

# ПОВЕРХНОСТИ

**Поверхность** – множество положений движущейся в пространстве линии.

**Поверхность** – непрерывное двупараметрическое множество точек.

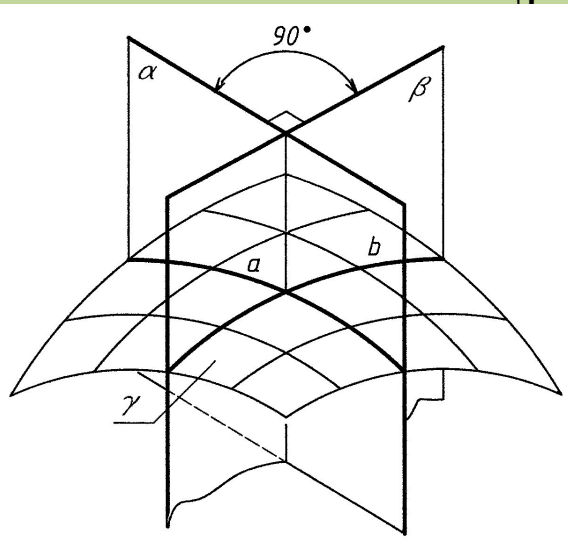
Все поверхности можно изобразить на плоскости, задавая проекции линий и точек, принадлежащих поверхности.

Поверхность считается заданной на чертеже, если можно построить проекцию любой точки, ей принадлежащей.

### **Каркасный способ задания поверхности (рис. 7.1)**

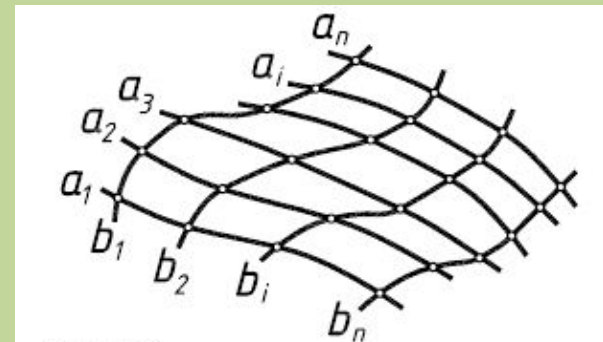
**Каркас поверхности** – упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

Если поверхность задается упорядоченным множеством точек – **каркас точечный**, в случае задания поверхности совокупностью линий – **каркас линейный**.



Линии каркаса получают при сечении  
плоскостями ( $\alpha$  и  $\beta$ ), расположенными  
плоскостям проекций

под углом



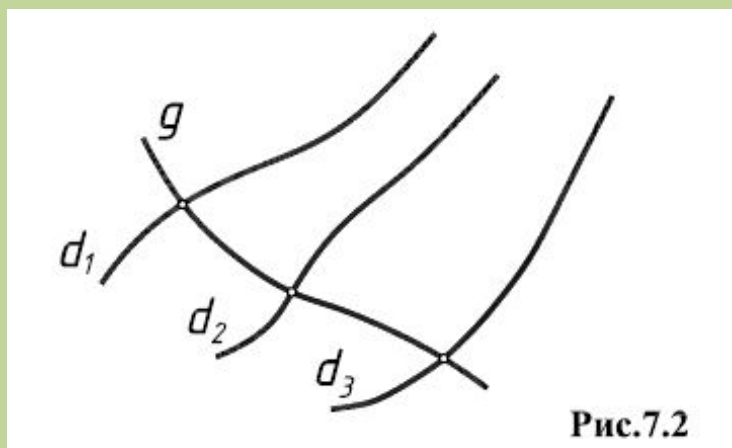
**Рис.7.1**

## Кинематический способ задания поверхности (рис. 7.2)

**Поверхность** – совокупность последовательных положений линии  $g_j$ , перемещающейся в пространстве по определенному закону.

**Образующая** ( $g$ ) – линия (прямая  $\bar{g}$  или кривая  $\tilde{g}$ ), которая при своем движении образует поверхность.

**Направляющие** ( $d$ ) – линии (прямые  $\bar{d}$  или кривые  $\tilde{d}$ ), задающие направление (закон) движения образующей.



