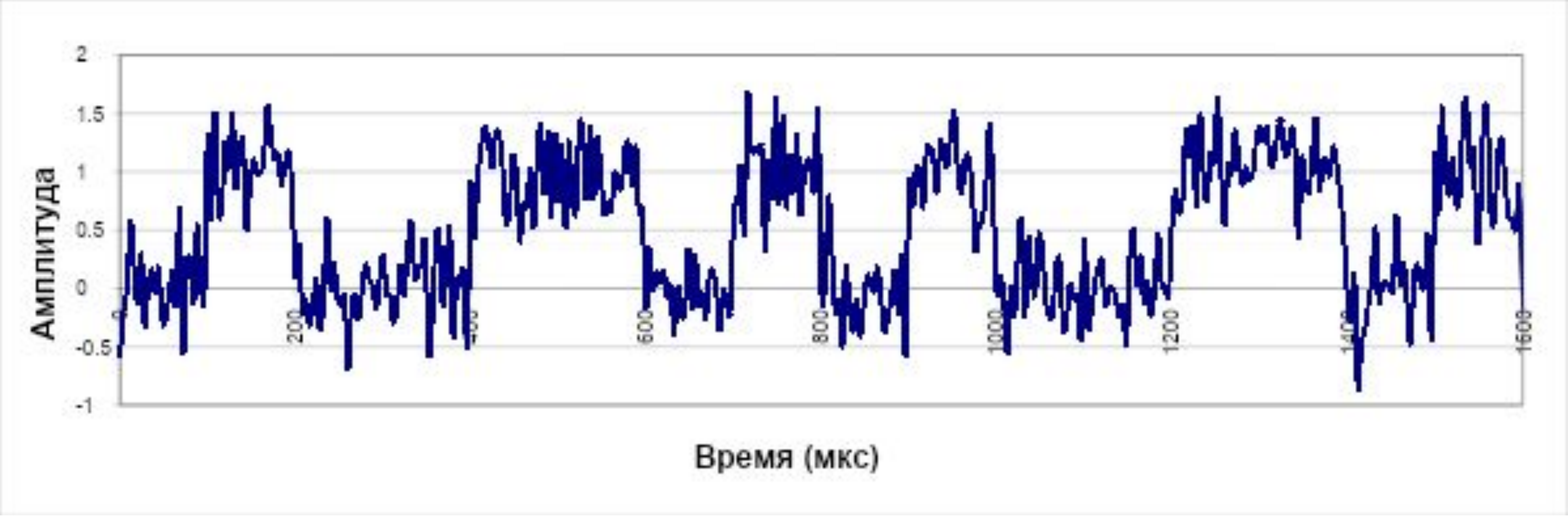
Программная реализация кода с повторением

Код с повторением без инверсии является систематическим разделимым линейным циклическим (n,k)-кодом, содержащим информационных и $r = k$ проверочных символов (при одном повторении). Длина кода $n = k + r$. Особенность кода состоит в том, что в нем проверочные символы являются просто повторенными информационными символами, т.е. в рамках

ТЛЗ $b_j = a_j$ ($j=1 \div k$). Код имеет $d = 2$ и применяется для обнаружения ошибки.

Вид сигнала кода с повторением

Период повторения сигнала T=		800	мкс		Число точек на период				200
Длительность импульса $\tau =$		100	мкс		Число спектральных составляющих				20
Задержка		0	мкс						
Двоичный код длины	8	01001101			Число повторов		2	Шум	0,0001



Перенос данных с листа 1

```
Sheets("Лист1").Select
Период = Sheets("Лист1").Cells(2, 4).Value
Длит = Sheets("Лист1").Cells(3, 4).Value
ДлинаКода = Sheets("Лист1").Cells(5, 3).Value
Код = Sheets("Лист1").Cells(5, 4).Value
ЧислоПовт = Sheets("Лист1").Cells(5, 8).Value
```

- Среднеквадратичное отклонение шумового сигнала

```
Sr = Sheets("Лист1").Cells(5, 10).Value
```

