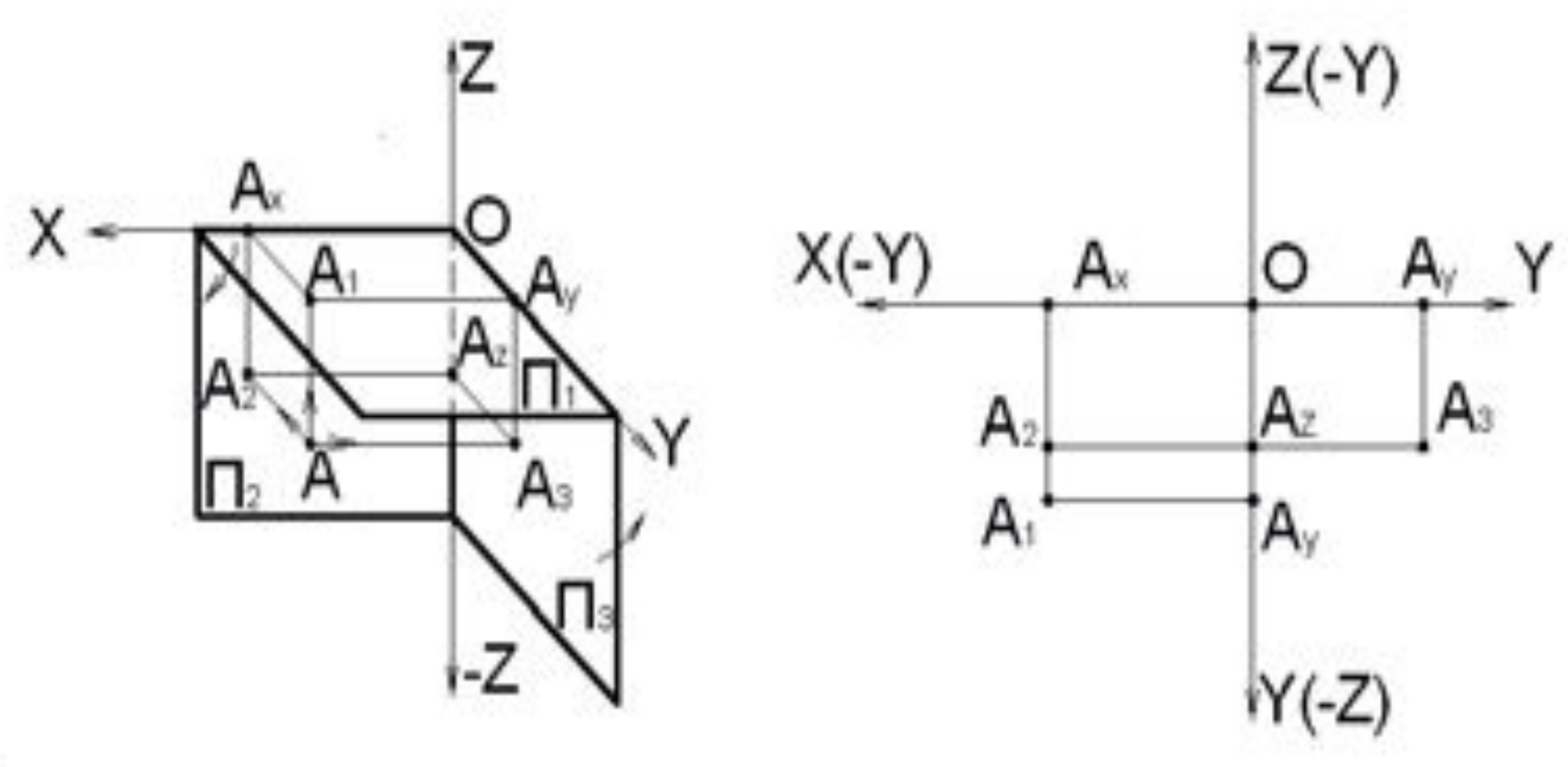
Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

- Точка А расположена в III квадранте



Тема 2.1 **Ортогональный чертеж точки**

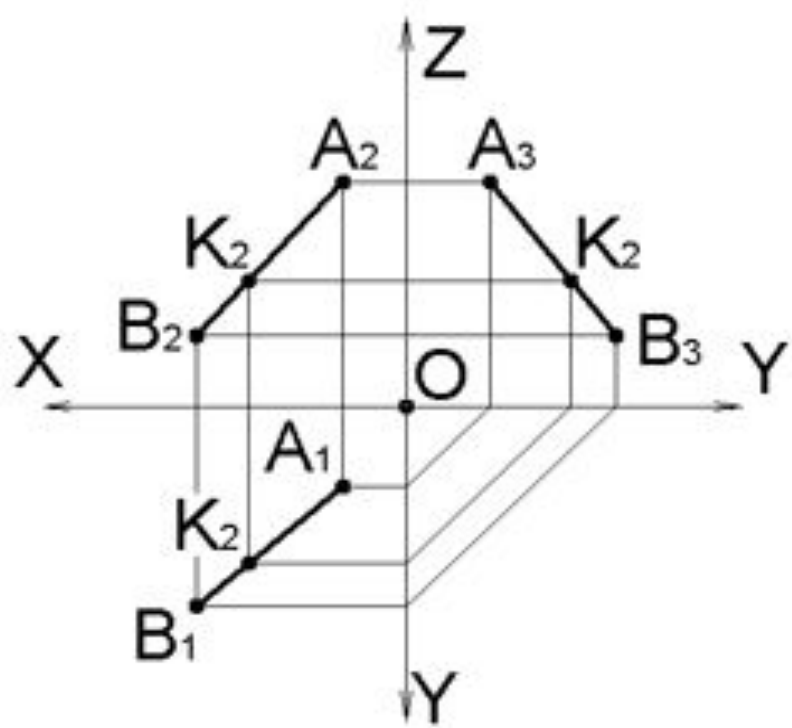
- Точка А расположена в IV квадранте



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямая, не параллельная и не перпендикулярная плоскости проекций, называется **прямой общего положения**.
- На рисунке отрезок прямой АВ является прямой общего положения, точка К принадлежит отрезку в соответствии с инвариантным свойством, поскольку

$$K_1 \in A_1B_1 \wedge K_2 \in A_2B_2 \wedge K_3 \in A_3B_3$$



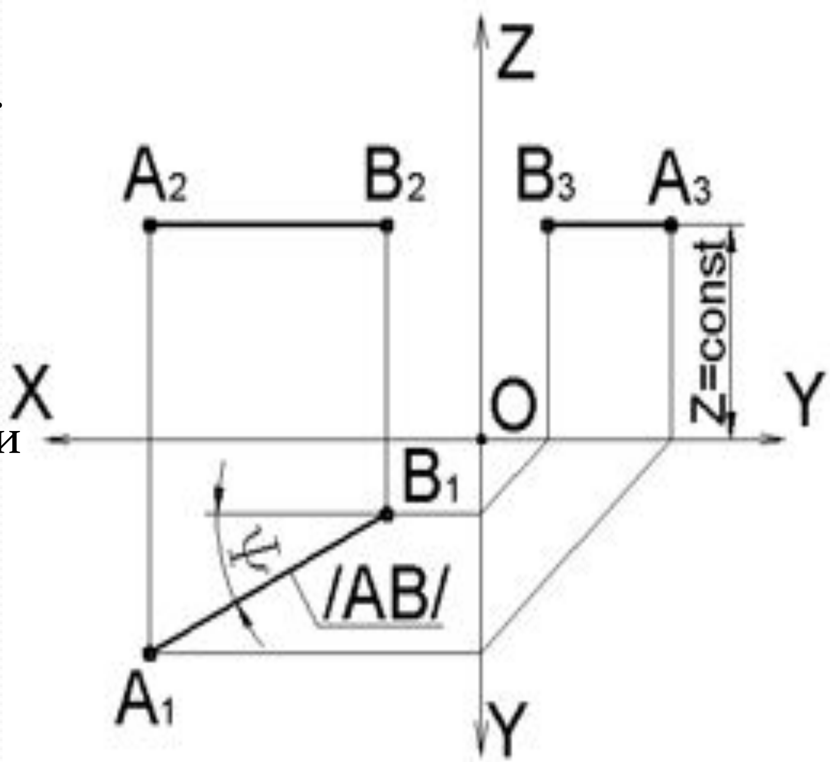
Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямой частного положения называется прямая, параллельная или перпендикулярная плоскостям проекций.
- Прямые, параллельные плоскостям проекций – **линии уровня**.
- Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций П1, называется **горизонталью** или горизонтальной прямой, или горизонтальной линией уровня. Все точки этой прямой равноудалены от горизонтальной плоскости проекций П1. Горизонтальная проекция A1B1 равна натуральной величине отрезка AB. Угол между A1B1 и осью OX равен натуральной величине угла между горизонталью AB и фронтальной плоскостью проекций П2.

$$AB \parallel П_1 \rightarrow Z=const;$$

$$A_1B_1=|AB|;$$

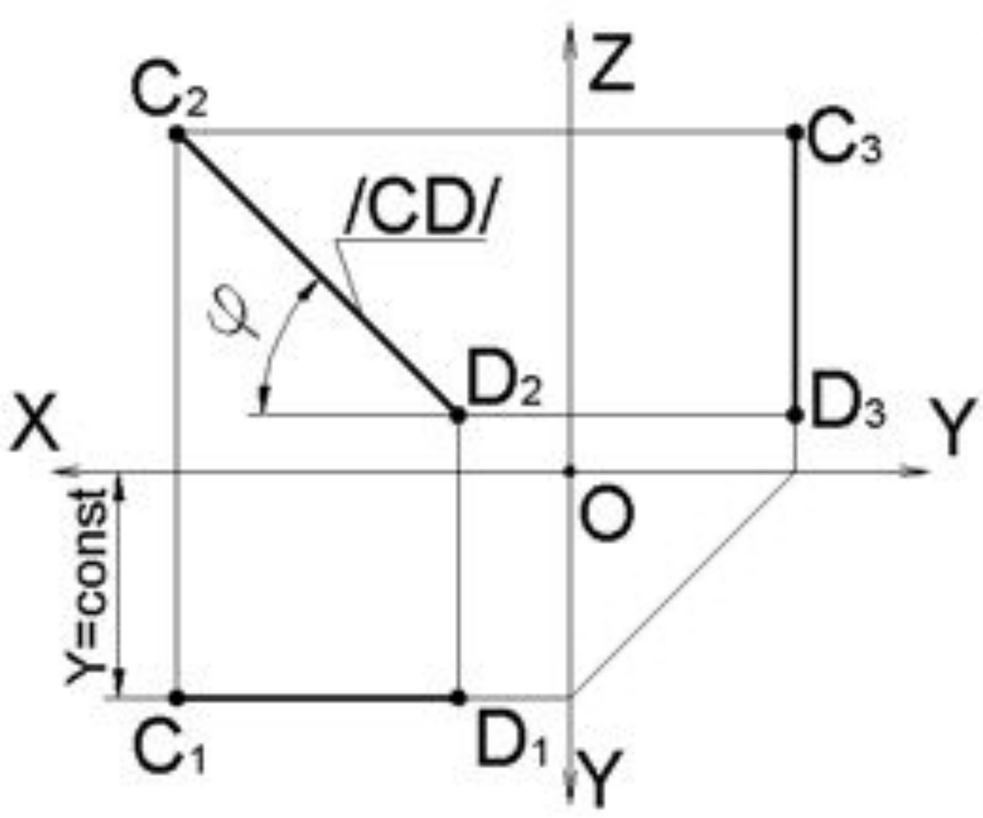
$$A_1B_1 \wedge OX = AB \wedge П_2 = \psi$$



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций П2, называется фронталью.

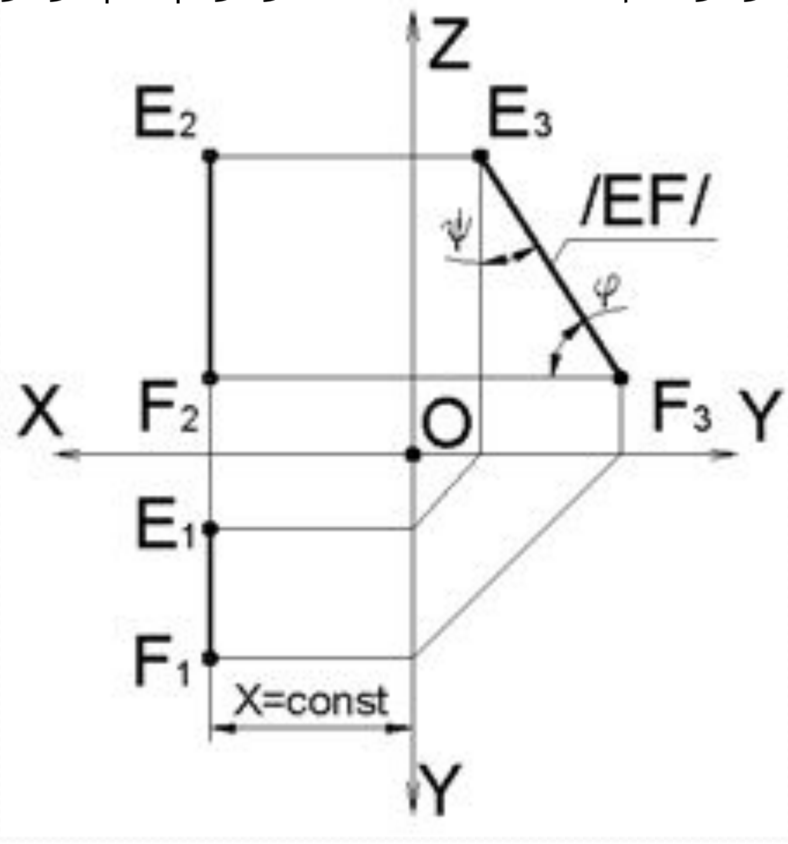
CD // П2→Y=const; C2D2=|CD|; C2D2∧OX=CD∧П1=ф



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямая, параллельная профильной плоскости проекций П3, называется профильной прямой.

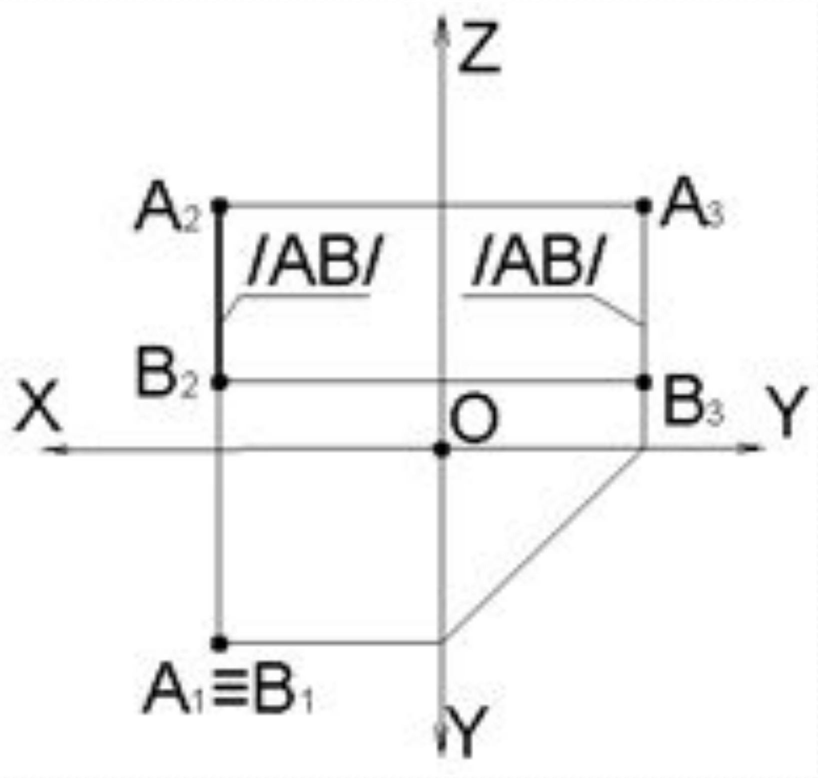
  EF // П3→X=const; E3F3=|EF|E3F3∧OY=EF∧П1=ф; E3F3∧OZ=EF∧П2=ψ



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, называется горизонтально-проецирующей прямой.