## Признак принадлежности точки поверхности

Если точка принадлежит поверхности, то проекции точки принадлежат соответствующим проекциям линии, лежащей на поверхности

# Определитель поверхности

Определитель поверхности – **необходимая и достаточная совокупность геометрических фигур и связей между ними**, которые однозначно определяют поверхность.

$$\Phi(\Gamma); [A]$$

$(\Gamma)$  – **геометрическая часть** ( указывает, какие геометрические фигуры принимают участие в образовании поверхности);

$[A]$  – **алгоритмическая часть** ( содержит сведения о законе перемещения геометрической фигуры, входящей в первую часть определителя. Если образующая линия (поверхность) меняет в процессе образования поверхности свою форму и размеры, то и указания о законе этих изменений.

$$\Phi(g, d_1, d_2, d_3); [g_i \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \emptyset] \quad (\text{рис. 7.2})$$

# Классификация поверхностей



# Поверхности нелинейчатые

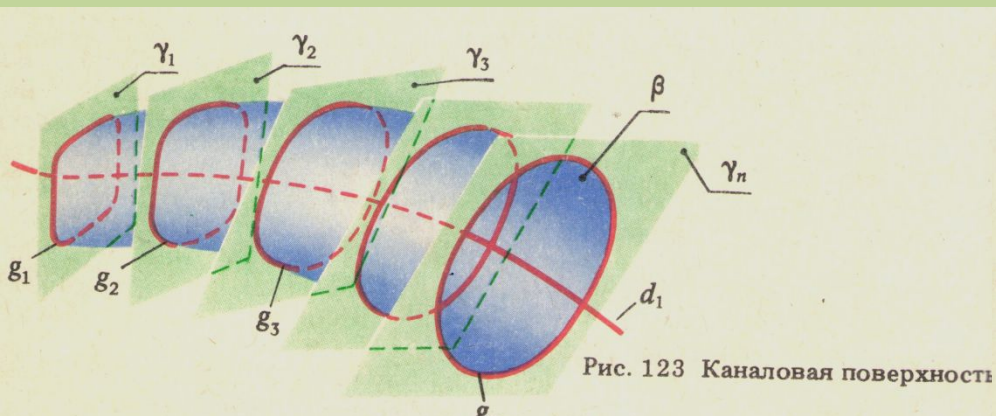


Рис. 123 Каналовая поверхность

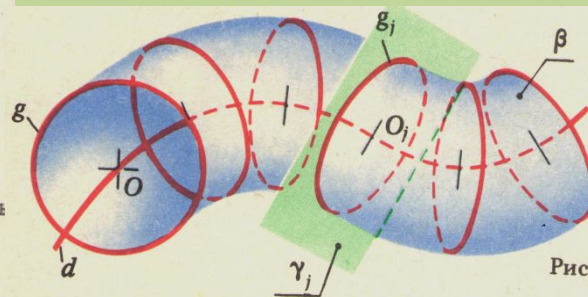


Рис. 126 Трубчатая поверхность

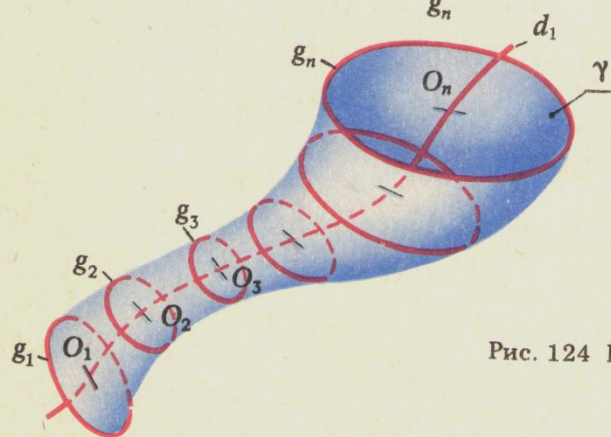


Рис. 124 Циклическая поверхность

с образующей переменного вида

с образующей постоянного вида

# Поверхности линейчатые

Схема 2



# Линейчатые поверхности с тремя направляющими

$$\Phi(g, d_1, d_2, d_3); [g_i \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \emptyset]$$