Формирование кода

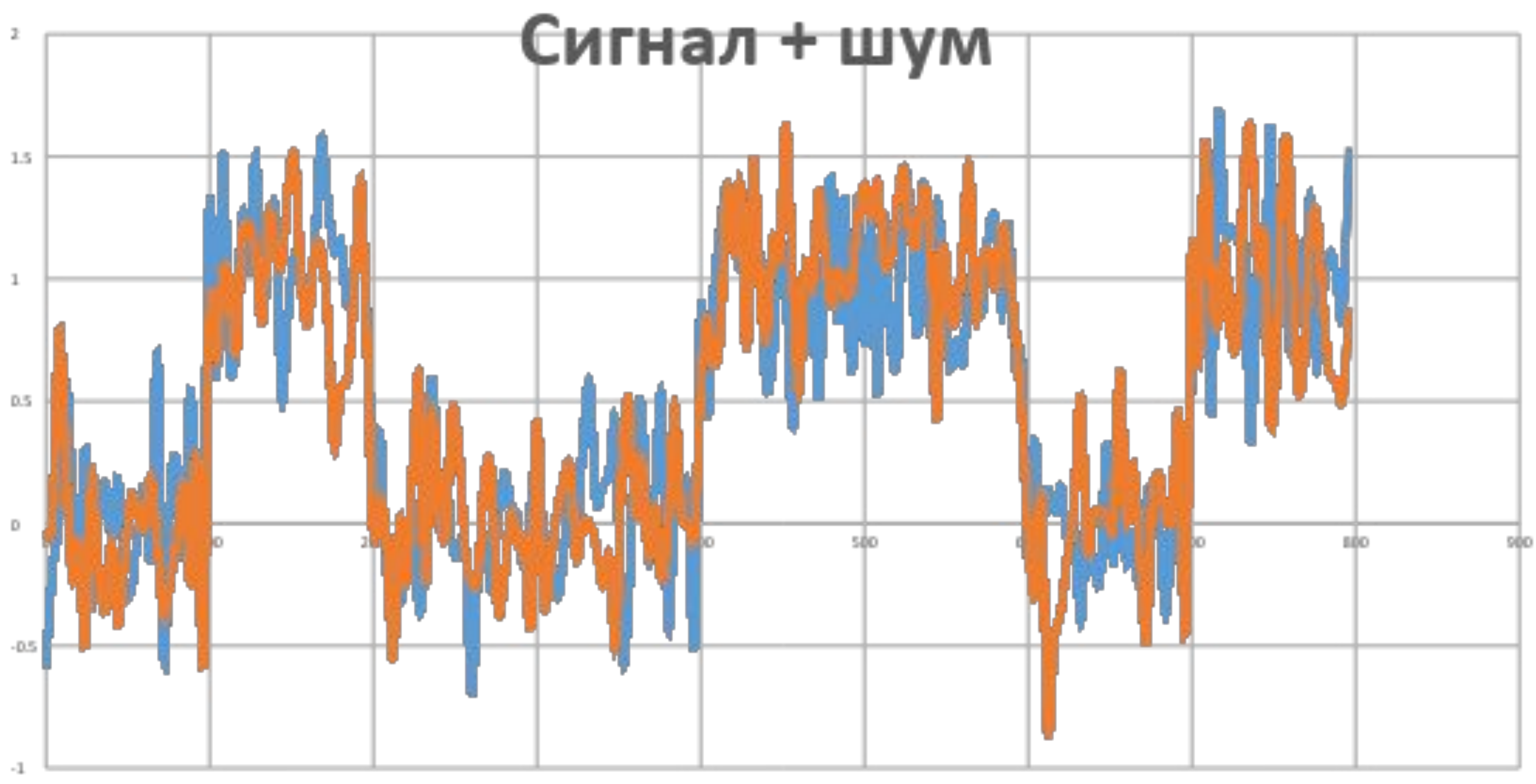
- ШагВр = Период / ЧислТочНаПериод
- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- t = i * ШагВр
- For j = 1 To ДлинаКода
- 'Интервал информационных символов
- НачИС = (j - 1) * Длит
- КонИС = j * Длит
- Символ = Mid(Код, j, 1)
- If t >= НачИС And t <= КонИС Then
- u = CInt(Символ)
- End If
- Next j
- Пр(i) = u
- 'Запись для графика процесса на одном периоде
- Sheets(2).Cells(i + 3, 1).Value = CSng(i) * ШагВр
- Sheets(2).Cells(i + 3, 2).Value = Пр(i)
- Next i

- Построение графика периодической функции
- 'Число точек графика
- ЧислТочГраф = CInt(ЧислоПовт * ЧислТочНаПериод)
- ГрафШагВр = ЧислоПовт * Период / ЧислТочГраф
- For i = 0 To ЧислТочГраф
- 'Формирование временной оси на графике
- 'область по времени от 0 до ЧислТочГраф
- '   Время = (CSng(i) - ЧислТочНаПериод * (1 - Длит / (2 * Период))) * (Период / ЧислТочНаПериод)
- ВремяГраф = CSng(i) * ГрафШагВр
- Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value = ВремяГраф
- 'Сигнал - процесс на интервале графика

Sheets(2).Cells(i + 3, 4).Value = Пр(CSng(i) Mod ЧислТочНаПериод) + **Application.NormInv(Rnd(7), 0, Sr)**

- Next i


Вид сигнала+шум кода с повторением
Амплитуда
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Время (мкс)



Сигнал + шум
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
500
800
900

Подготовка к суммированию повторных сигналов

- 'Сумма сигналов (повтор)
- ReDim Sign(16) As Single
- 'Очистка листа 4
- Sheets(4).Select
- Sheets(4).Cells.Select
- Selection.ClearContents
- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- Sheets(4).Cells(i + 1, 1).Value = Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, 12).Value = Sheets(2).Cells(i + 3, 3).Value
- Sign(1) = Sheets(2).Cells(i + 3, 4).Value
- Sheets(4).Cells(i + 1, 2).Value = Sign(1)
- Next i