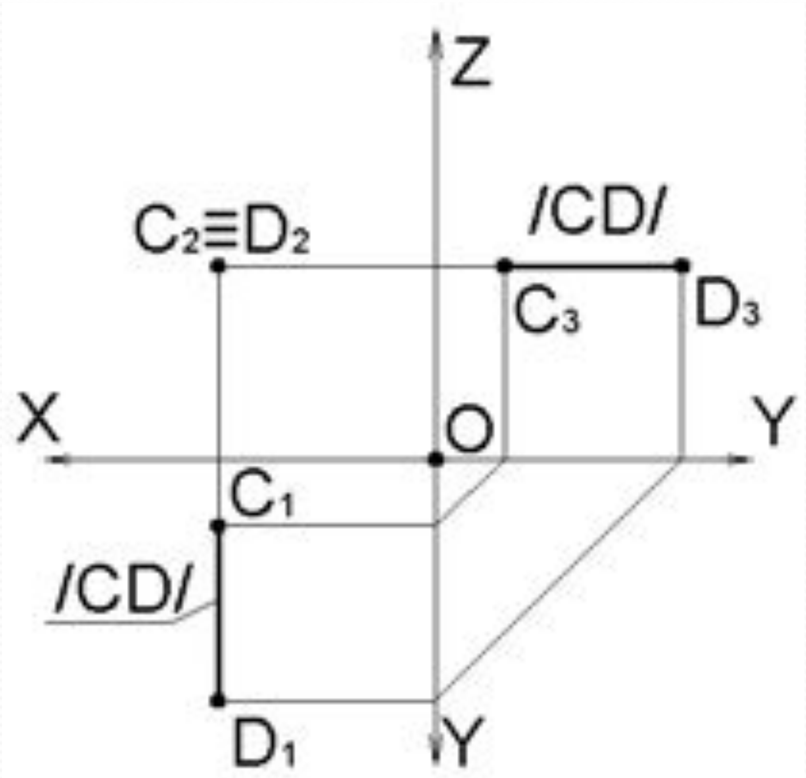
$AB \perp П_1 \rightarrow A_1 \equiv B_1;\ A_2B_2 = |AB| \wedge AB \parallel П_2$



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

- Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций П2 называется фронтально-проецирующей.

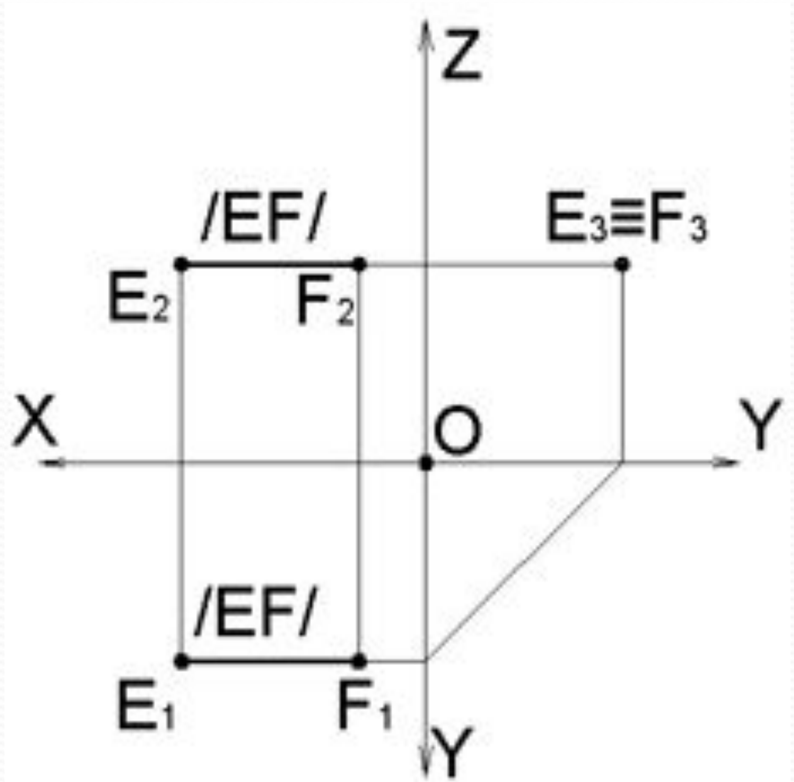
$$CD \perp П_2 \rightarrow C_2 \equiv D_2;\ C_1D_1 = |CD| \parallel П_1$$



Тема 2.2 **Ортогональный чертеж прямой**

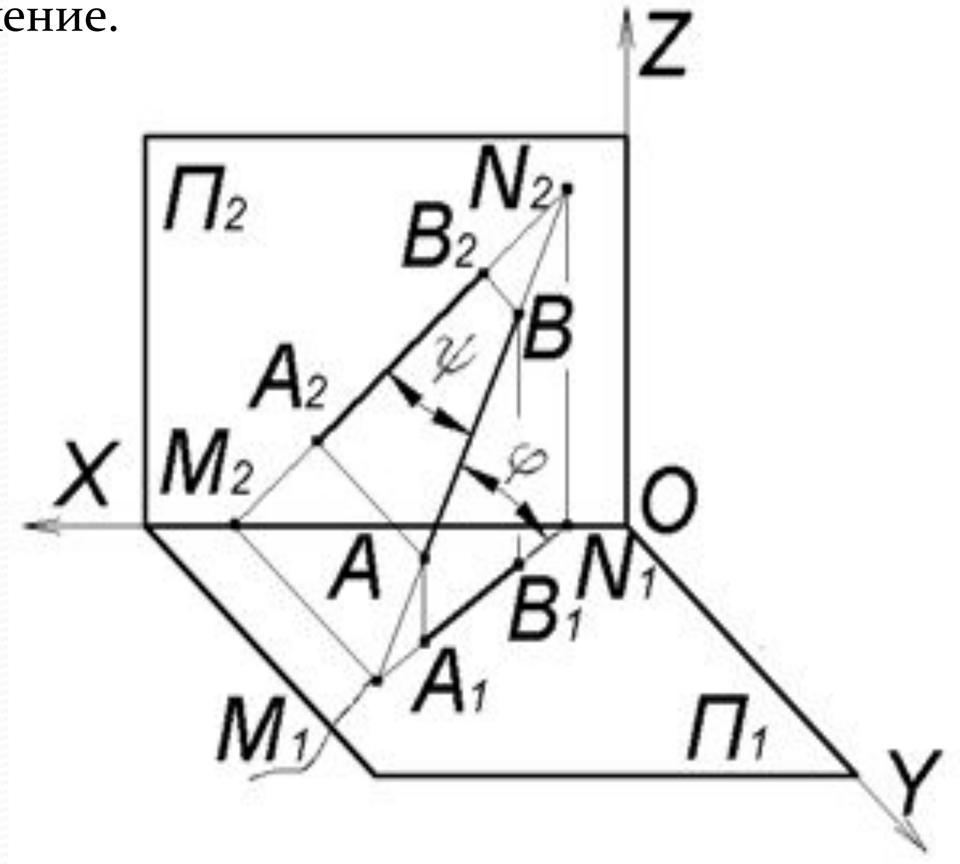
- Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций называется профильно-проецирующей прямой.

$$EF \perp \Pi_3 \rightarrow E_3 \equiv F_3;\ E_1F_1 = E_2F_2 = |EF| \wedge EF \parallel \Pi_1 \wedge EF \parallel \Pi_2$$



Тема 2.3 Длина отрезка прямой, углы его наклона к плоскостям проекций. Способ прямоугольного треугольника

- Ортогональные проекции отрезка общего положения имеют линейное и угловое искажение.



Тема 2.3 Длина отрезка прямой, углы его наклона к плоскостям проекций. Способ прямоугольного треугольника

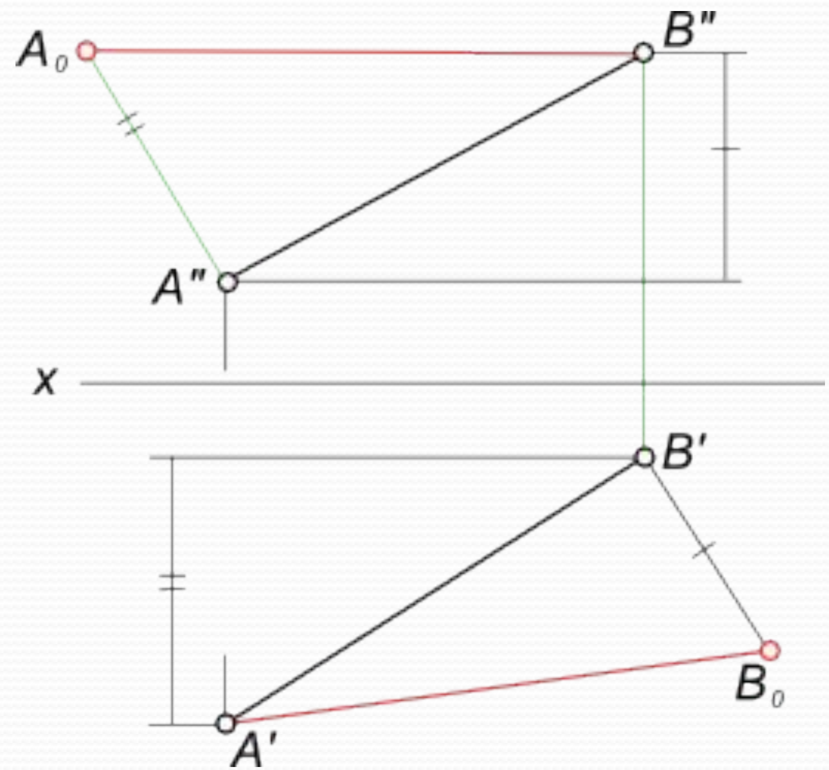
Для графического определения на эпюре Монжа действительной величины отрезка или расстояния между двумя точками прямой может быть использован **способ прямоугольного треугольника**.

- за один его катет принимается горизонтальная (фронтальная, профильная) проекция отрезка;

- а за другой катет - разность удаления концов отрезка от горизонтальной (или соответственно фронтальной, профильной) плоскости проекции;

- гипотенуза, полученного таким образом, прямоугольного треугольника равна действительной величине заданного отрезка или расстояния между двумя точками прямой.

Графическое определение действительной величины отрезка $[AB]$ или расстояния между двумя точками прямой A и B путем построения прямоугольных треугольников $\Delta A`B`B_o$ или $\Delta A''B''A_o$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ И УГЛОВ НАКЛОНА ПРЯМОЙ К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ (МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА)

- Длину отрезка ***AB*** и угол наклона **α** отрезка к плоскости Π_1 можно определить из прямоугольного треугольника ***ABC***

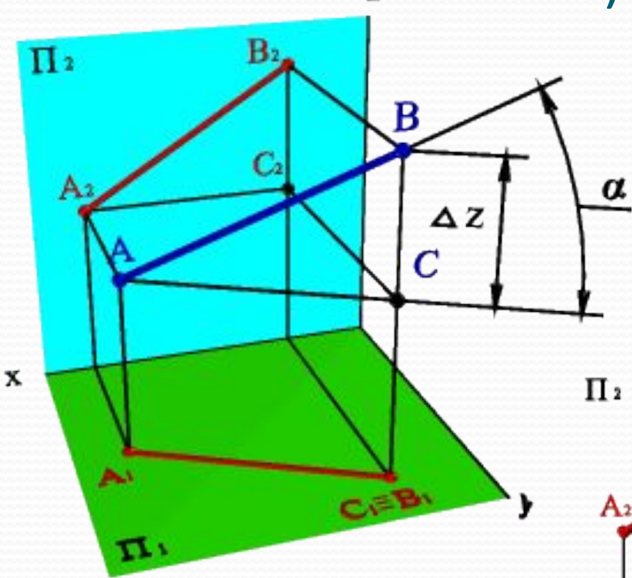
$$|AC|=|A_1B_1|,\ |BC|=\Delta Z.$$

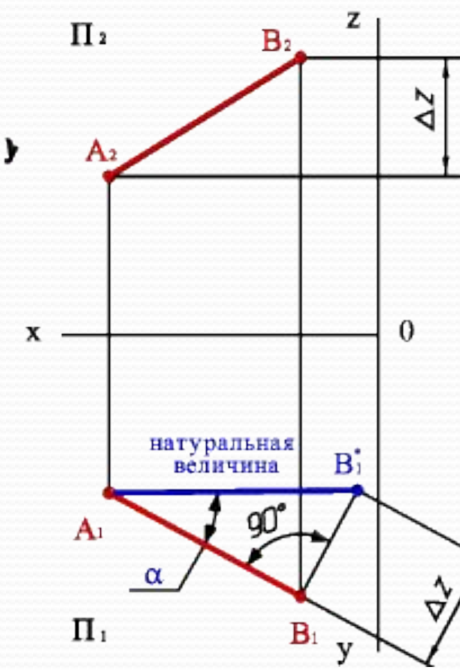
Для этого на эпюре из точки B_1 под углом 90° проводим отрезок

$$|B_1B_1^*|=\Delta Z,$$

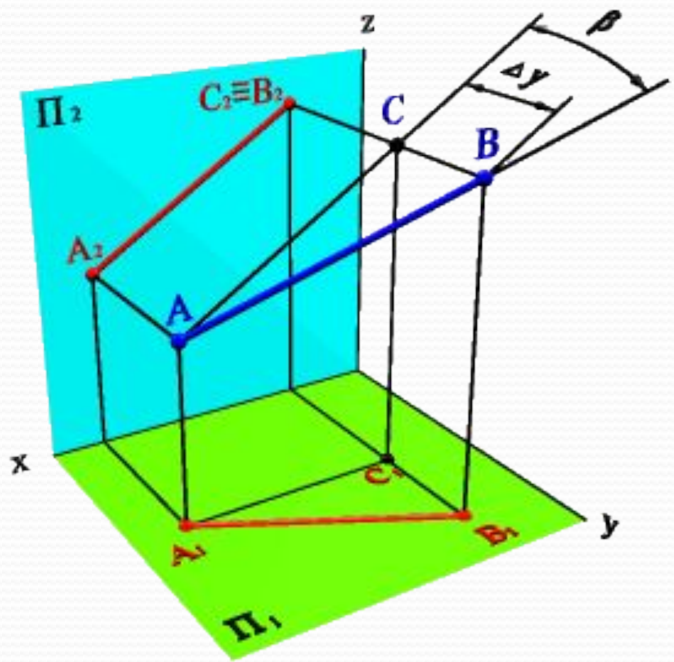
полученный в результате построений отрезок $A_1B_1^*$ и будет **натуральной величиной** отрезка ***AB***, а угол $B_1A_1B_1^*=\alpha$. **угол наклона α отрезка к плоскости** Π_1

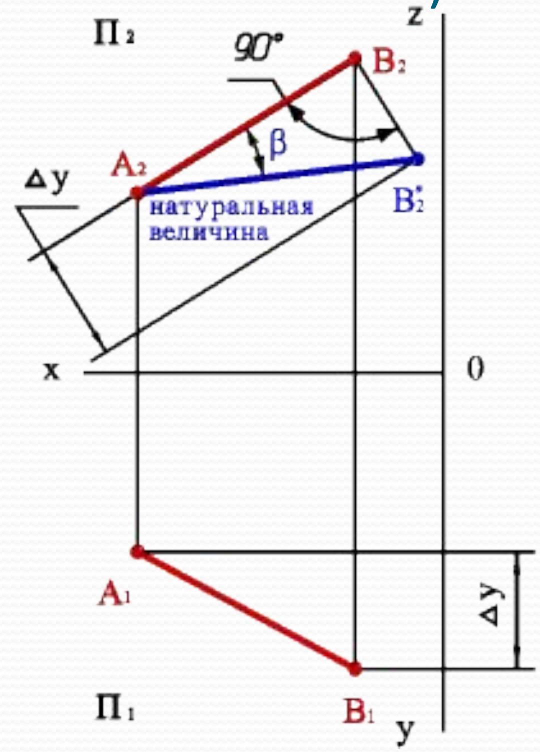
Тот же результат можно получить при вращении треугольника ***ABC*** вокруг стороны ***AC*** до тех пор, пока он не станет параллелен плоскости Π_1, в этом случае треугольник проецируется на плоскость проекций без искажения.





ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЛИНИИ И УГЛОВ НАКЛОНА ПРЯМОЙ К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ (МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА)





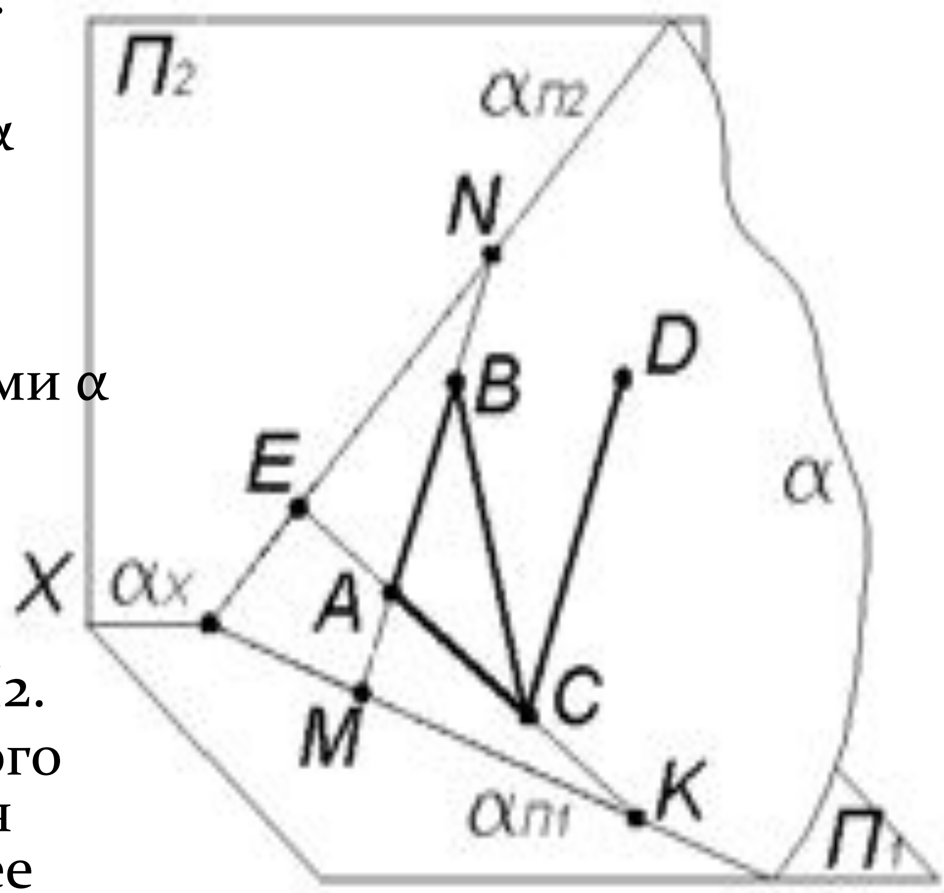
Длину отрезка ***AB*** и **β**-угол наклона отрезка к плоскости $\mathbf{П_2}$ можно определить из прямоугольного треугольника ***ABC***

$$|AC|=|A_2B_2|,\ |BC|=\Delta Y.$$

Построения аналогичные рассмотренным, только в треугольнике ***ABB**** сторона **|BB*|=ΔY** и треугольник совмещается с плоскостью $\boldsymbol{П_2}$

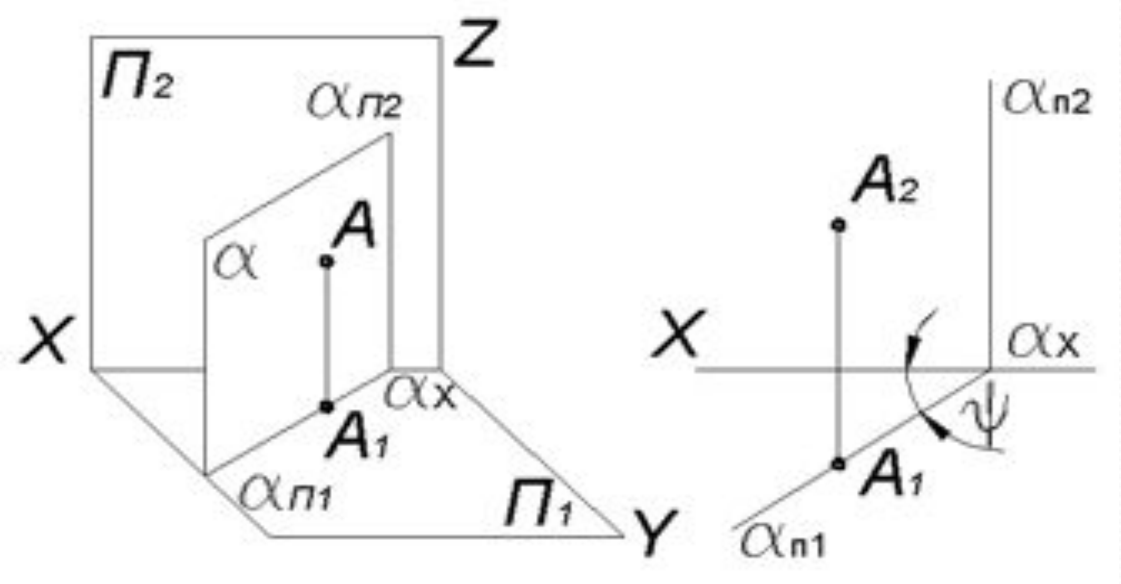
Тема 2.4 **Ортогональный чертеж плоскости**

- Плоскость может быть задана:
- тремя точками α(A,B,C);
- прямой и точкой вне прямой α (AB,C);
- двумя пересекающимися прямыми α(AB∩AC);
- двумя параллельными прямыми α (AB // CD);
- плоской фигурой α(△ABC);
- следами αП1 и αП2 – линиями пересечения плоскости α с плоскостями проекций П1 и П2.
- Всегда можно перейти от одного графического способа задания плоскости к другому способу ее задания.

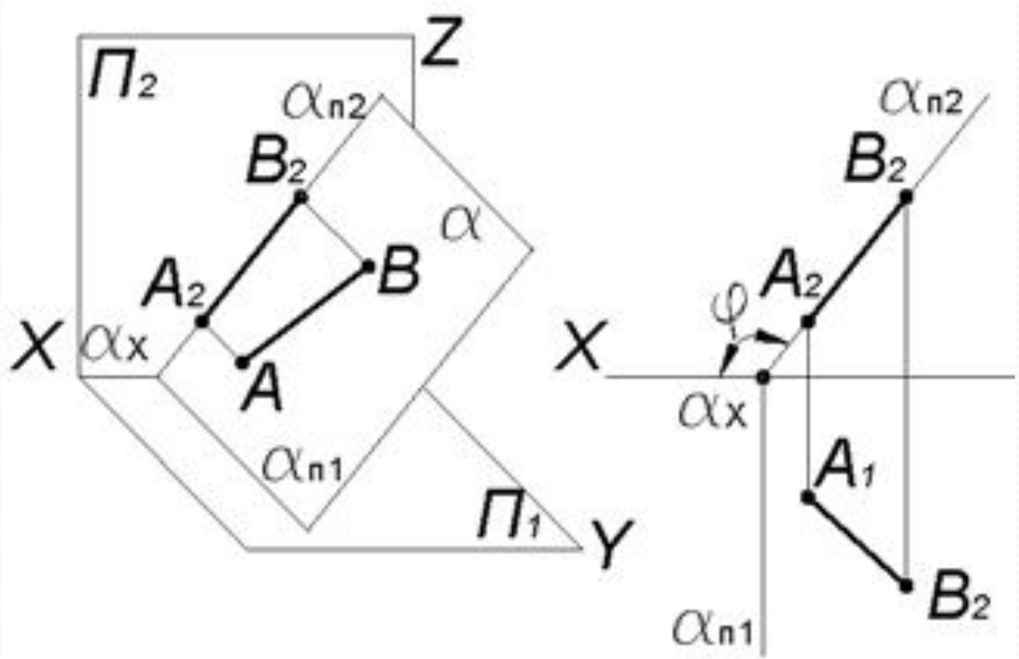


Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

- Плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью **общего положения**.
- **Проецирующие плоскости** – это плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций.
- Плоскость $\alpha \perp П_1$ – **горизонтально проецирующая плоскость** и составляет с фронтальной плоскостью проекций $П_2$ угол ψ
- Точка А, принадлежащая плоскости, имеет горизонтальную проекцию A_1 на горизонтальном следе плоскости. Угол между $\alpha П_1 \wedge OX$ равен натуральной величине угла между плоскостью α и $П_2$.



Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

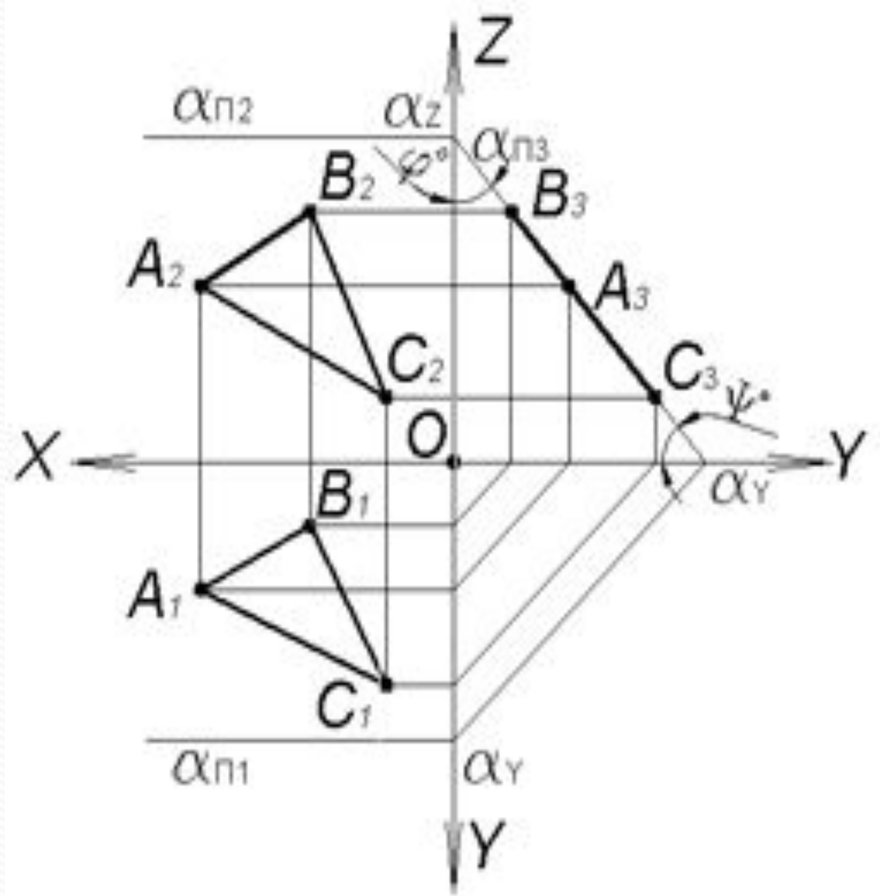


- Плоскость α⊥П2 – **фронтально проецирующая плоскость**, составляет с горизонтальной плоскостью проекций П1 угол ф. Фронтальная проекция A2B2 отрезка AB, расположенного в плоскости, совпадает с фронтальным следом плоскости. Угол между αП2∧OX равен натуральной величине угла между горизонтальной плоскостью проекций П1 и плоскостью α.

$$AB \in \alpha \perp П_2 \Rightarrow A_2B_2 \in \alpha П_2 \wedge \angle \alpha \wedge П_1 = \angle OX \wedge \alpha П_2$$

Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

- Плоскость $\alpha \perp П3$ –**профильно проецирующая плоскость,** составляет с фронтальной плоскостью проекций П1 угол ψ. Профильная проекция A3B3C3 треугольника ABC, принадлежащего плоскости, совпадает с профильным следом αП3 плоскости α

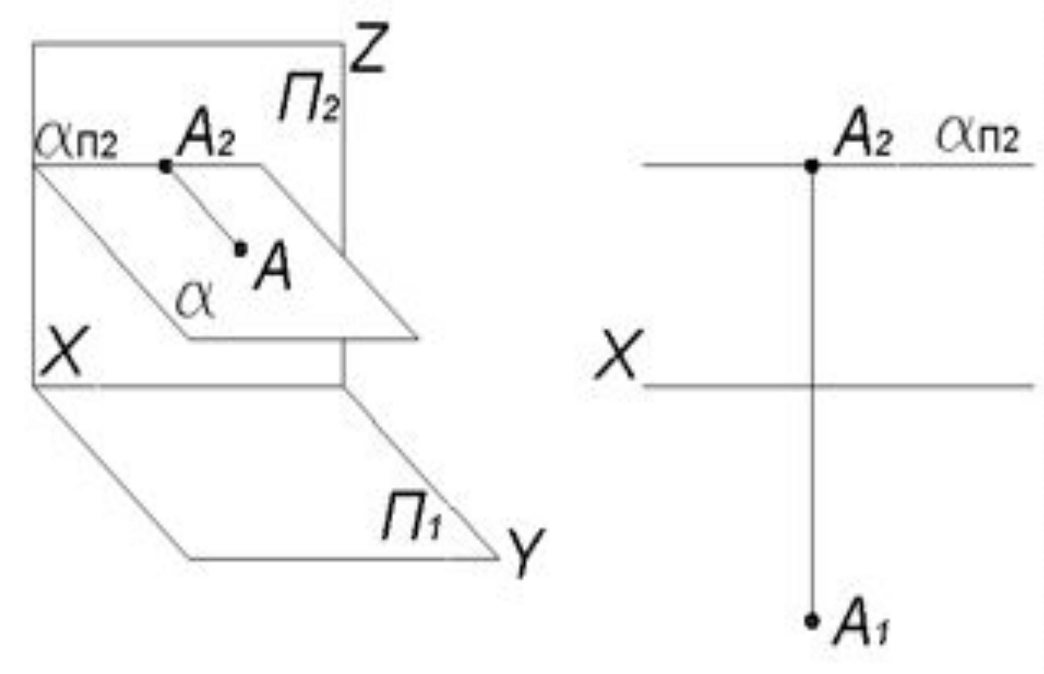


$\triangle ABC \in \alpha \perp П3 \Rightarrow A3B3C3 \in \alpha П3 \wedge \psi = \alpha \wedge П2 = \alpha П3 \wedge OZ\phi = \alpha \wedge П1 = \alpha П3$

Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

- **Плоскости уровня** – плоскости, параллельные плоскостям проекций.
- **Горизонтальная плоскость уровня** – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекции П1. Фронтальный след αП2 параллелен оси координат ОХ. Фронтальная проекция А2 точки А, расположенной в плоскости α, совпадает с фронтальным следом αП2.

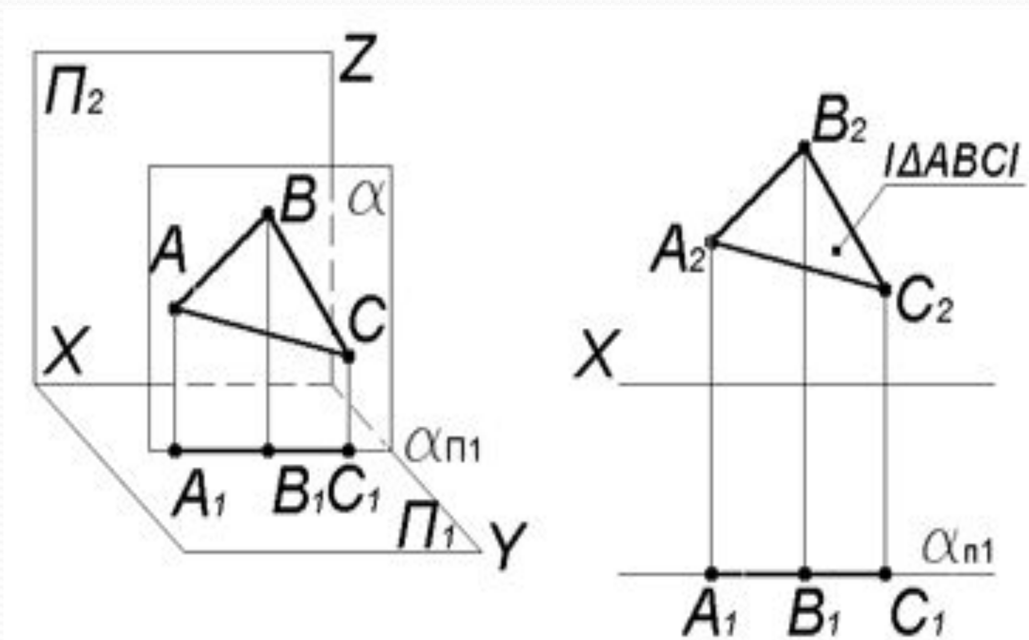
$$A \in \alpha \parallel П_1 \Rightarrow \alpha П_2 \parallel OX \wedge A_2 \in \alpha П_2$$



Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

- **Фронтальная плоскость уровня** – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций. Горизонтальный след $\alpha П_1$ параллелен оси координат OX. Треугольник ABC, принадлежащий плоскости α, проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину, его горизонтальная проекция совпадает с горизонтальным следом плоскости $\alpha П_1$.