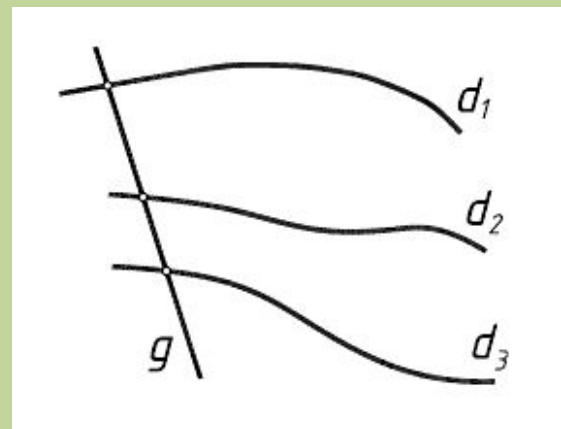
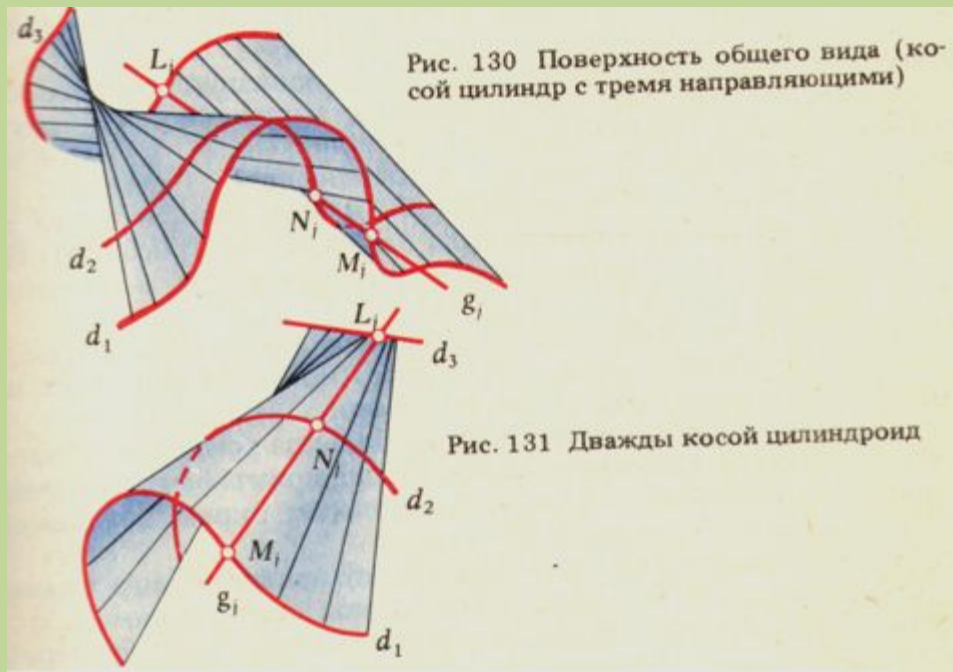
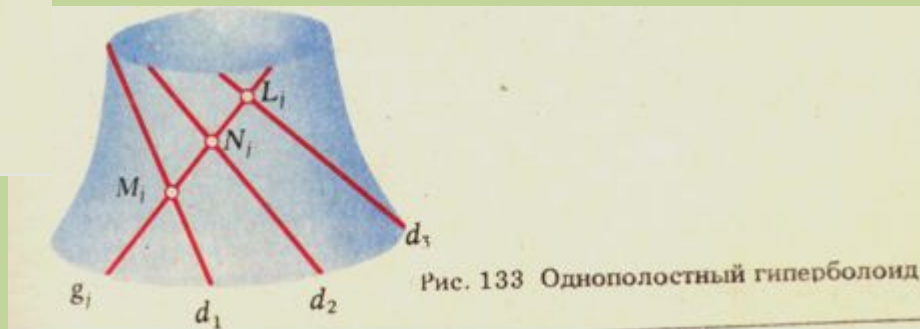
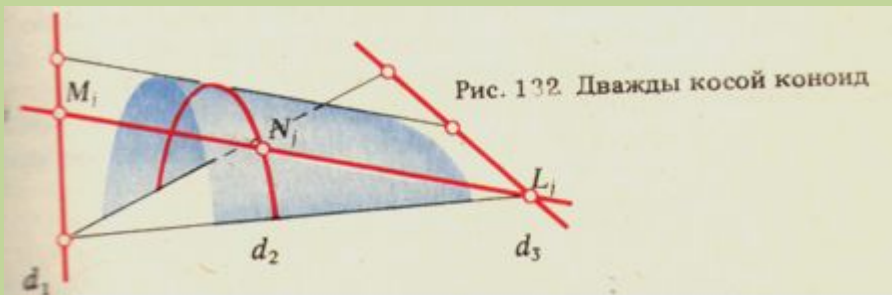