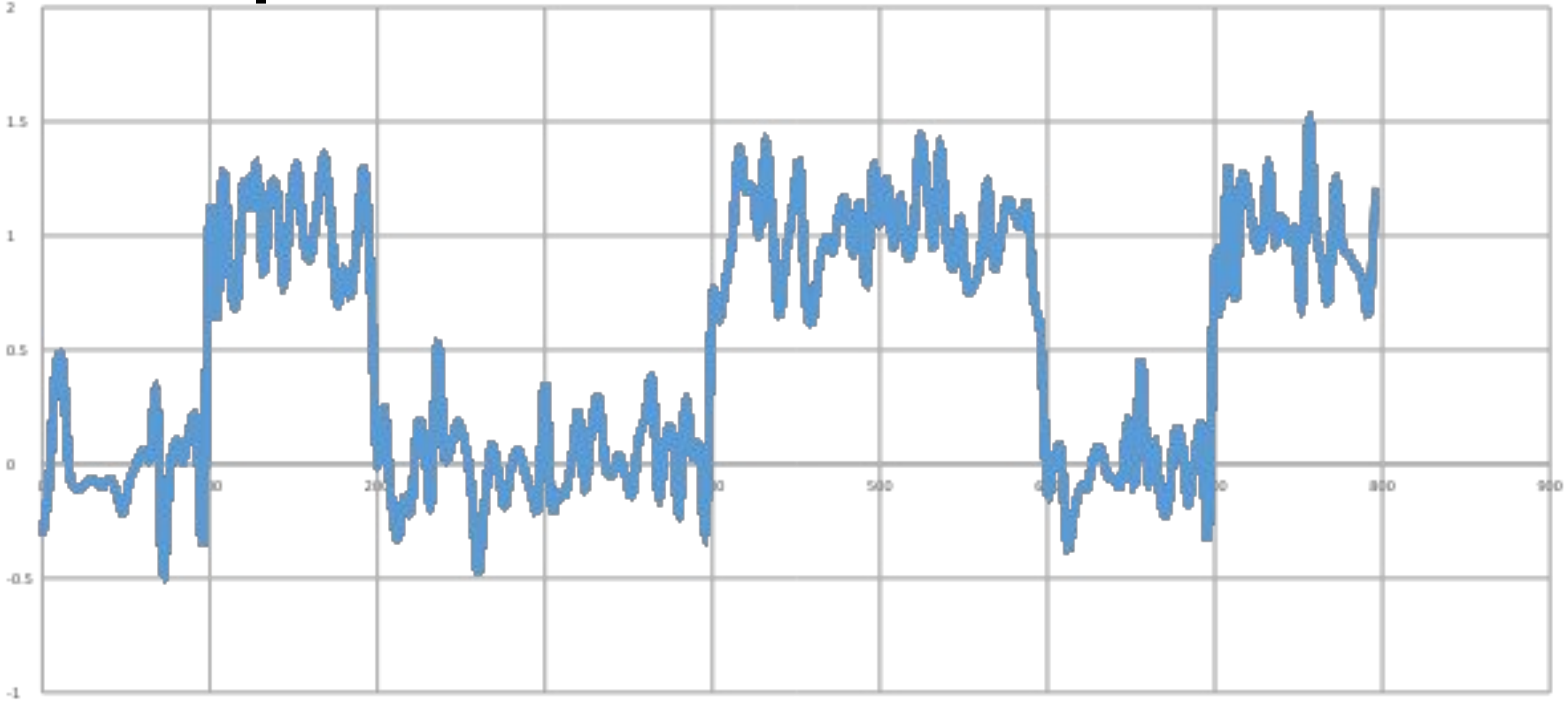
Подготовка к суммированию повторных сигналов

```
'Перенос на лист 4
    For j = 1 To ЧислоПовт - 1
        For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
            k = i + 3 + ЧислТочНаПериод * j
            Sign(j) = Sheets(2).Cells(k, 4).Value
            Sheets(4).Cells(i + 1, j + 2).Value = Sign(j)
            SSign = SSign + Sign(j)
        Next i
```

Вычисление среднего значения по повторам

- For i = 0 To ЧислТочНаПериод - 1
- SSign = 0
- For j = 1 To ЧислоПовт
-   Sign(j) = Sheets(4).Cells(i + 1, j + 1).Value
-   Sheets(4).Cells(i + 1, j + 7).Value = Sign(j)
-   SSign = SSign + Sign(j)
- Next j
- Sheets(4).Cells(i + 1, 13).Value = SSign / ЧислоПовт
- Next i

Сигнал + шум после усреднения 2-х выборок



КОД С ПОВТОРЕНИЕМ И ИНВЕРСИЕЙ

Код с повторением и инверсией является систематическим разделимым нециклическим нелинейным $(2k,k)$-кодом. Имеет k информационных и $r = k$ проверочных символов. Отличается от кода с повторением (однократным) без инверсии тем, что значение проверочных символов в нем зависят от значения сумм по модулю два всех информационных символов. Если

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$$

т.е. если число единиц в информационной части кода четно. то проверочные символы повторяют информационые: $b_j = a_j (j = 1 \div k)$

Если, $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ то есть, если число единиц в информационной части кода нечетно, то проверочные символы повторяют информационные в обратном (инверсном) коде с заменой 0 на 1 и 1 на 0, а именно $b_j = a_j \oplus 1$ ($j = 1 \div k$). Замена в i-том символе 0 на 1 или 1 на 0 равносильна его сложению по модулю 2 с единицей,

где $\sum_{i=1}^{k}$ – символ суммирования по mod2.