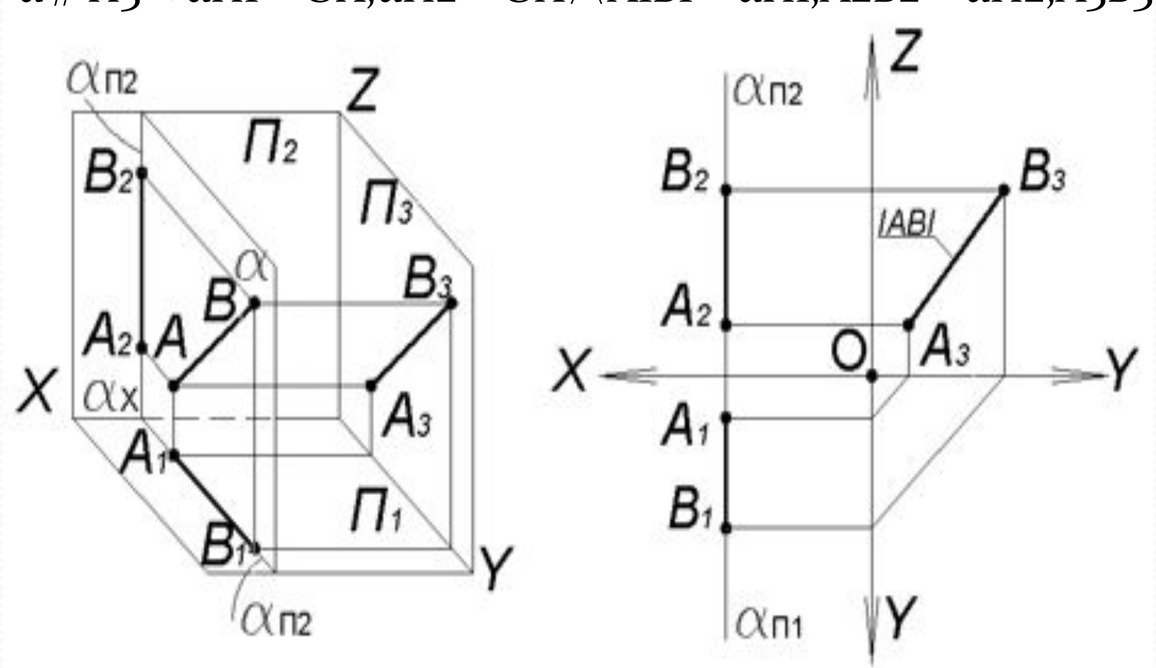
$$\triangle ABC \in \alpha \parallel П_2 \Rightarrow \alpha П_1 \parallel OX \wedge A_1B_1C_1 \in \alpha П_1,\ A_2B_2C_2 = |\triangle ABC|$$



Тема 2.5 Плоскости общего и частного положения

- **Профильная плоскость уровня** – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$. Горизонтальный след плоскости $\alpha П_1$ и фронтальный след плоскости $\alpha П_2$ на ортогональном чертеже совпадают и перпендикулярны оси OX. Отрезок AB, принадлежащий плоскости, проецируется на профильную плоскость проекций в натуральную величину, его горизонтальная проекция совпадает с горизонтальным следом плоскости, а фронтальная проекция отрезка – с фронтальным следом плоскости;

$$AB \in \alpha \parallel П_3 \Rightarrow \alpha П_1 \perp OX, \alpha П_2 \perp OX \wedge A_1B_1 \in \alpha П_1, A_2B_2 \in \alpha П_2, A_3B_3 = |AB|.$$



Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

Точка в плоскости выбирается из условия, что она находится на прямой линии этой плоскости.

Прямая линия принадлежит плоскости при условии, если она проходит:

- через две точки плоскости;
- через точку плоскости параллельно любой прямой этой плоскости.

На рисунке плоскость α задана пересекающимися прямыми AB и BC: $\alpha(AB \cap BC)$.

Точки A и K расположены на прямых, которыми задается плоскость α:

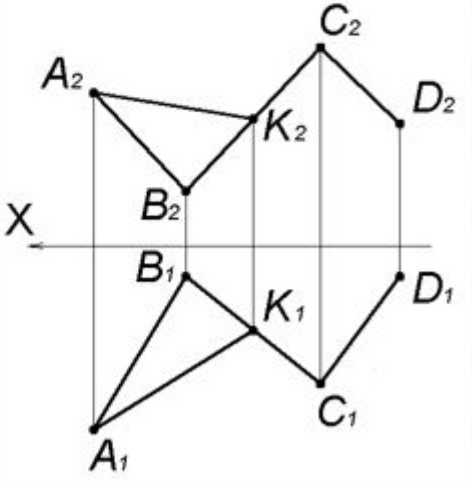
$A \in AB \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha$, $K \in BC \in \alpha \Rightarrow K \in \alpha$

Прямая AK принадлежит плоскости α: $AK \in \alpha$.

Через точку C можно провести прямую CD, параллельную AB.

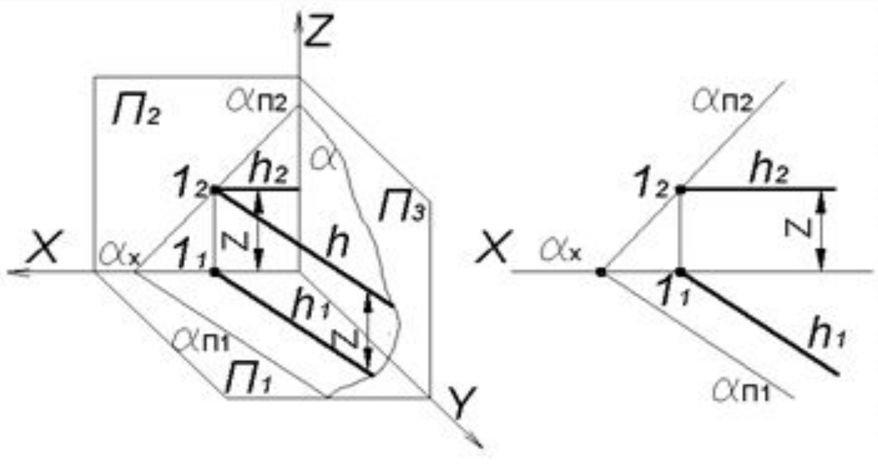
Эта прямая по условию принадлежит плоскости $\alpha(AB \cap BC)$.

$$CD \parallel AB \in \alpha \wedge C \in \alpha \Rightarrow CD \in \alpha$$



Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

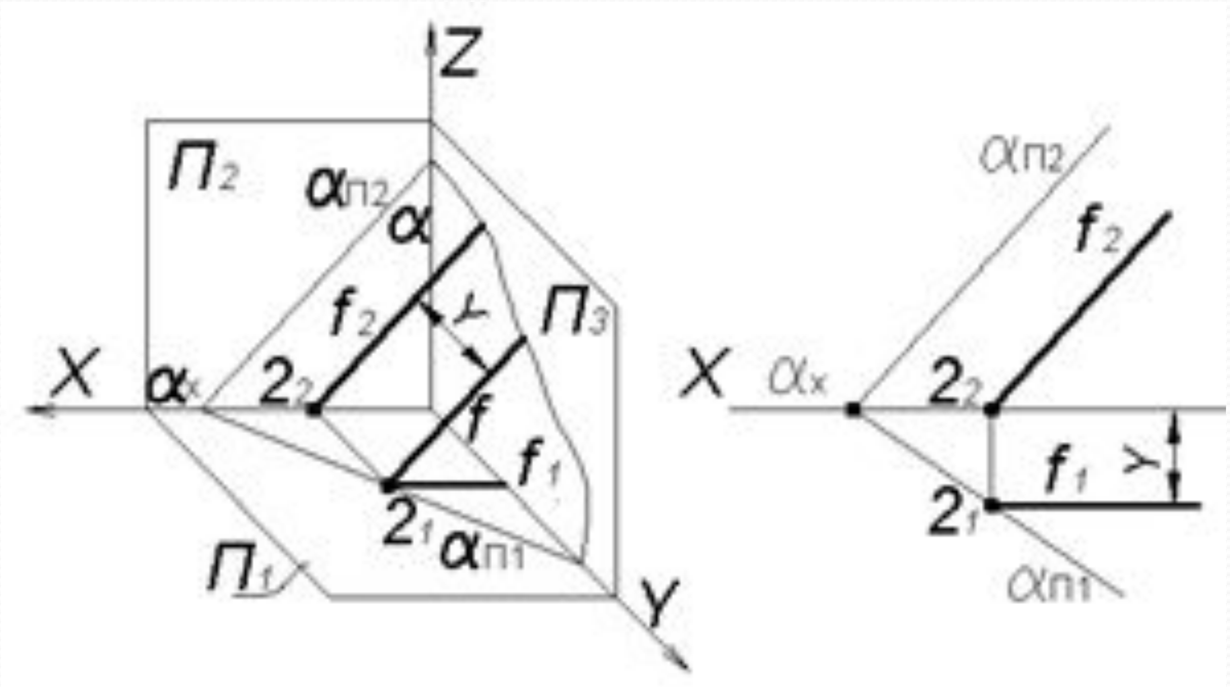
- К **главным линиям плоскости** относят линии уровня плоскости, параллельные плоскостям проекций, и линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций.
- **Горизонталь плоскости** – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций П1.



Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси OX.
Фронтальный след горизонтали принадлежит фронтальному следу плоскости α.
Горизонтальный след плоскости αП1 называется **нулевой горизонталью** (Z=0).
На рисунке показана горизонталь плоскости $\alpha \perp$ П1.

Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

- **Фронталь плоскости** – прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций П2.



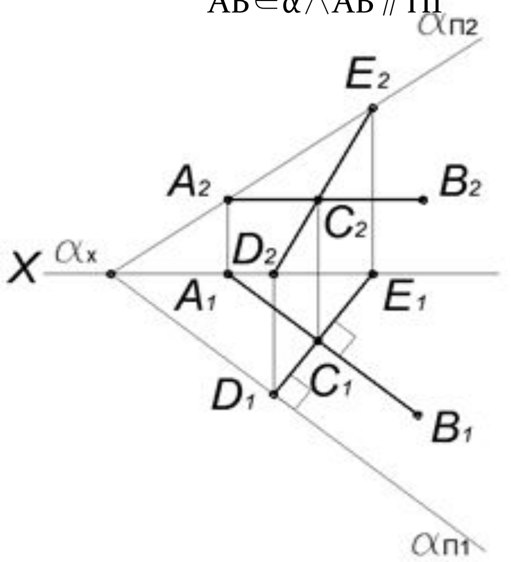
Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

- **Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций** П1**(линия ската)** – прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная *горизонтали* плоскости.
- **Линия наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций** П2 – прямая, принадлежащая плоскости и перпендикулярная *фронтали* плоскости.

$D_1E_1 \perp A_1B_1 \wedge D_1E_1 \perp \alpha_{П_1}$, $D_2 \in OX \wedge E_2 \in \alpha_{П_2}$.

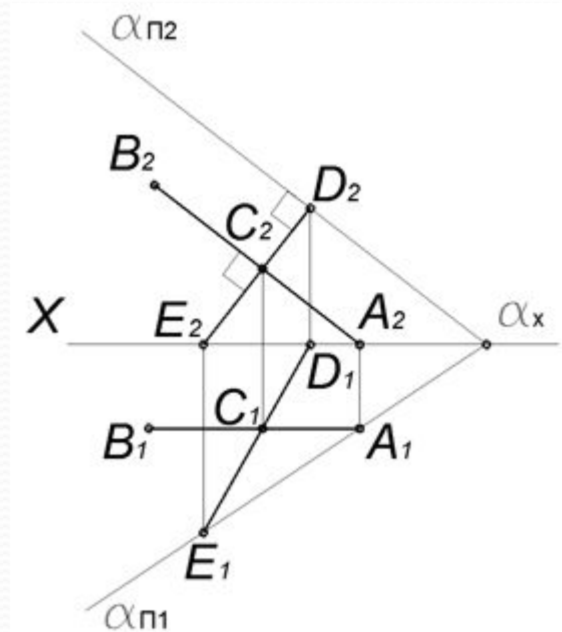
В плоскости α общего положения проведены произвольные горизонталь – AB и линия ската – DE:

$AB \in \alpha \wedge AB \parallel П1$



В плоскости общего положения проведены произвольно фронталь AB и линия наибольшего наклона плоскости α к П2 – DE.

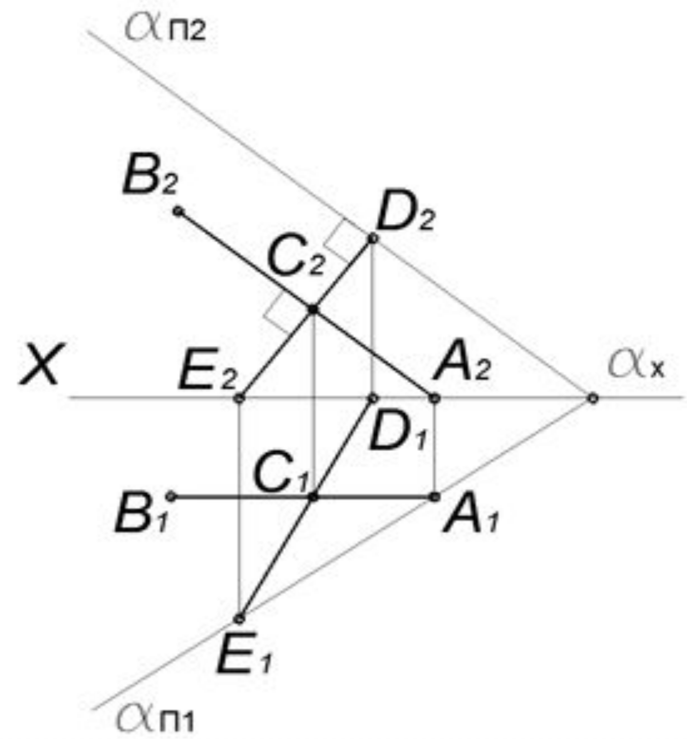
$AB \in \alpha \wedge AB \parallel П2$, $DE \in \alpha \wedge DE \perp AB$.



Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

- Горизонтальная проекция A_1B_1 фронтали AB параллельна оси координат OX, фронтальная проекция A_2B_2 параллельна фронтальному следу плоскости $\alpha П_2$:
- Прямой угол между фронталью и линией наибольшего наклона плоскости α к $П_2$ проецируется без искажения на фронтальную плоскость проекций $П_2$.
- Горизонтальная проекция линии наибольшего наклона D_1E_1 строится как недостающая проекция из условия принадлежности плоскости

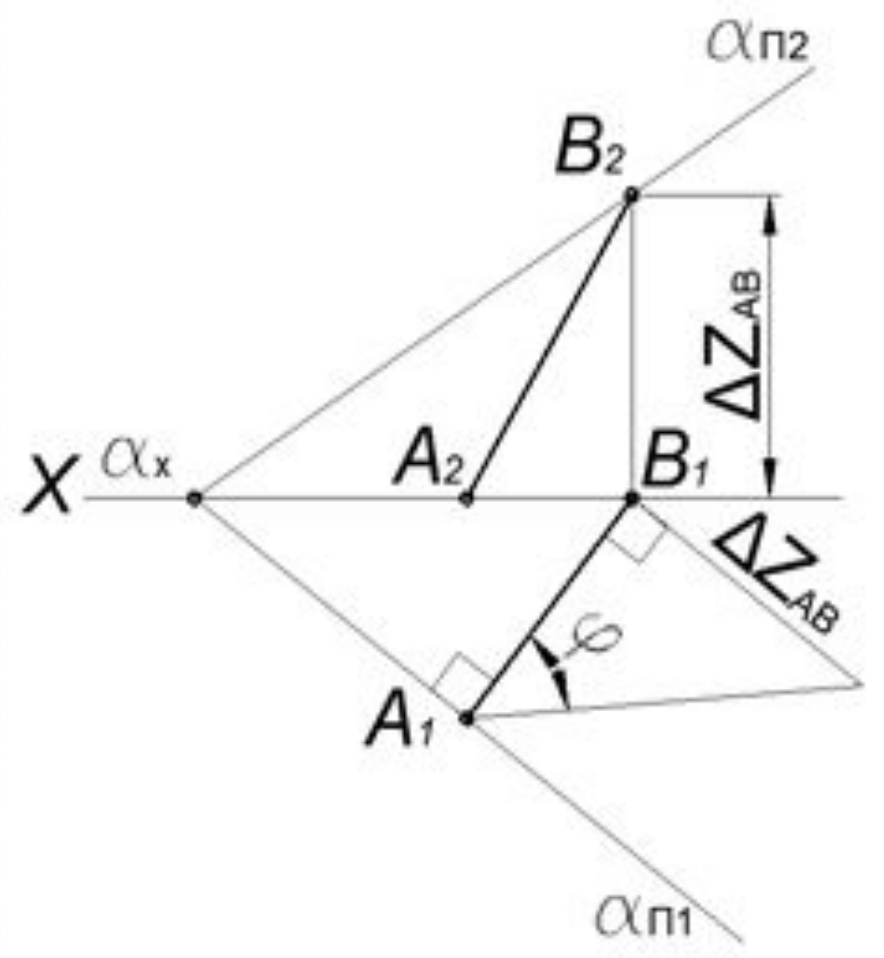
$$\alpha: D_2E_2 \perp A_2B_2 \wedge D_2E_2 \perp \alpha П_2, D_1 \in \alpha П_1 \wedge E_1 \in OX$$