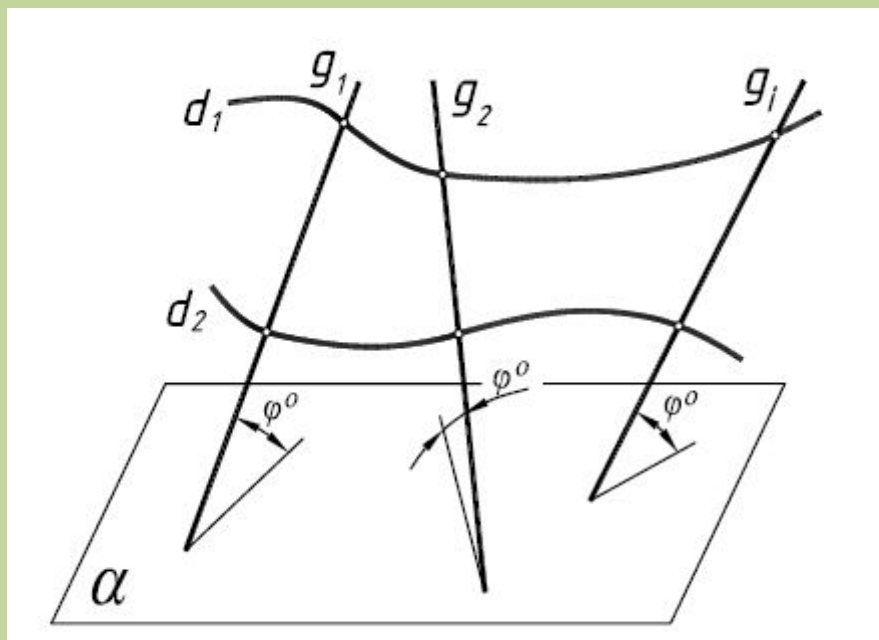
Рис. 7.3





## Линейчатые поверхности с двумя направляющими

$$\Phi(g, d_1, d_2, Y); [g_i \cap \{d_1, d_2\} \neq \emptyset \wedge (g_i Y) = \phi]$$



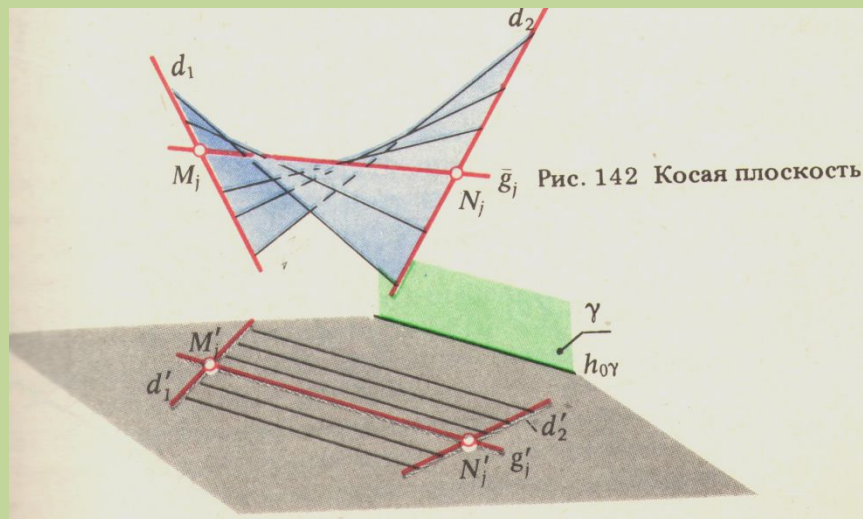
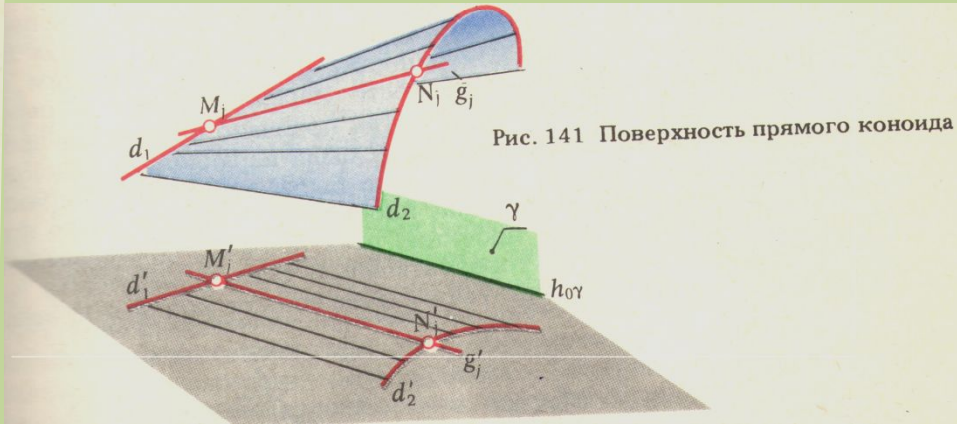
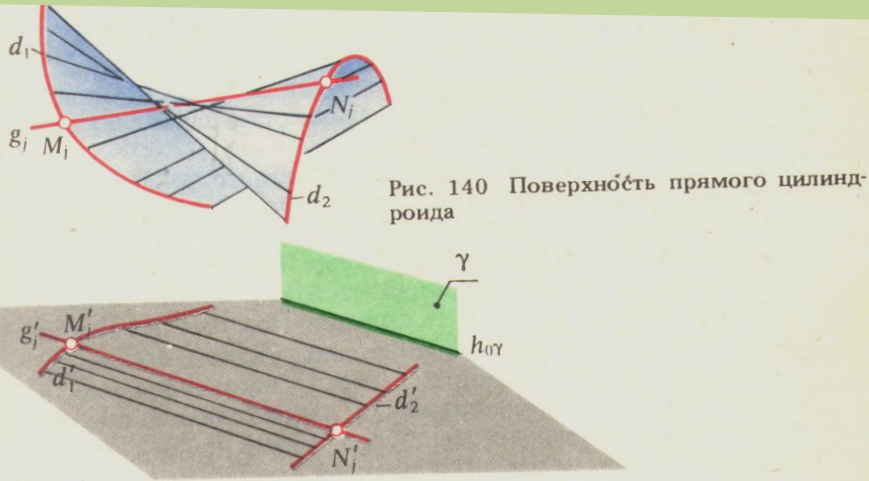
Косой цилиндр