Код имеет:

$$d = \begin{cases} k \text{ при } k < 4 \\ 4 \text{ при } k \geq 4 \end{cases}$$

Процедура обнаружения ошибок

Корректирующая способность кода: код позволяет обнаруживать ошибки любой кратности, за исключением таких, когда искажены два информационных символа и соответствующие им два проверочных символа, четыре информационных символа и соответствующие им четыре проверочных символа, то есть четное число информационных и соответствующие им проверочные символы (a_1, a_2 и b_1, b_2; a_1,a_3 и b_1 , b_3; a_2 ,a_3 и b_2 , b_3 и др.).

Процедура обнаружения ошибок сводится к следующему. Одноименные информационные и проверочные символы принятой комбинации сравниваются между собой, причем, если сумма по модулю два всех информационных символов равна 0, то проверочные символы подаются в устройство сравнения в прямом коде (как были приняты), если же эта сумма равна 1, то проверочные символы подаются в указанное устройство в обратном (инверсном коде).

В результате сравнения формируется синдром ошибки $S = S_r S_{r-1} \dots S_i \dots S_1$, $S_i = 1$ $(i = r \div 1)$, если соответствующие информационные и проверочные символы в устройстве сравнения не совпадают, $S_i = 0$, если совпадают. Значение S_i находится как сложение по модулю два i –ых информационных и соответствующих им проверочных символов.

$$S_1 = a_1^* \oplus b_1^*,\ S_2 = a_2^* \oplus b_2^*,\ S_3 = a_3^* \oplus b_3^*,$$

при четном числе единиц в информационной части кода.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 \qquad S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1$$

при нечетном числе единиц в информационной части, где черточка над символом обозначает знак инверсии, что равносильно сложению по модулю два символа с 1, $\bar{b}_i^* = b_i^* \oplus 1$

- Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки рассмотрим на следующих примерах: передавалась комбинация V_{i}=110110. В процессе передачи искажен первый символ, вектор ошибки e_i=100000. Принята комбинация V_{i}^{*}=010111. В информационной части нечетное число единиц. Инвертируем проверочную часть и анализируем полученную комбинацию 010000. Находим синдром ошибки S

$$S_1 = a_1^* \oplus \overline{b_1}^* = 0 \oplus \overline{1} = 0 \oplus 0 = 0 \quad S_2 = a_2^* \oplus \overline{b_2}^* = 1 \oplus \overline{1} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \overline{b}_3^* = 0 \oplus \overline{1} = 0 \oplus 0 = 0$$

Откуда $S=S_3S_2S_1 = 010$ указывает на наличие ошибки.

Имеется ошибка четвертой кратности

Передавалась комбинация V_i=110110. В процессе передачи искажены первые и третьи символы как в информационной так и в проверочной части. Вектор ошибки e_i=101101. Полученная комбинация V_j=011011. В информационной части четное число единиц. Инверсирование не требуется. Анализируем принятую комбинацию и находим синдром S.

$$S_1 = a_1^* \oplus b_1^* = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_2 = a_2^* \oplus b_2^* = 0 \oplus 0 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus b_3^* = 1 \oplus 1 = 0$$

Синдром $S=S_3S_2S_1$=000 указывает, что ошибки нет. Но на самом деле имеется ошибка четвертой кратности, но она не обнаруживается и осуществляется ошибочный прием.

- Вероятность появления ошибок комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при одноразовой передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) или вероятность необнаружения ошибок $P_н$ и равна вероятности появления четного числа (2,4,6 …) ошибок в информационной части кода и соответствующих им ошибок в проверочной части кода.

$$P_н = C_k^{\;2} p^2 q^{k-2} p^2 q^{k-2} + C_k^{\;4} p^4 q^{k-4} p^4 q^{k-4} + ...$$

где *p* – вероятность искажения одного символа, *q=1-p*

– вероятность правильного приема одного символа.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ КОД - КОД С УДВОЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Этот код является разделимым, не систематическим, длины n с k – информационными и $r = k$ проверочными символами, $n = k + r = 2k$.

Построение данного кода заключается в следующем:

Проверочные символы формируются по соответствующим информационным символам и занимают позиции сразу за информационными символами. Значение проверочного символа инверсно по отношению к информационному.

Процедура построения

Строится первичный (обычный двоичный) код длины k. Затем производится его перекодирование по следующему правилу: 1 заменяется двумя символами 10, первый символ – информационный, второй символ – проверочный. 0 заменяется 01.

Структура комбинации выглядит следующим образом:
$a_1b_1a_2b_2$ a_3b_3 и т.д. на нечетных позициях располагаются информационные символы, на четных – проверочные символы.

Пример построения кодовой комбинации при n=6. 100110

$$b_1 = \overline{a_1} = a_1 \oplus 1, \quad b_2 = \overline{a_2} = a_2 \oplus 1, \quad b_3 = \overline{a_3} = a_3 \oplus 1$$

Код имеет кодовое расстояние d=2 и применяется для обнаружения ошибок.