- Главным свойством линии ската является то, что она образует с горизонтальной плоскостью проекций $П_1$ угол ϕ, равный углу наклона плоскости α к плоскости

Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

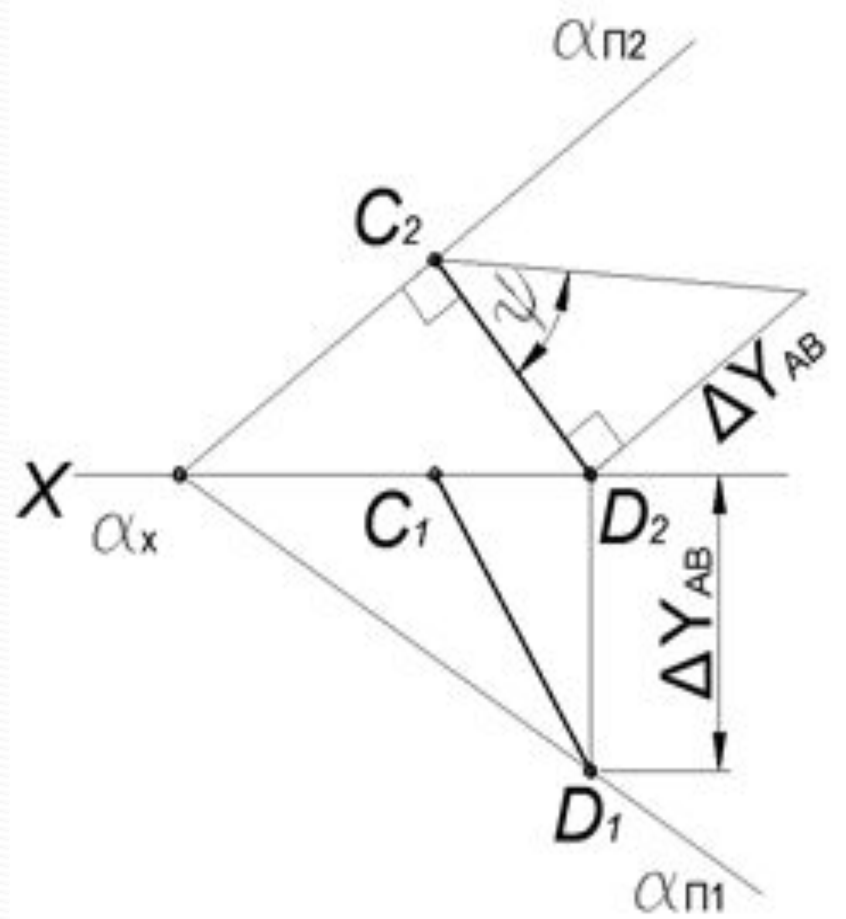
- На рисунке использован способ прямоугольного треугольника для определения
  $\phi=(1-2)\wedge П1=\alpha\wedge П1.$



Тема 2.6 Принадлежность точки и линии плоскости. Главные (особые) линии плоскости

- Линия наибольшего наклона плоскости α к П2 наклонена к плоскости проекций П2 под углом ψ, равным углу наклона плоскости α к плоскости проекций П2.
- На рисунку использован способ прямоугольного треугольника для определения

$$\psi=(3\text{–}4)\wedge П2=\alpha\wedge П2.$$



Раздел 3 Позиционные задачи

- Тема 3.1 Пересечение прямой линии с плоскостью
- Тема 3.2 Пересечение плоскостей
- Тема 3.3 Прямые и плоскости, параллельные плоскости
- Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

Тема 3.1 Пересечение прямой линии с плоскостью

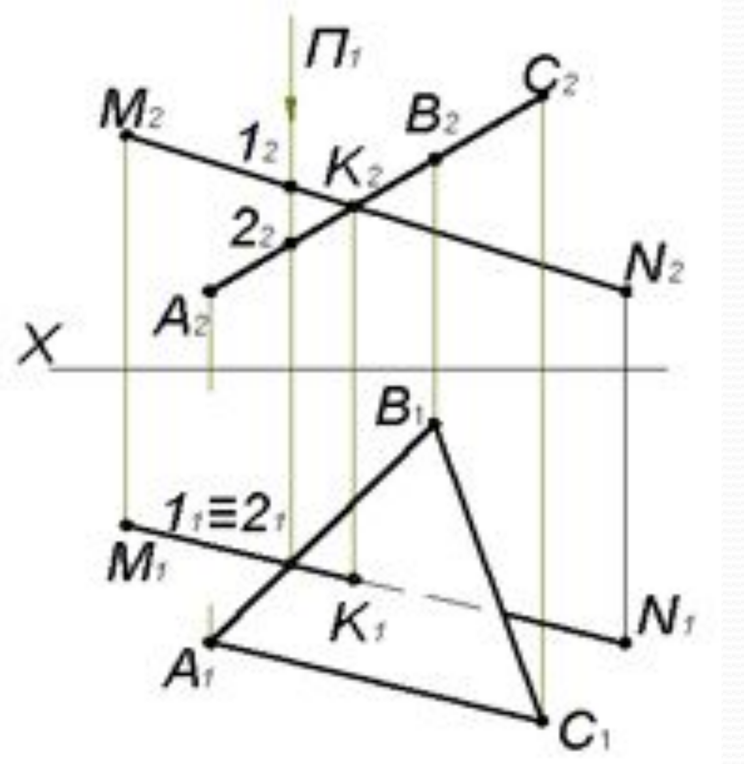
- **Позиционные задачи** это такие задачи, в результате решения которых можно получить ответ на вопрос о взаимной принадлежности заданных геометрических фигур.
  Решение позиционных задач, в конечном счете сводится к установлению принадлежности точки и линии.

- Все многообразие позиционных задач может быть отнесено к трем группам:
  1) задачи на построение линии пересечения двух поверхностей;
  2) задачи на определение точек пересечения линии с поверхностью;
  3) задачи на принадлежность точки поверхности.

Тема 3.1 Пересечение прямой линии с плоскостью

- Рассмотрим пересечение отрезка прямой MN общего положения с фронтально проецирующей плоскостью

$\triangle ABC \perp \Pi_2$, $\triangle ABC \cap MN = K - ?$



На комплексном чертеже фронтальная проекция K_2 точки пересечения определяется как точка пересечения вырожденной фронтальной проекции плоскости треугольника с фронтальной проекцией M_2N_2 отрезка MN. Горизонтальная проекция K_1 точки К находится по условию принадлежности $K \in MN$, по линии проекционной связи на горизонтальной проекции M_1N_1 прямой MN.
Видимость горизонтальной проекции M_1N_1 отрезка определяется методом конкурирующих точек 1 и 2, расположенных на одном горизонтально проецирующем луче

$1 \in MN$, $2 \in AB$, $Z_1 > Z_2 \rightarrow$ отрезок M_1K_1 виден.

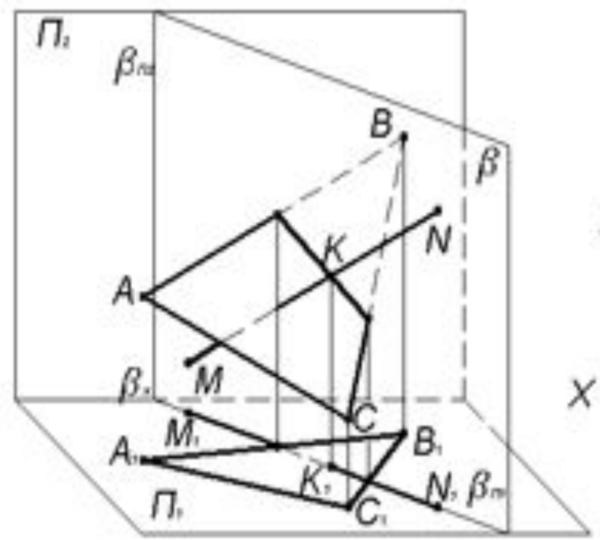
Тема 3.1 Пересечение прямой линии с плоскостью

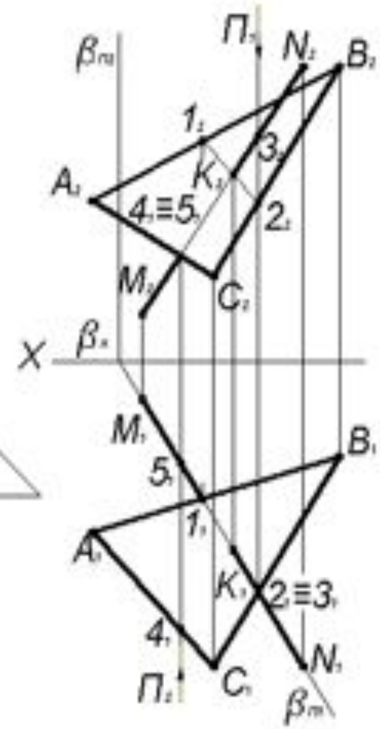
- Определим точку пересечения отрезка прямой общего положения MN с плоскостью △ABC общего положения.

MN∩△ABC=K–?

1. Через прямую проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость β, MN∈β, β⊥П1.
2. Определяем линию пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника ABC: 1–2=△ABC∩β
3. Точка K находится как точка пересечения данного отрезка прямой MN с линией пересечения плоскостей β и △ABC. K=MN∩(1–2).

Видимость отрезка прямой MN определяется по правилу конкурирующих точек. Точка пересечения всегда видима и является границей видимости.
Горизонтально проецирующийся луч пересекает MN в точке 3, а сторону AC в точке 2. Точка 3находится дальше от П1 чем точка 2, следовательно, на П1 участок M1–K1 виден.
Фронтально проецирующий луч пересекает MN в точке 2, а сторону AC в точке 1. Точка 1 находится от плоскости П2 дальше, чем точка 2, поэтому участок K222 не виден на П2.



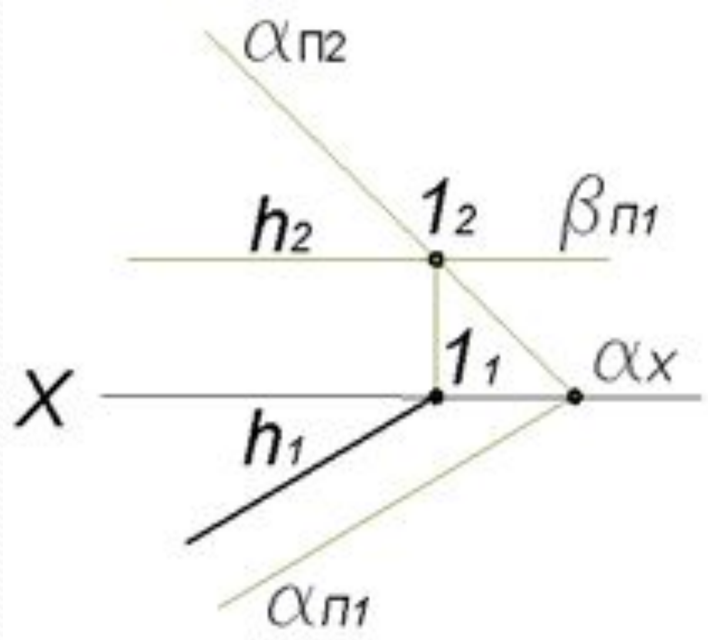


Тема 3.2 Пересечение плоскостей

- Две плоскости пересекаются по прямой линии, которую можно построить по двум их общим точкам.
- **Видимость.** Линия пересечения всегда видима на плоскостях проекций, видимость прямых, расположенных в пересекающихся плоскостях, определяется по конкурирующим точкам.

Частный случай пересечения плоскости общего положения α с горизонтальной плоскостью β. Линия пересечения плоскостей является горизонталью

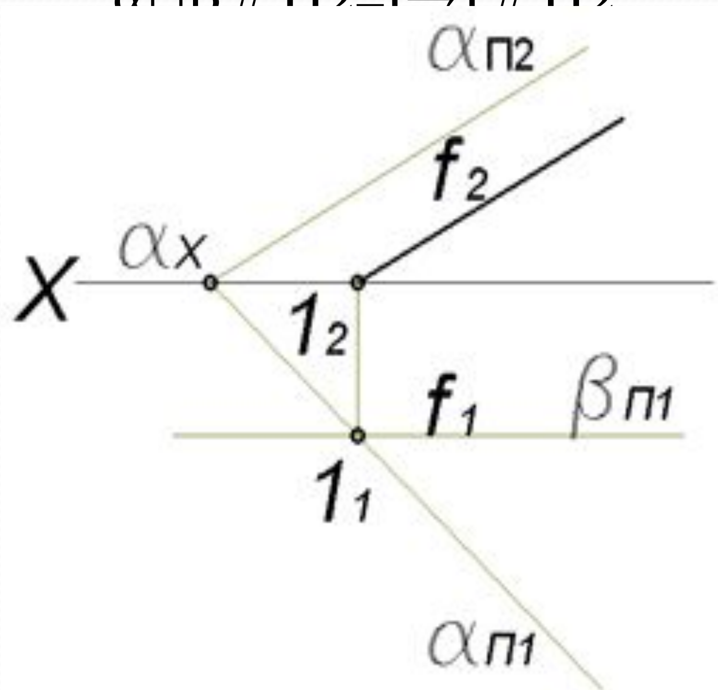
$\alpha \cap \beta \parallel \Pi_1 = h \Rightarrow h \parallel \Pi_1$



Тема 3.2 Пересечение плоскостей

- Если одна из пересекающих плоскостей параллельна фронтальной плоскости проекций П2, то линия пересечения также параллельна фронтальной плоскости проекций:

$$\alpha \cap \beta \parallel П_2 = f \Rightarrow f \parallel П_2$$

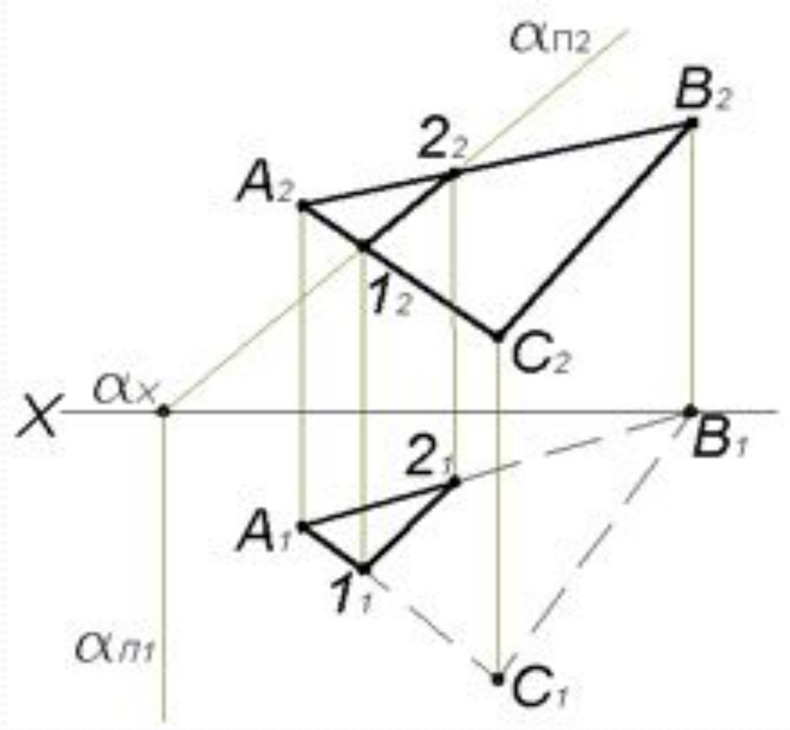


Тема 3.2 Пересечение плоскостей

- Рассмотрим задачу на пересечение фронтально проецирующей плоскости α и плоскости треугольника ABC общего положения.

$$\triangle ABC \cap \alpha \perp П2 = (1–2) – ?$$

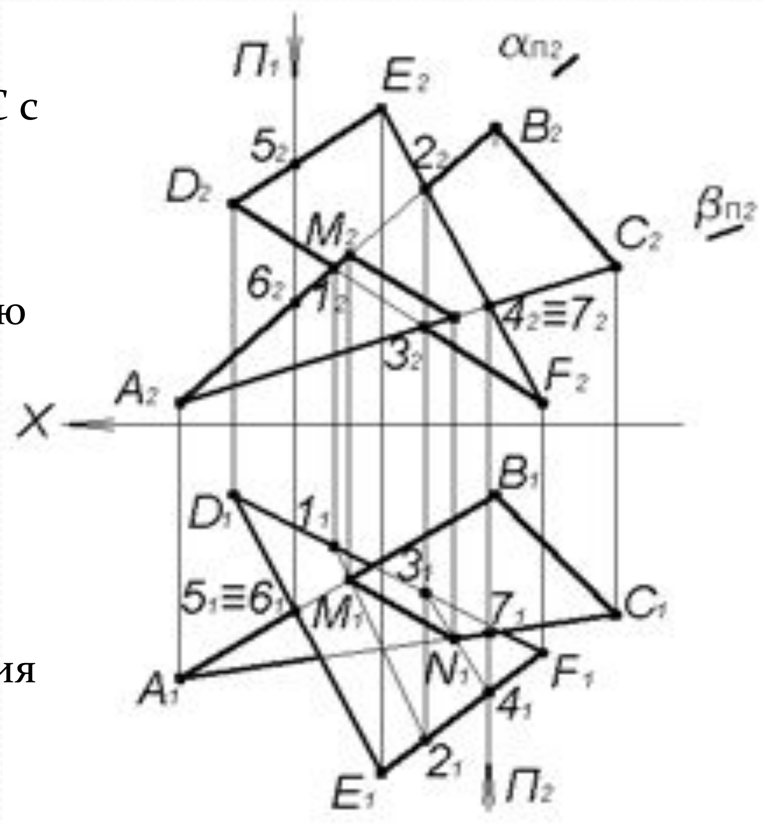
Линия пересечения двух плоскостей – это линия, принадлежащая каждой из них, следовательно, и фронтально проецирующей плоскости α.
Фронтальная проекция линии пересечения плоскостей совпадает с фронтальным следом плоскости
Для построения горизонтальной проекции линии пересечения плоскостей определяем точки 11 и 21 принадлежащие сторонам AC и AB
1∈AC, 2∈AB⇒11∈A1C1, 21∈A1B1
Плоскости α и △ABC считаются непрозрачными при определении видимости, поэтому на горизонтальной проекции видимым является треугольник A11121.
Фронтальная проекция треугольника A2B2C2 видима полностью.