Рис. 7.4

$Y$  – направляющая плоскость,  
Если  $\phi = 0$ ,  
то  $Y$  – плоскость параллелизма

Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)  $g \parallel \gamma$

$$\Phi(g, d_1, d_2, \gamma); [g_i \cap \{d_1, d_2\} \neq \emptyset \wedge (g_i \gamma) = 0^\circ]$$



# Поверхности Каталана

## Прямой цилиндرويد

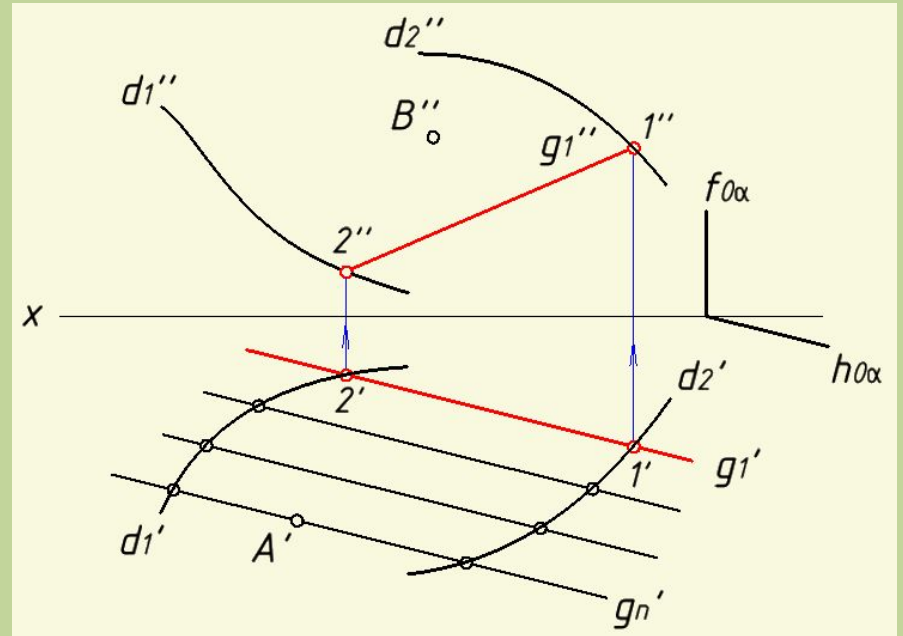
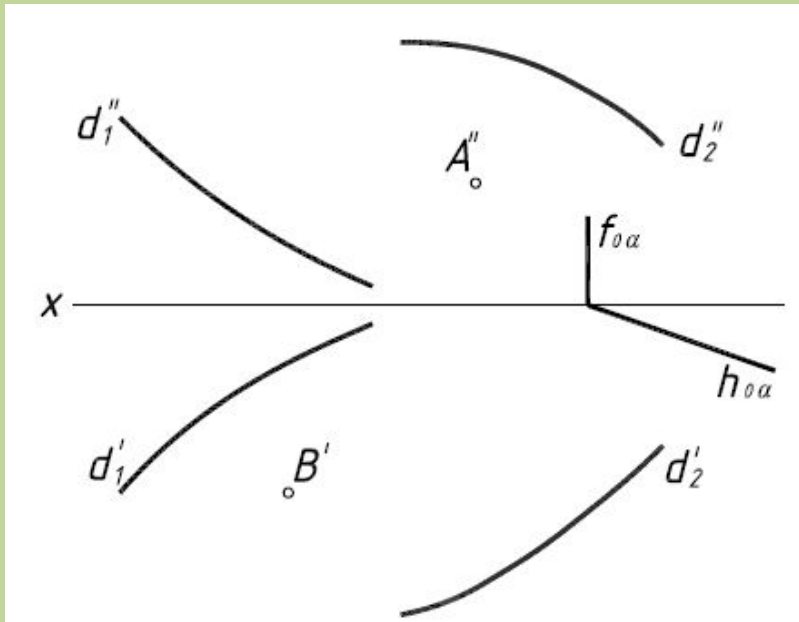