Корректирующая способность кода: код позволяет обнаруживать ошибки любой кратности, за исключением, одновременного искажения поверочного и информационного в парах (a_1и b_1; a_2 и b_2; a_3 и b_3; a_1b_1 и a_2b_2 и т.п.).

Процедура обнаружения

Процедура обнаружения состоит в сравнении символов в парах и формирование по этим проверкам синдрома ошибки $S = S_r S_{r-1} \ldots S_1 \ldots . S_1$. $S_i = 0$ ($i = r \div 1$), если значение символов в парах разное; S=1, если значение символов в парах одинаковое. Значение S_i находится как результат сложения по модулю два символов в паре, причем проверочный символ берется в инверсном виде.

$$S_1 = a_1{}^* \oplus \bar{b}_1{}^* = a_1{}^* \oplus b_1{}^* \oplus 1$$

$$S_2 = a_2{}^* \oplus \bar{b}_2{}^* = a_2{}^* \oplus b_2{}^* \oplus 1$$

……………………………………………….

$$S_r = a_r{}^* \oplus \bar{b}_r{}^* = a_r{}^* \oplus b_r{}^* \oplus 1$$

Процедура обнаружения

Процедура обнаружения состоит в сравнении символов в парах и формирование по этим проверкам синдрома ошибки $S = S_r S_{r-1} \ldots S_1 \ldots . S_1$. $S_i = 0$ ($i = r \div 1$), если значение символов в парах разное; S=1, если значение символов в парах одинаковое. Значение S_i находится как результат сложения по модулю два символов в паре, причем проверочный символ берется в инверсном виде.

$$S_1 = a_1{}^* \oplus \bar{b}_1{}^* = a_1{}^* \oplus b_1{}^* \oplus 1$$

$$S_2 = a_2{}^* \oplus \bar{b}_2{}^* = a_2{}^* \oplus b_2{}^* \oplus 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_r = a_r{}^* \oplus \bar{b}_r{}^* = a_r{}^* \oplus b_r{}^* \oplus 1$$

Где a_i^* $и$ b_i^* значение i-ых информационных и поверочных символов в принятой кодовой комбинации, $\bar{b}_i{}^* = b_i{}^* \oplus 1$

Относительная скорость передачи находится по формуле $q = k / n$, а избыточность кода $И = (n - k) / k$

Корректирующая способность кода проявляется в том, что код обнаруживает все ошибки за исключением одновременного искажения символов в парах a_1 и b_1, a_2 и b_2, a_3 и b_3, $a_1\,b_1$ и $a_2\,b_2$, $a_1\,b_1$ и $a_3\,b_3$, $a_2\,b_2$ и $a_3\,b_3$

Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки рассмотрена на следующих примерах:

Процедура обнаружения и формирования синдрома ошибки

1) передавалась комбинация 100110. В процессе передачи искажен первый символ, вектор ошибки *e*=100000. Принята комбинация 000110. Находится синдром ошибки $S = S_3\,S_2\,S_1$

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Откуда S =001 Синдром не нулевой, ошибка есть и она обнаружена.

Ошибка есть, но она не обнаружена

- 2) передавалась комбинация V_i = 100110. В процессе передачи искажены третий и четвертый символы. Вектор ошибки e_i = 001100. Принята комбинация V_i^* = 101010. Находится синдром ошибки S=S_3 S_2 S_1.

$$S_1 = a_1^* \oplus \bar{b}_1^* = a_1^* \oplus b_1^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$S_2 = a_2^* \oplus \bar{b}_2^* = a_2^* \oplus b_2^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$S_3 = a_3^* \oplus \bar{b}_3^* = a_3^* \oplus b_3^* \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Синдром S=000. Ошибка есть, но она не обнаружена.

Вероятность появления ошибочной комбинации

- Вероятность появления ошибочной комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при одноразовой передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) равна вероятность необнаружения ошибки $P_н$ (равна вероятности одновременного искажения информационных и проверочных символов в парах (одной, двух, и т.д. до *k*-той)) и определяется по формуле

$$P_н = C^1{}_{n/2} p^2 q^{k-2} + C^2{}_{n/2} p^4 q^{k-4} + \ldots$$

где p – вероятность искажения одного символа, $q=1-p$ – вероятность правильного приема одного символа

КОД С ПОСТОЯННЫМ ВЕСОМ

Этот код является неразделимым, не систематическим, циклическим, нелинейным кодом длины n. Код имеет постоянное число единиц l и нулей m в кодовых комбинациях, характеризуется эквивалентным числом $k_э$ информационных и $r_э$ проверочных символов. $k_э + r_э = n$. N – количество комбинаций кода. Длина кода n определяется путем подбор а при использовании соотношения

- $c_n{}^l = \dfrac{n!}{l!(n-l)!}$ Обычно $l \approx \dfrac{n}{2}$ В этом случае имеем

наибольшее число сочетаний. Код имеет $d = 2$ и применяется для обнаружения ошибки.