Тема 3.2 Пересечение плоскостей

- **Пример**
- Построить проекции линии пересечения треугольников ABC и DEF. Определить видимость треугольников относительно плоскостей проекций.

Линия пересечения треугольников M–N построена по точкам пересечения сторон AB и AC треугольника ABC с плоскостью другого треугольника.
Для определения точки M пересечения стороны AB с △ABC необходимо:
через сторону AB провести фронтально проецирующую плоскость α;
построить линию пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника DEF;
точка M находится на пересечении линии 1–2 со стороной AB треугольника ABC точка M принадлежит линии пересечения заданных треугольников.
Аналогично определена точка N с помощью проведения вспомогательной фронтально проецирующей плоскости β через сторону AC треугольника ABC.



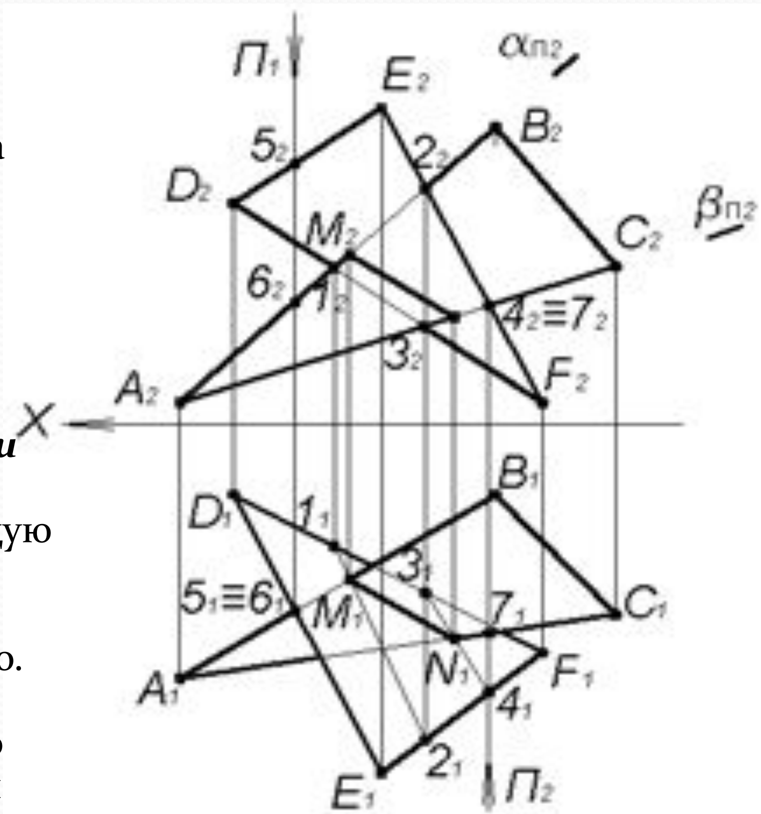
Тема 3.2 Пересечение плоскостей

Видимость треугольников на горизонтальной плоскости проекций

Проведём горизонтально проецирующую прямую, пересекающую стороны AC и DE данных треугольников. Эта проецирующая прямая пересекает DE в точке 5, а AB – в точке 6. Точка 5∈AB дальше отстоит от плоскости проекции П1чем точка 6∈AB. Следовательно, сторона DEв П1 полностью видима, а сторона AB на участке 61–M1 невидима. Этого достаточно для определения видимости в П1, остальных сторон треугольников.

Видимость треугольников на фронтальной плоскости проекций

Проведём фронтально проецирующую прямую, пересекающую стороны EF и AC. Точка 4стороны F конкурирует с точкой 7 стороны AC. Точка 4 более удалена от плоскости проекций П2, чем точка 7, и находится ближе к наблюдателю. Поэтому фронтальная проекция E2F2 полностью видима, а сторона A2C2 на участке N2–72 не видима. Этого достаточно для определения видимости треугольников во фронтальной плоскости проекций.



Тема 3.3 Прямые и плоскости, параллельные плоскости

Прямая параллельна плоскости, если в этой плоскости имеется прямая, параллельная ей.

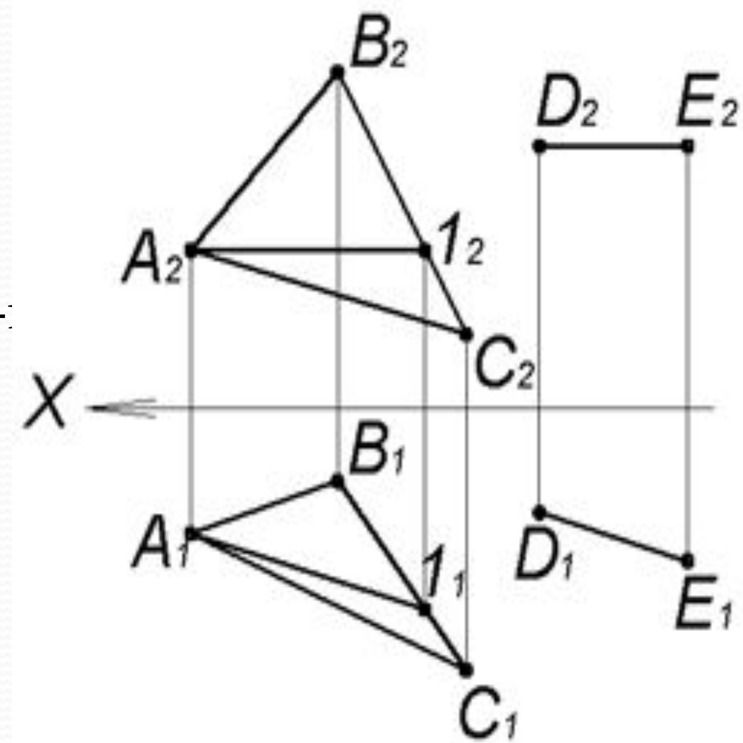
Пример

Через точку A провести отрезок прямой DE, параллельный горизонтали △ABC.

Из вершины A в плоскости треугольника ABC проведем горизонталь A–1

Фронтальная проекция отрезка D_2E_2 параллельна оси OX.

Горизонтальная проекция отрезка D_1E_1 параллельна горизонтальной проекции горизонтали A_11_1.



Тема 3.3 Прямые и плоскости, параллельные плоскости

- **Две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. У параллельных плоскостей одноименные главные их линии параллельны.**

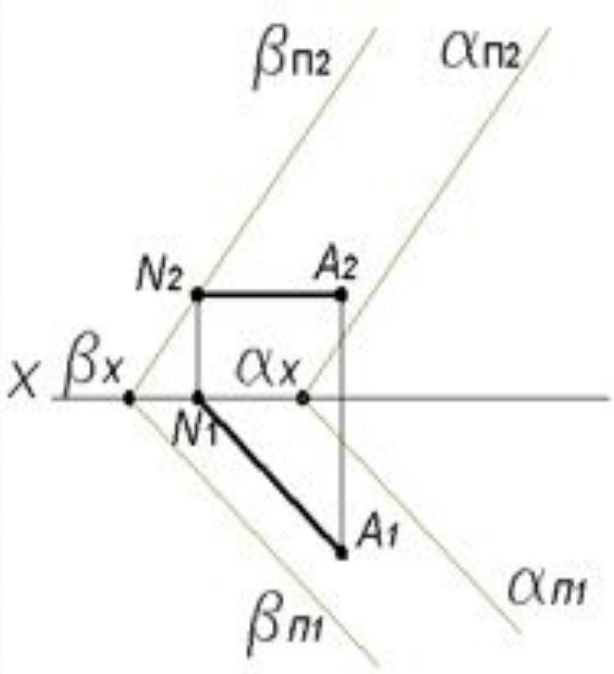
Пример

Через точку A провести плоскость β, параллельную плоскости α, заданной следами.

Чтобы построить плоскость, содержащую точку A и параллельную плоскости α, через точку A проведем одну из главных линий плоскости α например, горизонталь AN, параллельную плоскости α.

Через фронтальный след горизонтали, точку N, проходит фронтальный след плоскости β, βП2 // αП2

Горизонтальный след βП2 // αП1 проходит через точку схода следов βX=βП2∩OX.



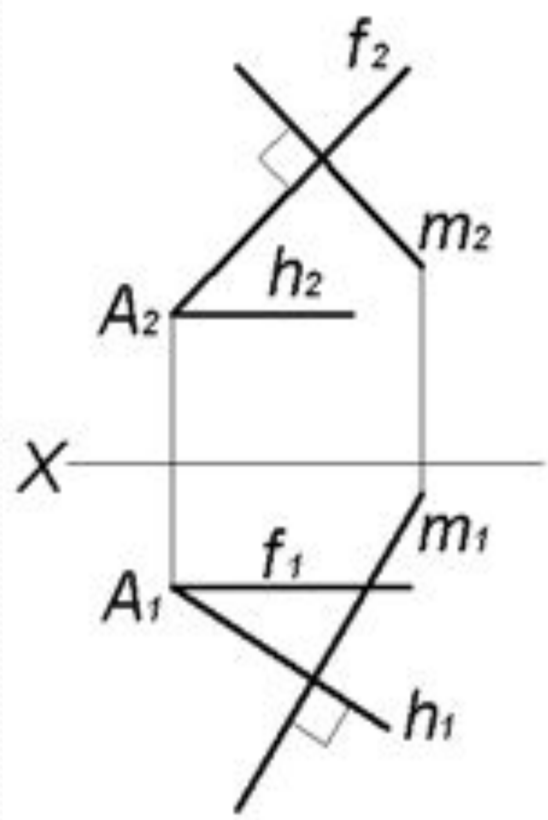
Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

- **Прямая перпендикулярна плоскости**, если она перпендикулярна любым двум пересекающимся прямым этой плоскости.
- Чтобы построить проекции прямой, перпендикулярной плоскости, необходимо воспользоваться теоремой о проекциях прямого угла. Прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны одноименным проекциям горизонтали и фронтали плоскости.

Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

- *Пример.* Провести через точку А плоскость, перпендикулярную заданной прямой m. Плоскость α задать пересекающимися прямыми.
- Через точку А проведем горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы они были перпендикулярны прямой m.

$$h_1 \perp m_1 \wedge f_2 \perp m_2$$

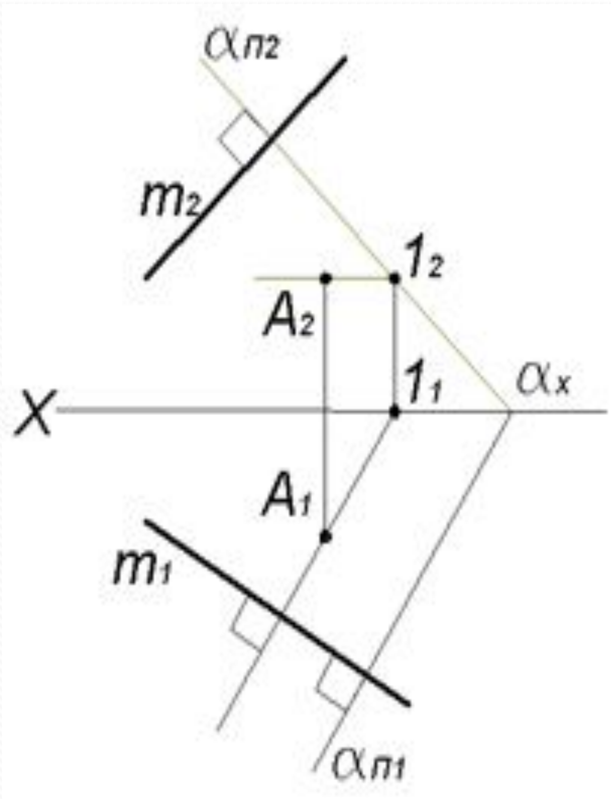


Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

- **Пример**
- Через точку А провести плоскость α, перпендикулярную прямой m. Плоскость α задать следами.
- Через точку А проведем горизонталь А–1 перпендикулярно прямой

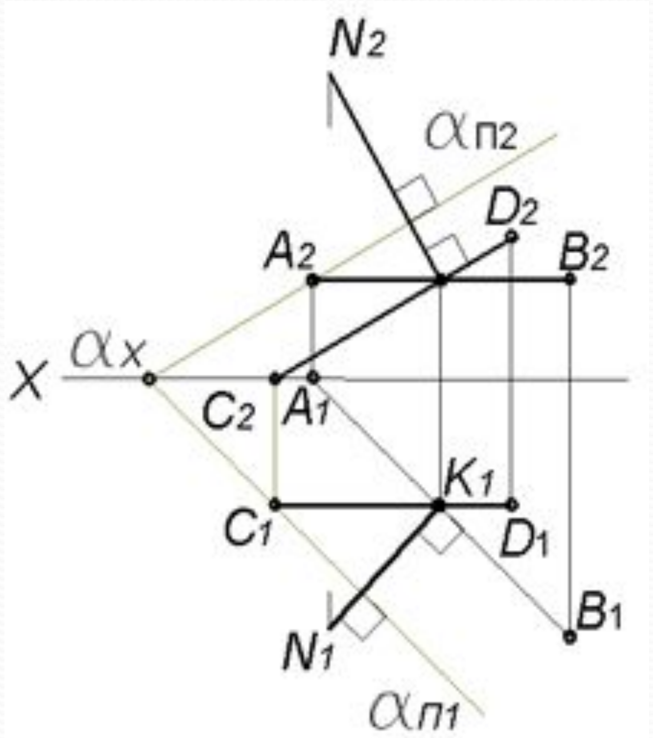
  $A_2–1_2 \parallel OX$, $(A_1–1_1) \perp m_1$
- Через фронтальный след 1_2 горизонтали А–1 проведем перпендикулярно прямой m фронтальный след $\alpha_{П2}$ плоскости. Горизонтальны след $\alpha_{П1}$ плоскости α проходит через точку схода следов плоскости α перпендикулярно горизонтальной проекции прямой m

  $\alpha_{П1} \perp m_1$



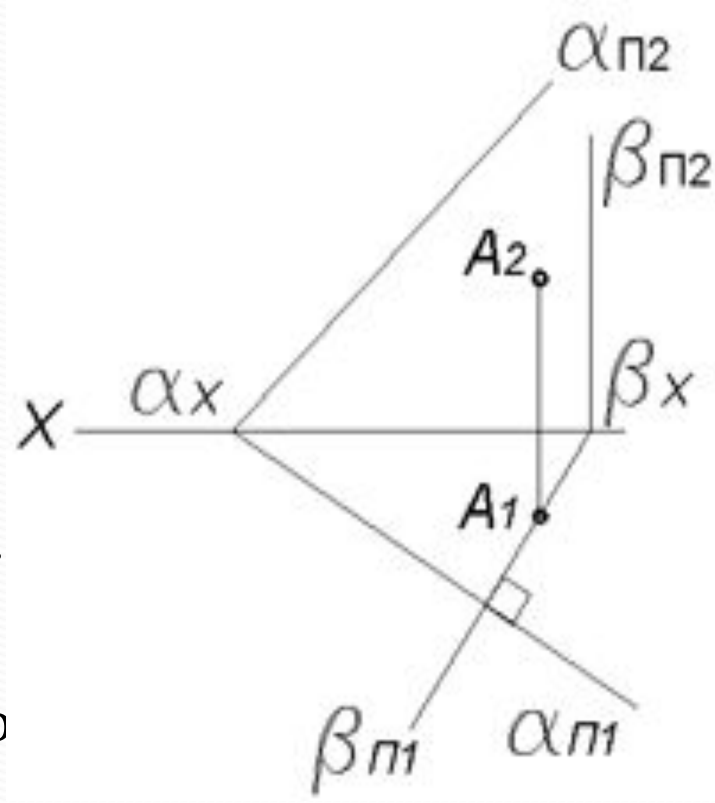
Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

- **Пример**
- Восставить перпендикуляр к плоскости α в данной ее точке K.
- В плоскости α проведем горизонталь AB и фронталь CD. Проекции перпендикуляра к плоскости составляют прямые углы с одноименными проекциями горизонтали и фронтали плоскости α.
- $K_1N_1 \perp A_1B_1 \wedge K_2N_2 \perp C_2D_2$, $K_1N_1 \perp \alpha\Pi_1 \wedge K_2N_2 \perp \alpha\Pi_2$
- Прямая KN перпендикулярна любым прямым этой плоскости.



Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

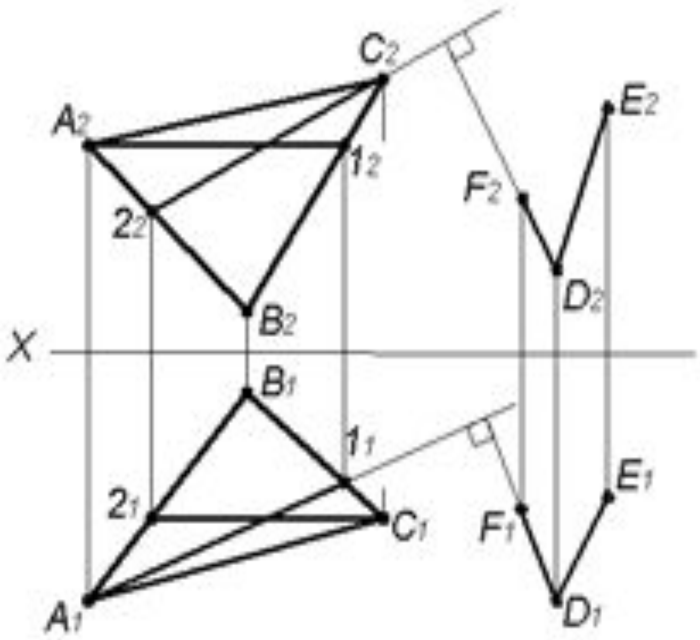
- **Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости.**
- **Пример**
- Через точку А провести горизонтально проецирующую плоскость β перпендикулярную плоскости Плоскость β задать следами.
- Горизонтальный след βП1 плоскости проводим через горизонтальную проекцию А1 точки А перпендикулярно горизонтальному следу αП1



Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

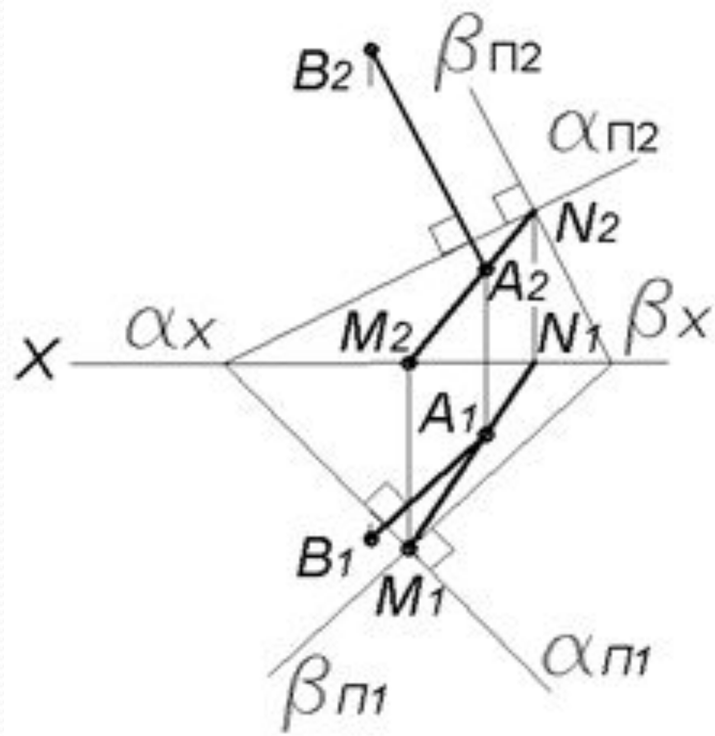
- **Пример**
- Через точку D провести плоскость β, перпендикулярную плоскости ABC. Плоскость задать пересекающимися прямыми DE и DF.

- В плоскости △ABC проведем горизонталь A–1 и фронталь C–2. Отрезок DF построен перпендикулярно плоскости △ABC, поскольку $D_1F_1 \perp A_11_1$, $D_2F_2 \perp C_22_2$. Отрезок DE новой плоскости проведен произвольно.



Тема 3.4 Прямые и плоскости, перпендикулярные плоскости

- **Пример**
- Перпендикулярны ли плоскости, если их следы взаимно перпендикулярны?



Построим линию MN пересечения плоскостей:
$\alpha П_1 \cap \beta П_1 = M_1$, $M_2 \in OX$, $\alpha П_2 \cap \beta П_2 = N_2$, $N_1 \in OX$.
Из точки $A \in MN$ проведем отрезок AB так, чтобы
$A_1B_1 \parallel \beta П_1 \wedge A_2B_2 \parallel \beta П_2$
Отрезок $AB \perp \alpha$,
поскольку $A_1B_1 \perp \alpha П_1 \wedge A_2B_2 \perp \alpha П_2$, но он не принадлежит плоскости β.
Поэтому плоскости α и β не перпендикулярны друг другу.

Раздел 4. Способы преобразования чертежа. Метрические задачи

- Тема 4.1 Замена плоскостей проекций
- Тема 4.1.1 Замена фронтальной плоскости проекций
- Тема 4.1.2 Замена горизонтальной плоскости проекций
- Тема 4.2 Плоскопараллельное перемещение
- Тема 4.3 Вращение вокруг проецирующих прямых
- Тема 4.4 Вращение вокруг прямых уровня
- Тема 4.5 Совмещение

Раздел 4. Способы преобразования чертежа. Метрические задачи

Рассматривают два способа преобразования:

- способ замены плоскостей проекций.
- способ вращения.

Вращение выполняют:

- без указания осей (способ плоскопараллельного перемещения);
- вокруг проецирующих прямых;
- вокруг горизонтали или фронтали плоскости;
- вокруг следа плоскости (способ совмещения).

При решении задач *способом замены плоскостей* проекций положение геометрических объектов не изменяется. Изменяется положение плоскостей проекций, чтобы при новых условиях проецирования эти геометрические объекты имели бы частное положение. Направление проецирования или остается ортогональным, или изменяется.

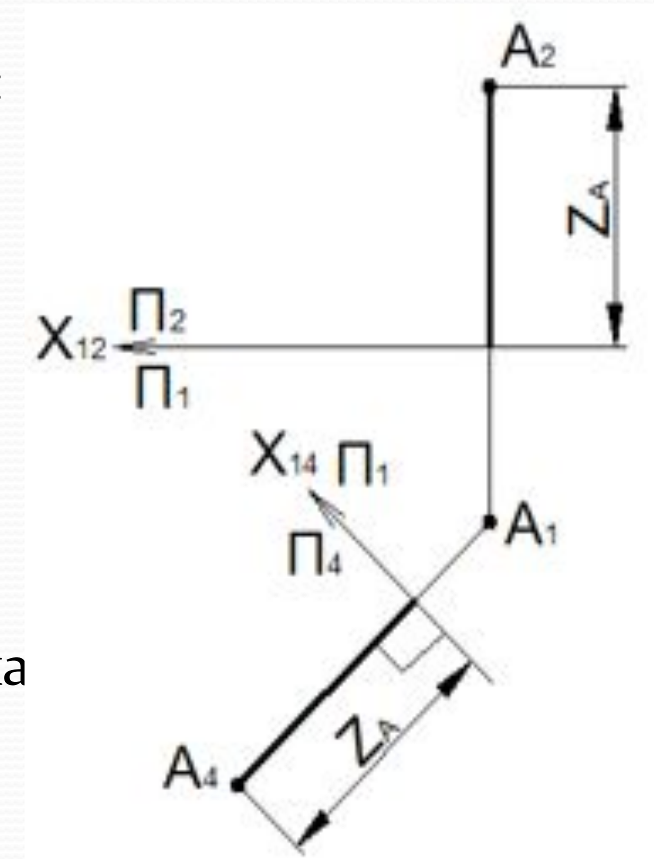
При решении задач *способом перемещения (вращения)* положение плоскостей проекций и направление проецирования не изменяются. Геометрические объекты перемещаются в пространстве до принятия частного положения по отношению к данной системе плоскостей проекций.

Тема 4.1 Замена плоскостей проекций

- Сущность способа заключается в следующем:
- Положение геометрического объекта не меняется по отношению к старой системе плоскостей проекций.
- Новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций выбирается так, чтобы рассматриваемый геометрический объект оказался бы в частном положении по отношению к одной из плоскостей новой системы.
- Направление проецирования сохраняется ортогональным.
- На рисунках показаны схемы построения новых (дополнительных) проекций точек A и B.
- В системе плоскостей проекций П2 ⊥ П1 заданы точки A(A1,A2) и B(B1,B2). Введены новые плоскости: П4 ⊥ П)1 и П5 ⊥ П2.

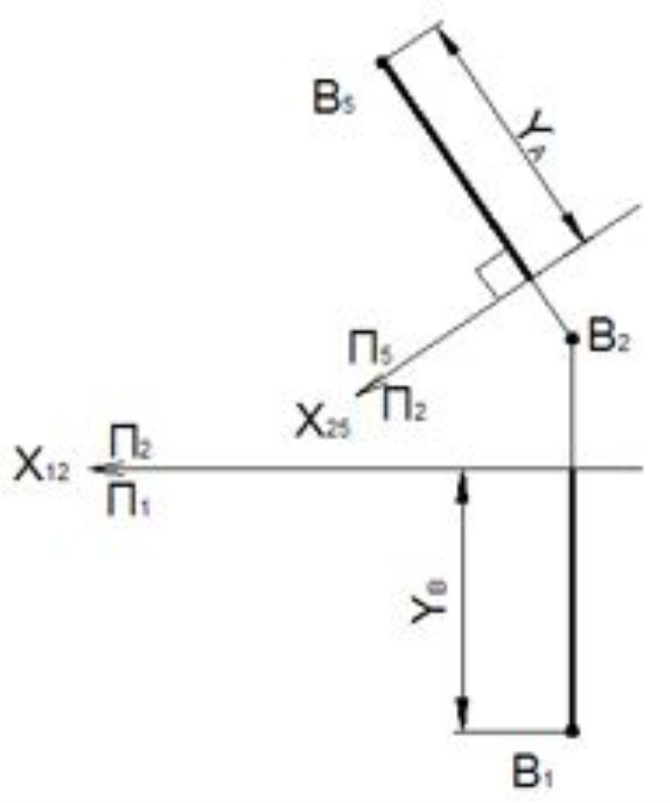
Тема 4.1.1 Замена фронтальной плоскости проекций

- Расстояние от точки А до плоскости П1 при замене не меняется:
- ZA=const, A1=const.
  Проекция А4 точки А на плоскость П4находится на линии проекционной связи, перпендикулярной дополнительной оси Х14, на расстоянии ZA от нее, равном расстоянию от точки А до плоскости проекций П1.
  ZA определяется из основного чертежа как расстояние от проекции А2 до оси Х12.



Тема 4.1.1 Замена горизонтальной плоскости проекций

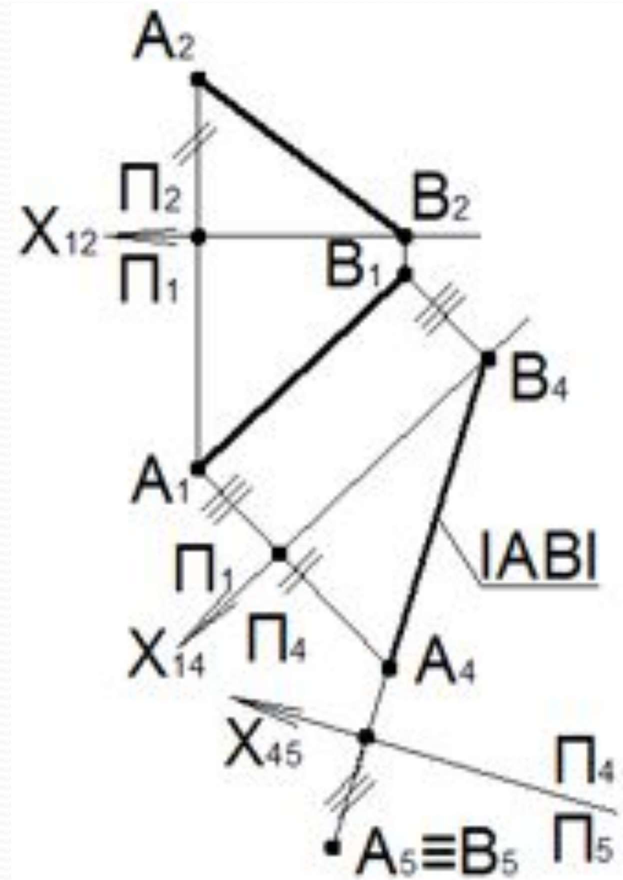
- Расстояние от точки B до неизменной плоскости проекций П2 не изменяется: YB=const, B2=const.
- Проекция B5 точки B на плоскость П5 находится на линии проекционной связи, перпендикулярной новой оси координат X25, на расстоянии YA от нее.
- Замена одной из плоскостей проекций не всегда приводит к решению задачи. Иногда приходится заменять две и более плоскостей проекций.



Тема 4.1 Замена плоскостей проекций

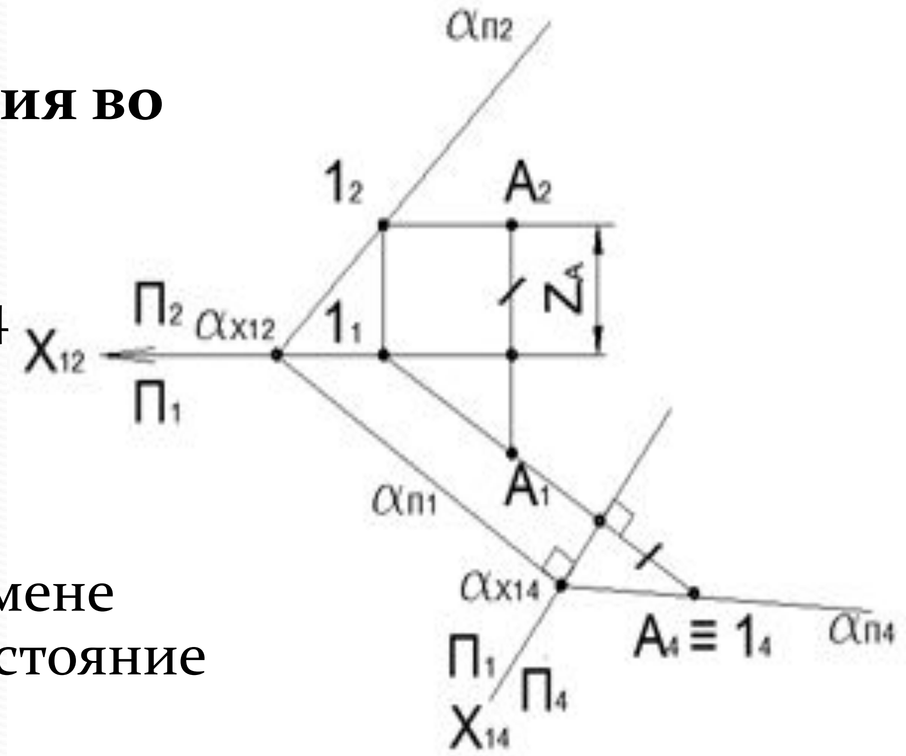
Рассмотрим перевод прямой АВ общего положения в проецирующее положение

- Выполняется последовательная замена двух плоскостей проекций.
- *Первая замена*
- Новая системе плоскостей П1⊥П4.
- П4 // АВ⇒А4В4=|АВ|
- На комплексном чертеже ось координат Х14 // А1В1.
- Линии проекционной связи проводятся перпендикулярно оси Х14. При замене плоскости П2 на плоскость П4 расстояние всех точек прямой АВ до плоскости П1 (координата Z) не изменилось, поэтому расстояние проекций точек А4 и В4 от оси Х14 равно расстоянию проекций точек А2 и В2 от оси Х14.
- В заданной системе плоскостей одновременно можно заменять только одну плоскость.
- *Вторая замена*
- Новая системе плоскостей П4⊥П5.
- П5⊥АВ⇒А5≡В5
- Линии проекционной связи проводятся перпендикулярно оси Х45. При замене плоскости П1 на плоскость П5 расстояние всех точек прямой АВ до плоскости П4 не изменилось, поэтому расстояние проекций точек А5 и В5 от оси Х45 равно расстоянию проекций точек А1 и В1 от оси Х45.