Рис. 7.5

# Прямой цилиндроид

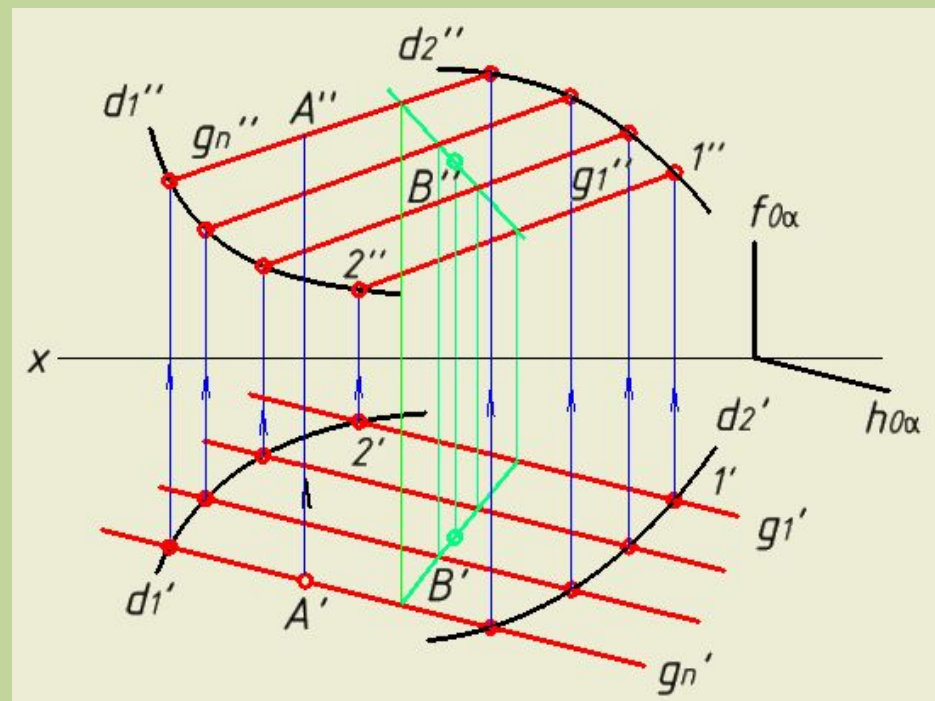
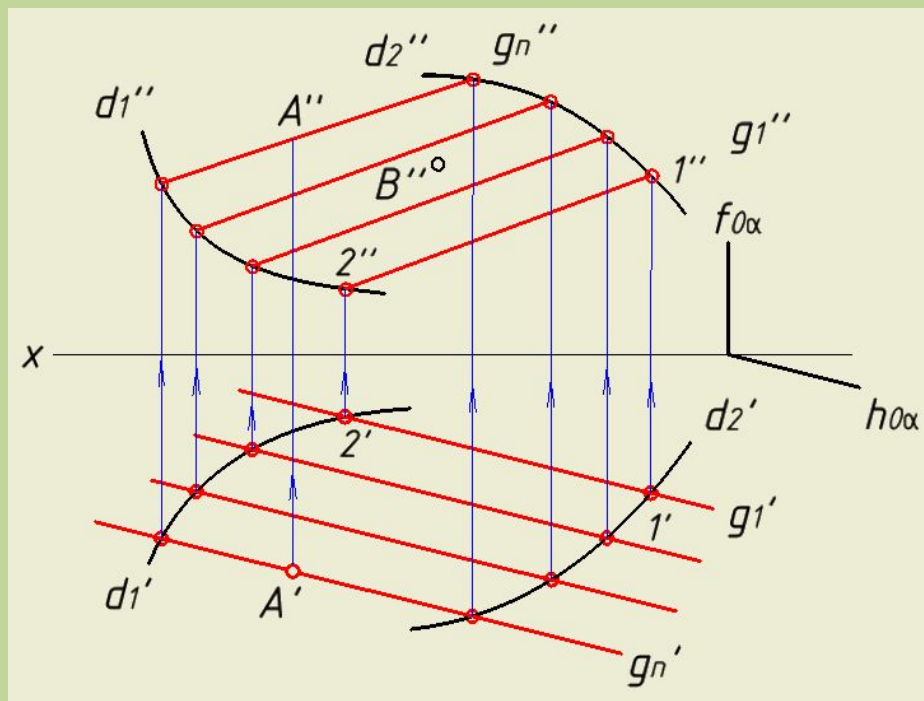
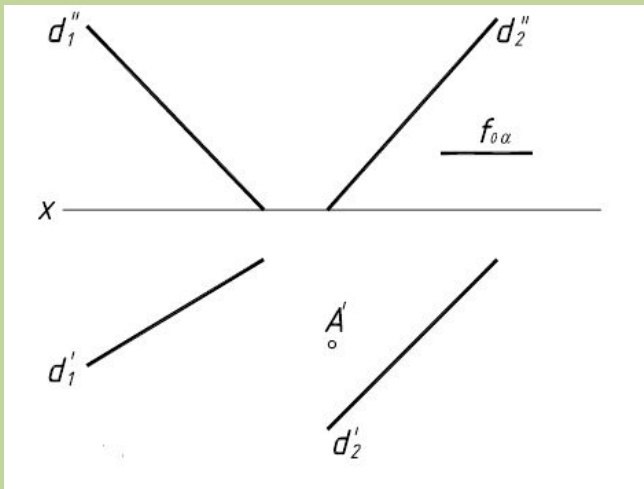