Процедура построения: используя соотношение $N \le C_n^{\,l}$. Методом подбора для заданного N определяем n и l. Из всех комбинаций $N_0=2^n$ выбираем комбинации, содержащие l единиц. Затем строим кодовые комбинации – $V_i=\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\ldots\mathrm{a}_n$.,

Корректирующая способность кода: код обнаруживает все ошибки за исключением одновременного перехода 1 в 0 и такого же количества переходов 0 в 1. В этом случае число 1 остается равным l и такие ошибки не обнаруживаются. Процедура обнаружения состоит в подсчете числа единиц в кодовой комбинации. Результаты проверки характеризуются одним символом синдрома $S = S_1$. $S_1 = 0$, если число единиц n_ℓ в принятой кодовой комбинации равно l ($n_l = l$), то считается, что ошибки нет или ошибка есть, но она не обнаруживается. Здесь осуществляется обычно сложение (не по модулю два), $n_l = a_1^* + a_2^* + a_3^* + \ldots + a_n^*$, a_1^*, a_2^* ….. a_n^* - символы искаженной кодовой комбинации.

Вероятность появления ошибочной комбинации

$S_1=1$, если число единиц n_l принятой кодовой комбинации неравно $l\ (n_l \neq l)$ то ошибка есть и она обнаруживается. Относительная скорость передачи q и избыточность кода $И$ определяются формулами

$$q = \frac{\lg N}{n} \qquad И = \frac{n - \log_2 N}{\log_2 N}$$

Вероятность появления ошибочной комбинации на выходе устройства обнаружения ошибок при одноразовой передаче комбинации по двоичному симметричному каналу (ДСК) равна вероятности искажения одной единицы и … т.д.

$$P_{ош} = P_{н} = C_l^1 p^1 q^{l-1} C_{n-l}^1 p^1 q^{n-l-1} + C_l^2 p^2 q^{l-2} C_{n-l}^2 p^2 q^{n-l-2} + \ldots + C_l^l p^l q^l C_{n-l}^l p^l q^{n-l-l}$$

- где $q = 1 - p$ – вероятность правильного приема одного символа, p – вероятность искажения одного символа.

ЛИНЕЙНЫЕ (*n*,*k*)-КОДЫ

В классе блоковых разделимых корректирующих кодов различают коды систематические и несистематические. Систематическим называют такой код, в комбинациях которого информационные символы занимают первые k позиций, а проверочные – последние $r = n - k$ позиций. Если информационные символы обозначать через a_i $(i = 1 \div k)$, а проверочные – через b_j $(j = 1 \div r)$, то любая комбинация V систематического кода, согласно определению, должна иметь структуру $V = (a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_r)$

При ином расположении информационных и проверочных символов код называется несистематическим.

Остановимся на рассмотрении систематических линейных кодов в рамках теории линейных зависимостей.

Систематический линейный код

Двоичный (n,k) – код называется линейным, если его проверочные символы b_j $(j = 1 \div r)$ находятся как суммы по mod2 определенных информационных символов a_i $(i = 1 \div k)$.

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \oplus C_{ji} a_i$$

Где $\sum_{i=1}^{k} \oplus$ – символ суммирования по mod2. C_{ji} – коэффициенты, могущие принимать значения либо 0, либо 1. Операция сложения по mod2 является линейной операцией, отсюда и название кода. Если проверочные символы определяются по другому правилу, то (n,k)-код называется нелинейным.

Закон построения линейного кода

$$b_i = C_{ji}a_1 \oplus C_{ji}a_2 \oplus ... \oplus C_{jk}a_k$$

$$b_1 = C_{11}a_1 \oplus C_{12}a_2 \oplus ... \oplus C_{1k}a_k$$

$$b_2 = C_{21}a_1 \oplus C_{22}a_2 \oplus ... \oplus C_{2k}a_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r = C_{r1}a_1 \oplus C_{r2}a_2 \oplus ... \oplus C_{rk}a_k$$

Закон построения линейного кода задается совокупностью коэффициентов C_{ji}, число которых $k{\cdot}r$.

Линейный систематический код

- Построить линейный систематический (7,4)-код, заданный следующей совокупностью коэффициентов C_{ji} (всего таких коэффициентов должно быть задано 4·3=12): i=(1÷4), j=(1÷3)

$$C_{11}=1 \quad C_{12}=1 \quad C_{13}=0 \quad C_{14}=1$$

$$C_{21}=1 \quad C_{22}=0 \quad C_{32}=1 \quad C_{24}=1$$

$$C_{31}=0 \quad C_{32}=1 \quad C_{33}=1 \quad C_{34}=1$$

- Проверочные символы находятся по формулам:

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \boxtimes C_{ji} a_i$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \boxtimes C_{ji} a_i = C_{11}a_1 \oplus C_{12}a_2 \oplus C_{13}a_3 \oplus C_{14}a_4 =$$

$$= 1 \cdot a_1 \oplus 1 \cdot a_2 \oplus 0 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \circ C_{ji} a_i = C_{11}a_1 \oplus C_{12}a_2 \oplus C_{13}a_3 \oplus C_{14}a_4 =$$

$$= 1 \cdot a_1 \oplus 0 \cdot a_2 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \boxtimes C_{ji} a_i = C_{11}a_1 \oplus C_{12}a_2 \oplus C_{13}a_3 \oplus C_{14}a_4 =$$

$$= 0 \cdot a_1 \oplus 1 \cdot a_2 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_4 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$$