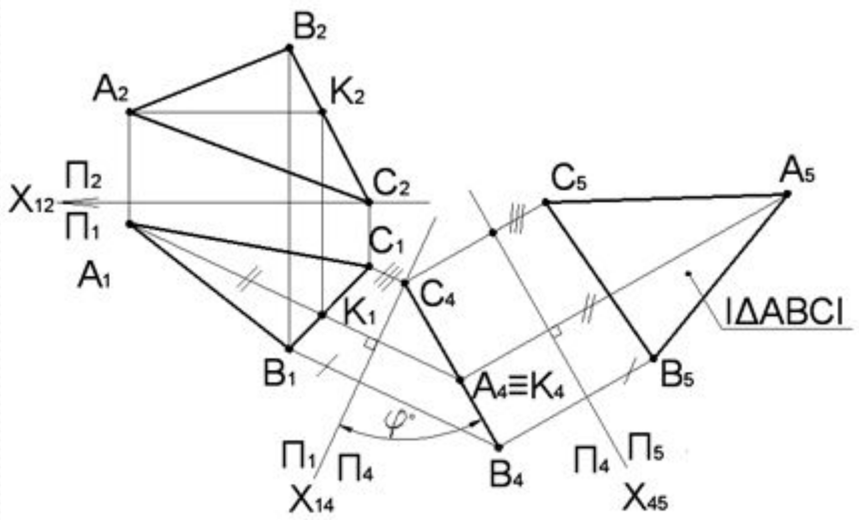


Тема 4.1 Замена плоскостей проекций

- **Рассмотрим перевод плоскости α общего положения во фронтально проецирующее положение**
- Новая система плоскостей П1⊥П4
- П4⊥α⇒X14⊥αП1∧X14⊥(11–A4)
- Линия проекционной связи A1–A4 проводится перпендикулярно оси X14. При замене плоскостиП2 на плоскость П4 расстояние точки, принадлежащей плоскости α, A∈α, до плоскости П1(ZA)не изменилось, поэтому расстояние проекций точек A4 и 14 от оси X14 равно расстоянию проекций точек A2 и 12 от оси X12.



Тема 4.1 Замена плоскостей проекций



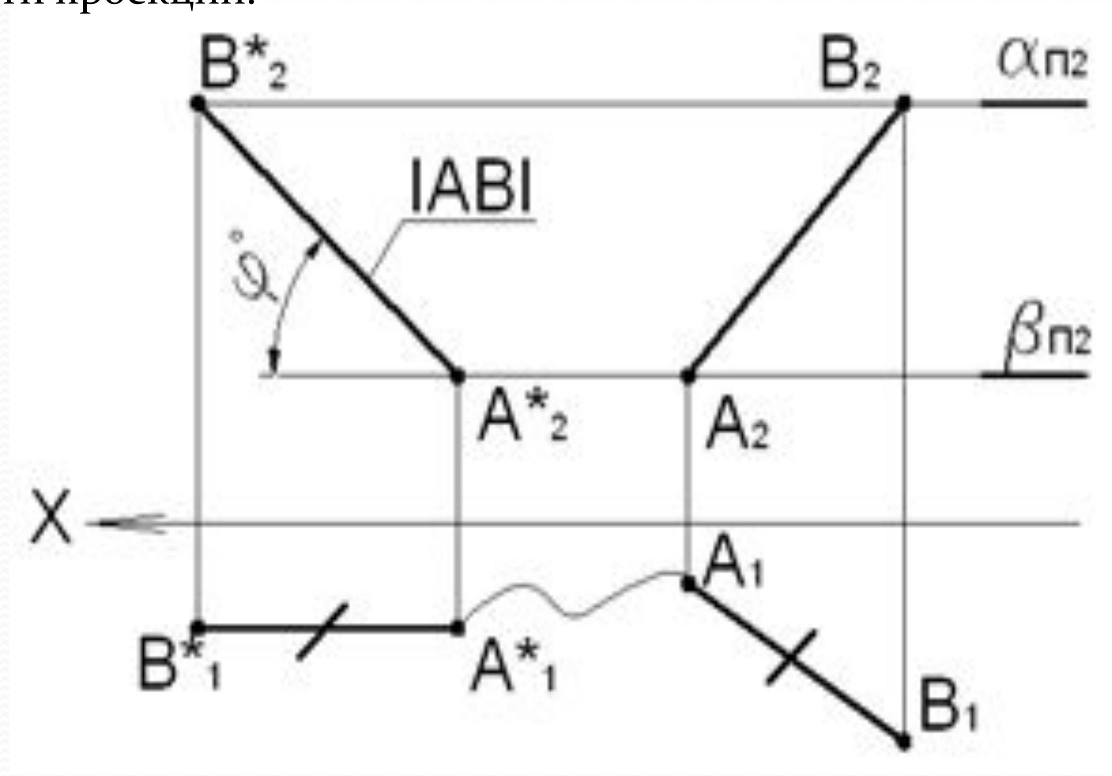
- **Пример**
- Найти натуральную величину треугольника АВС и угол наклона его плоскости к горизонтальной плоскости проекций Π_1.
- Выберем новую плоскость проекций Π_4, перпендикулярную плоскости треугольника АВС, а на комплексном чертеже – перпендикулярную горизонтали АК плоскости треугольника:

$$\Pi_4 \perp \triangle ABC,\ \Pi_4 \perp AK,\ AK \in \triangle ABC,\ AK \parallel \Pi_1$$

- Проводим новую ось координат X_{14} перпендикулярно A_1K_1: $X_{14} \perp A_1K_1$
- Имеем систему взаимно перпендикулярных плоскостей $\Pi_1 \perp \Pi_4$. Плоскость $\triangle ABC$ по отношению к плоскости Π_4 будет проецирующей. Проводим линии проекционной связи от точек A_1, B_1, C_1 и откладываем координаты Z вершин треугольника от новой оси X_{14}, получаем проекции точек A_4, B_4, C_4. Проекция треугольника АВС на Π_4 – прямая C_4B_4, составляющая с осью X_{14} угол, равный натуральной величине угла между плоскостью треугольника и Π_1 – угол ф.
- Чтобы найти натуральную величину треугольника заменяем плоскость Π_1. Вводим новую плоскость Π_5, параллельную плоскости треугольника. Параллельно вырожденной проекции треугольника C_4B_4 проводим новую ось X_{45}. На линиях проекционной связи отложим от новой оси отрезки, равные расстояниям от заменяемых проекций вершин $A_1B_1C_1$ до заменяемой оси X_{14}. $A_5B_5C_5 = |\triangle ABC|$.

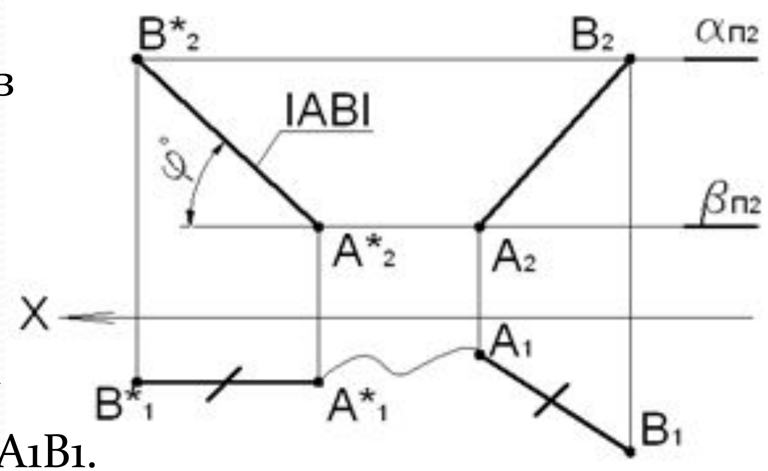
Тема 4.2 Плоскопараллельное перемещение

- Плоскопараллельным перемещением в пространстве называется такое перемещение, при котором все точки геометрической фигуры перемещаются во взаимно параллельных плоскостях без изменения вида и размеров этой фигуры. При перемещении величины проекций не изменяются, следовательно, сохраняется угол наклона геометрической фигуры (прямых, плоскостей) к данной плоскости проекций.



Тема 4.2 Плоскопараллельное перемещение

- Перемещением переводим отрезок прямой AB в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций П2. Для этого в произвольном месте чертежа горизонтальную проекцию A1B1 отрезка AB располагаем горизонтально, параллельно оси координат OX



A*1B*1 // OX, A*1B*1=A1B1.

Точки A и B отрезка перемещаются соответственно в горизонтальных плоскостях α и β:

A∈α∧α // П1, B∈β∧β // П1.

Фронтальные проекции A2 и B2 точек A и B перемещаются по αП2 и βП2.

ZA=const, ZB=const.

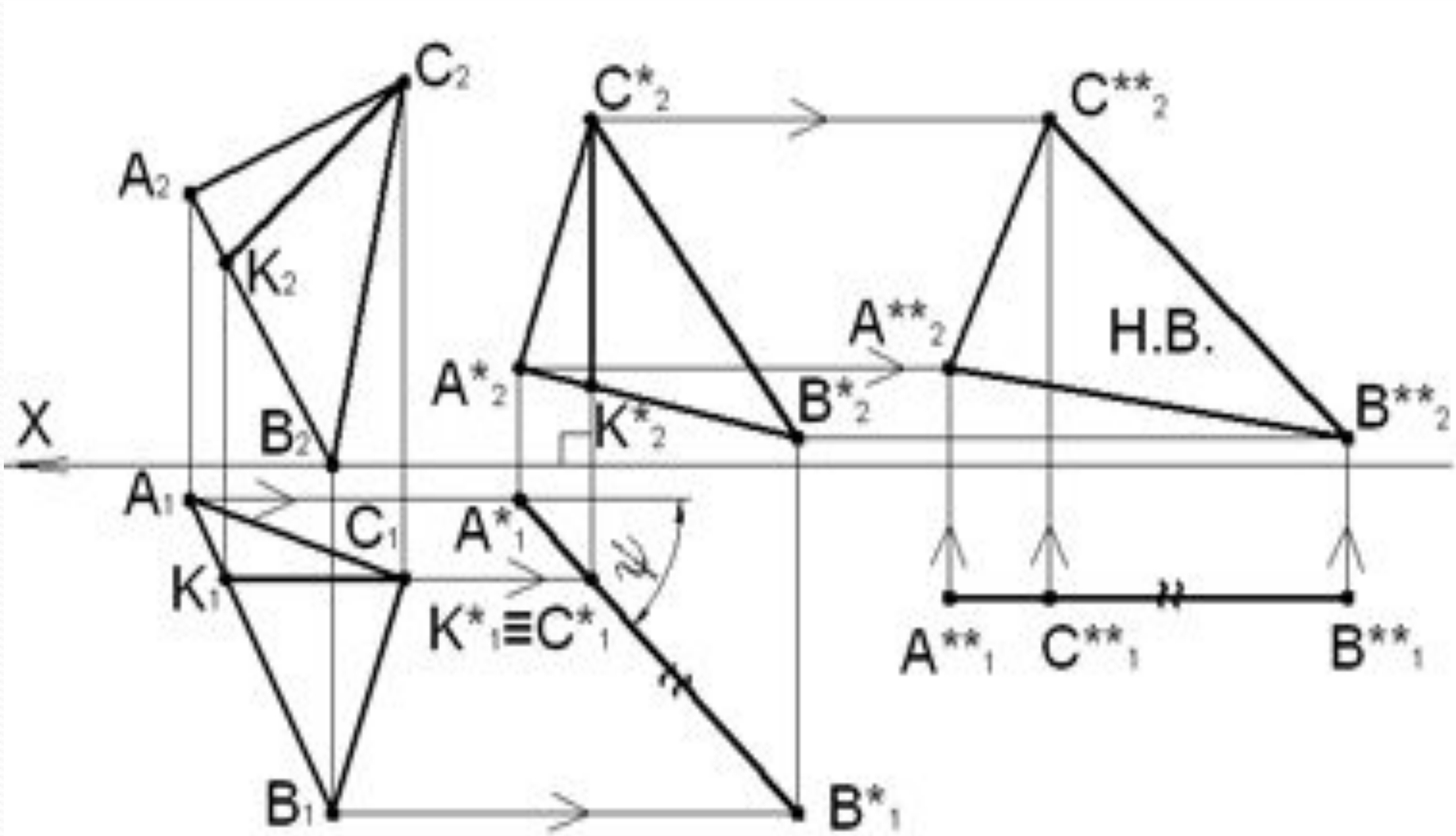
Фронтальные проекции A2* и B2* перемещенных точек A* и B* находятся в проекционной связи с проекциями A*1 и B*1.

A*2B*2 – новая фронтальная проекция отрезка AB:A*2B*2=|AB|. Угол наклона A*2B*2 к оси OXявляется натуральной величиной угла наклона отрезка AB к плоскости проекций П1:

A*2B*2∧OX=AB∧П1.

Тема 4.2 Плоскопараллельное перемещение

- **Пример**
- Определить натуральную величину треугольника АВС и угол его наклона к плоскости проекций П2



Тема 4.2 Плоскопараллельное перемещение

- Задача решается двумя последовательными перемещениями. Первым перемещением треугольник АВС приводится в положение, перпендикулярное горизонтальной плоскости проекций $П_1$. Вторым перемещением этот треугольник приводится в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций $П_2$.
- В плоскости треугольника АВС проводим фронталь СК. Перемещаем фронталь СК в положение горизонтально проецирующей прямой: $CK \perp П_1$. При этом плоскость треугольника станет горизонтально проецирующей плоскостью.
- На чертеже проводим следующие построения. Фронтальную проекцию C_2K_2 располагаем перпендикулярно оси координат OX. Величина фронтальной проекции треугольника при этом не меняется. Строим фронтальную проекцию треугольника $A^*_2B^*_2C^*_2$, учитывая равенство сторон треугольника: $A_2B_2=A^*_2B^*_2$, $A_2C_2=A^*_2C^*_2$, $B_2C_2=B^*_2C^*_2$.
- Горизонтальной проекцией $A_1B_1C_1$ треугольника в новом положении является отрезок прямой $A^*_1C^*_1$, угол наклона которого к оси OX является натуральной величиной угла наклона плоскости треугольника к плоскости $П_2$ – угол ψ. $\triangle ABC \wedge П_2=\psi$.
- Чтобы получить натуральную величину треугольника, переместим вырожденную горизонтальную проекцию треугольника (прямая $A^*_1C^*_1$,) на свободное место чертежа в положение, параллельное оси OX. Плоскость треугольника станет плоскостью уровня. Фронтальные проекции точек при этом перемещаются параллельно оси OX (сохраняется неизменной координата Z точек). На фронтальной проекции имеем натуральную величину плоскости треугольника АВС: $A^{**}_2B^{**}_2C^{**}_2=|\triangle ABC|$.

Тема 4.3 Вращение вокруг проецирующих прямых

- В способе вращения вокруг проецирующих прямых точка описывает дугу окружности, плоскость которой параллельна плоскости проекций.
- При повороте точки А вокруг горизонтально проецирующей оси $I \perp П_1$ на угол ϕ против часовой стрелки точка А перемещается в плоскости $\alpha \perp I \wedge \alpha \,/\!/\, П_1$ по окружности радиусом $R_A = I_1A_1$.

$I \perp П_2$, $B \in \beta \perp I \wedge \beta \,/\!/\, П_2$, $R_B = I_2B_2$, $Y_B = const$.