Рис. 7.5

# Гиперболический параболоид (косая плоскость)



Косая плоскость формируется при движении прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим, при этом образующая все время параллельной плоскости параллелизма.

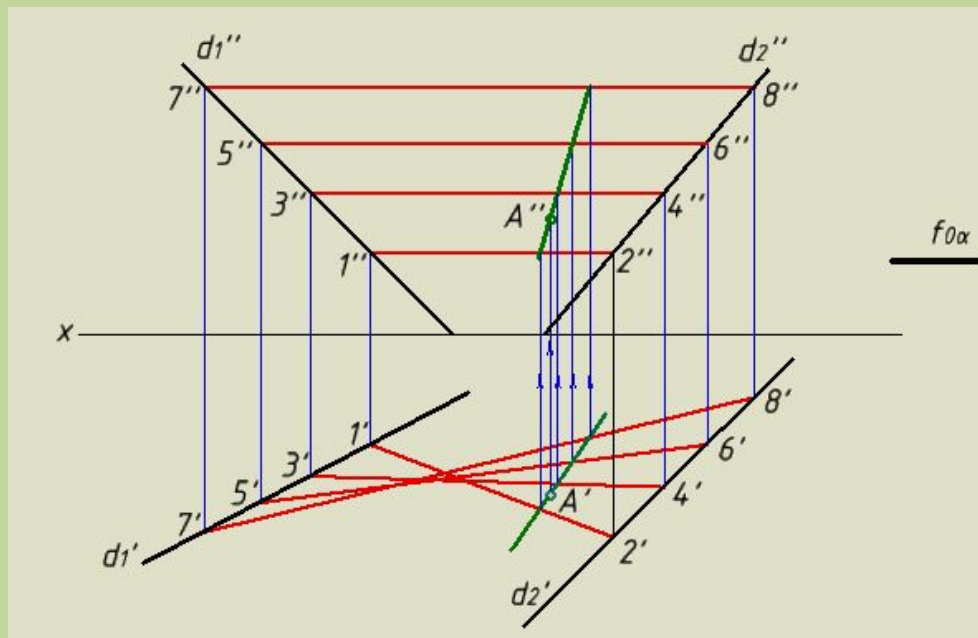
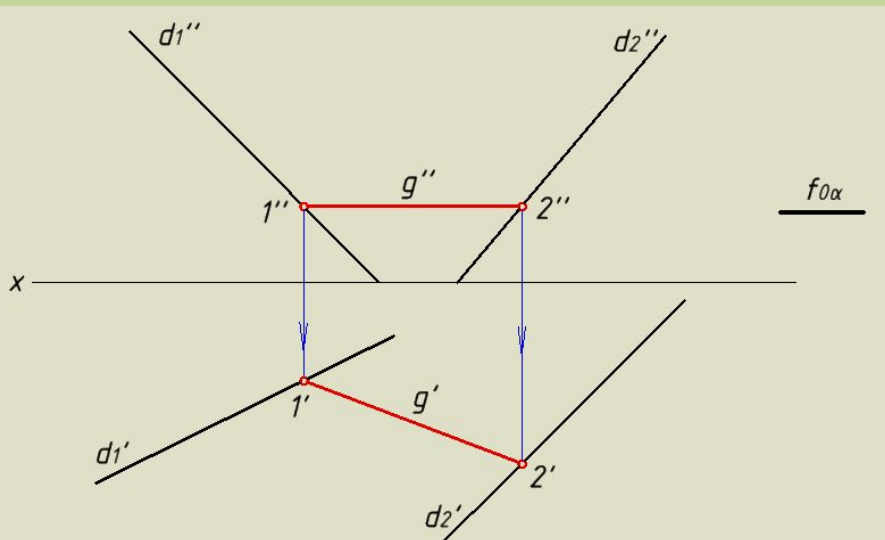