Строим первичный код с числом комбинаций $N=2^k = 16$ и записываем его в таблицу графы 2,3, 4,5. По приведенным формулам определяются проверочные символы и записываются в графы 6,7,8 таблицы. В графу 8 записывается вес полученных кодовых комбинаций. Например, первичная комбинация $a_1a_2a_3a_4 = 1001$, $b_1 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$, $b_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$, $b_3 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$. Корректирующий код 1001001. Вес этой комбинации $w=3$. Комбинация 9

Таблица 1

№ комбинации	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	w_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1				
2	0	0	1	0				
3	0	0	1	1				
4	0	1	0	0				
5	0	1	0	1				
6	0	1	1	0				
7	0	1	1	1				
8	1	0	0	0				
9	1	0	0	1	0	0	1	3

10	1	0	1	0				
11	1	0	1	1				
12	1	1	0	0				
13	1	1	0	1				
14	1	1	1	0				
15	1	1	1	1				

В таблице представлены все $N = 2^4$=16 комбинаций первичного кода и одна комбинация корректирующего кода.

Для другой совокупности коэффициентов C_{ji} был бы получен другой линейный код с тем же или иным d.

Отметим два интересных свойства линейных кодов.

1.Сумма по mod2 любых двух комбинаций линейного кода снова дает комбинацию этого же кода. В справедливости этого легко убедиться, сложив любые две комбинации.

2.Кодовое расстояние d линейного кода равно минимальному весу его ненулевых комбинаций. Построив код и проставив справа веса всех комбинаций, можно убедиться, что

$d = w_{\min}=3$. Это свойство дает очень простой способ определения кодового расстояния для любого линейного (n,k)-кода.

Характеристики систематического (n,k)-кода на примере (7,4)-кода с совокупностью коэффициентов C_{ji}, приведенных выше,
$n = 7, \ k = 4, \ \ r = n - k = 3.$

1. Код разделимый, длина кода – n.
2. Число информационных символов k=4 , число проверочных символов $r = n - k$=7– 4 = 3.
3. Кодовое расстояние d, равно минимальному весу его ненулевых комбинаций $d = 3$.
4. Избыточность кода *И=(n-k)/k*
5. Относительная скорость передачи $q = k / n$.
6. Корректирующая способность кода. Код обнаруживает все однократные и двукратные ошибки и некоторые ошибки большей кратности. Код исправляет однократные ошибки.
7. Процедура обнаружения и исправления ошибок.

Обнаружение ошибок в комбинациях линейных кодов.
Пусть передана комбинация $V=(a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_r)$, а принята комбинация $V^*=(a_1^*a_2^*\ldots a_k^*b_1^*b_2^*\ldots b_r^*)$.
В общем случае из-за возможных искажений не все одноименные символы этих комбинаций совпадают.

По принятым информационным символам на приемной стороне вычисляются проверочные:

$$b_j^{**} = \sum_{i=1}^{k} \circ C_{ji} a_i^*$$

Вычисленные значения сравниваются с принимаемыми символами b_j^*. Это сравнение можно осуществить путем операции сложения по mod2

$$S_j = b_j^* \oplus b_j^{**}, j = 1 \div r$$

Результаты сравнения можно представить в виде набора из r символов $(S_r S_{r-1} \dots S_2 S_1)$. Ясно, что если для всех j сравнение показало совпадение вычисленного и полученного проверочного символа ($b_j^{**} = b_j^*$), то это свидетельствует об отсутствии искажений в принятой комбинации. Иными словами, если r – элементная комбинация (S_r … S_r S_1) состоит из одних нулей, то ошибки нет; если хотя бы один символ в этом наборе принял значение 1, то это говорит о наличии ошибок в принятой комбинации. Поэтому набор символов S=(S_r … S_1) называют синдромом или опознавателем ошибок.

Пусть была передана комбинация кода V_i=1001001, а принята V_i^* = 1001011, $V_i^* = a_1^* a_2^* a_3^* a_4^* b_1^* b_2^* b_3^*$.

Тогда

$$b_1^{**} = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$b_2^{**} = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$b_3^{**} = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

Сравнение вычислительных символов с принятыми проверочными дает:

$$S_1 = b_1^{**} \oplus b_1^* = 0 \oplus 0 = 0$$

$$S_2 = b_2^{**} \oplus b_2^* = 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_3 = b_3^{**} \oplus b_3^* = 1 \oplus 1 = 0$$

Т.е. получен ненулевой синдром S = 010, что свидетельствует об ошибке в принятой комбинации.

Процесс исправления ошибок осуществляется аналогичным способом. Полученный ненулевой синдром, в виде трехзначного двоичного кода указывает позицию, на которой произошла ошибка. Исправление ошибки заключается в замене принятого значения символа на инверсный (0 на 1 или 1 на 0).

Верность передачи определяется как вероятность обнаружения ошибки, при использовании (n,k)-кода в качестве обнаруживающего ошибку, или как вероятность исправления одиночной ошибки, при использовании (n,k)-кода в качестве исправления одиночной ошибки.

ЛИНЕЙНЫЙ НЕ СИСТЕМАТИЧЕКИЙ КОД (КОД ХЭММИНГА НЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ)

Этот код является разделимым не систематическим линейным кодом длины n с k информационными и r проверочными символами, обозначается как (n,k)-код. (7,4)- код Хэмминга позволяет обнаруживать одиночные и двойные ошибки и ряд ошибок большей кратности или исправлять одиночную ошибку.

Построение корректирующего кода.

В качестве первичного (исходного) берется двоичный код на все сочетания с числом информационных символов k, к которому добавляется проверочные символы r , общая длина комбинации кода $n = k + r$.

Определение числа контрольных символов.

Для этого можно воспользоваться следующими рассуждениями. При передаче по каналу с шумами может быть или искажен любой из n символов кода, или слово передано без искажений. Таким образом, может быть n+1 вариант искажения (включая передачу без искажений). Используя контрольные символы, необходимо различить все n+1 вариантов. С помощью контрольных символов r можно описать 2^r событий. Значит, должно быть выполнено условие: $2^r \geq n + 1 = k + r + 1$

В таблице представлена зависимость между n, k и r полученная из этого неравенства.

Число проверочных символов r в коде Хэмминга в зависимости от числа информационных символов k

$\boldsymbol{2^r}$	4	8	8	8	16	16	16	16	16	16	6	32	32
$\boldsymbol{k+r+1}$	4	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	18	19
$\boldsymbol{k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\boldsymbol{r}$	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5

Размещение проверочных символов

В принципе место расположения проверочных символов может быть произвольным. Однако, произвольное расположение проверочных символов затрудняет проверку принятого кода. Для удобства обнаружения искаженного символа и его исправления целесообразно размещать их на местах, определяемых по значению 2^i ($i = 0 \div n–1$), т.е. на позициях 1,2,4,8, и т.д. Информационные символы располагаются на оставшихся местах. Поэтому, например, для семиэлементной закодированной комбинации можно записать $b_1b_2a_1b_3a_2a_3a_4$.

Значения информационных символов $a_1a_2a_3a_4$ определяется первичным двоичным кодом на все сочетания. Первичный код имеет $2^k=N$ комбинаций.

Значения проверочных символов в коде определяются из выражения:

$$b_1=a_1\oplus a_2\oplus a_4,\quad b_2=a_1\oplus a_3\oplus a_4,\quad b_3=a_2\oplus a_3\oplus a_4$$

Пример построения комбинации корректирующего кода.

- Пусть комбинация первичного кода будет 1001 тогда:
  - a_1=1, a_2 =0, a_3=0, a_4=1.
- Значения проверочных символов:
  - $b_1=a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$ $b_2=a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$ $b_3=a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$
- Комбинация корректирующего кода будет иметь вид:
  - $b_1\, b_2 a_1\, b_3 a_2 a_3 a_4$=001001

Характеристики не систематического (n,k)-кода на примере (7,4)-кода.

1. Код разделимый, длины кода – n
2. Число информационных символов k, число поверочных символов $r = n – k$
3. Кодовое расстояние d, равно минимальному весу его ненулевых комбинаций
4. Избыточность кода $И =(n – k) / k$
5. Корректирующая способность кода. Код обнаруживает все однократные и двухкратные ошибки и некоторые ошибки большей кратности. Код исправляет однократные ошибки.

Обнаружение ошибок

Обнаружение ошибки сводится к проверке выполнения соотношений и нахождению синдрома ошибки для каждой принимаемой комбинации:

$$S_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus b_1^*$$

$$S_2 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_2^*$$

$$S_3 = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus b_3^*$$

При исправлении ошибки по тем же правилам находится синдром. Синдром представляет собой r - разрядное двоичное число, указывающее позицию искаженного символа $S=S_3\ S_2 S_1$,

Пример:

Передаваемая комбинация =0011001. Искажен четвертый символ, тогда принятая комбинация:

- $0010001 = b_1^* b_2^* a_1^* \, b_3^* a_2^* a_3^* a_4^*$

Синдром определяется в соответствии с формулами:

$$S_1 = a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_4^* \oplus \mathrm{b}_1^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

$$S_2 = a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus \mathrm{b}_2^* = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

$$S_3 = a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* \oplus \mathrm{b}_3^* = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \quad S = S_3\ S_2 S_1 = 100.$$

Двоичное число 100 указывает на искажение 4-го символа. После замены значения четвертого символа на инверсный получается исходная комбинация 0011001. В приведенной ниже таблице указан синдром и соответствующий ему искаженный символ, который обнаруживается и исправляется.

Комбинация корректирующего кода $b_1\, b_2\, a_1\, b_3\, a_2\, a_3\, a_4$	Вектор ошибки e_i	Искаженная комбинация, позиции символа $b_1^* b_2^* a_1^* b_3^* a_2^* a_3^* a_4^*$ 1 2 3 4 5 6 7	S	Номер позиции искаженного символа
0010001	0000001			
	0000010			
	0000100			
0011001	0001000	0011001	100	четвертый
	0010000			
	0100000			
	1000000			
	0000000			

Вероятность передачи

Вероятность передачи определяется как вероятность обнаружения ошибки при использовании (n,k)-кода в качестве обнаруживаемого ошибку или как вероятность исправления одиночной ошибки при использовании (n,k)-кода в качестве исправляющего одиночную ошибку.