Рис. 7.6

# Линейчатые поверхности с одной направляющей

Группа линейчатых поверхностей с одной криволинейной направляющей называется **торсами**, а криволинейная направляющая таких поверхностей – **ребром возврата**.

Поверхностью с ребром возврата (торсом) называют поверхность, описываемую движением прямой ( $g$ ), касающейся некоторой пространственной кривой – направляющей  $d$ .

$$\Phi(g, d_1, S); [g_i \cap d_1 = S_i \in d_1]$$

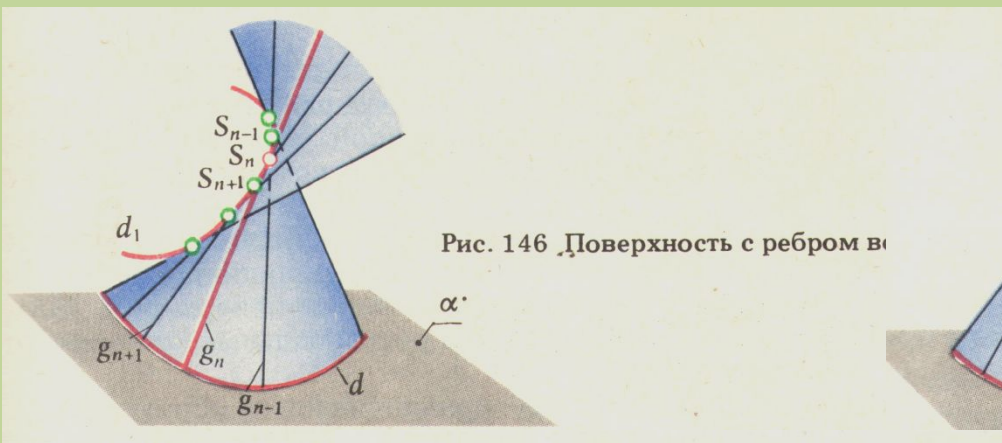


Рис. 146 Поверхность с ребром в

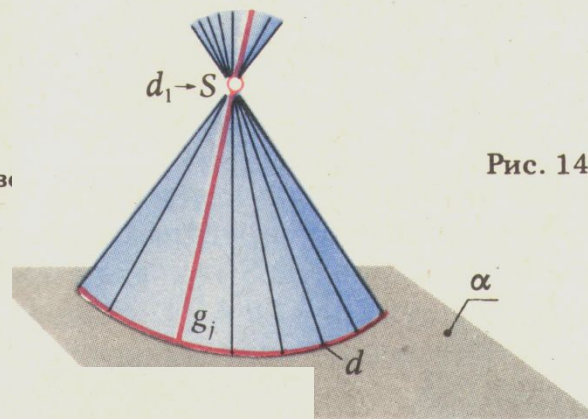


Рис. 147 Коническая поверхность

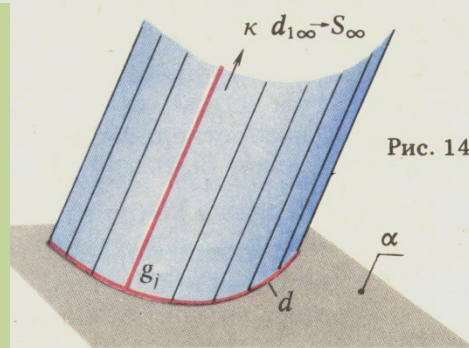


Рис. 148 Цилиндрическая поверхность

# Поверхность с ребром возврата

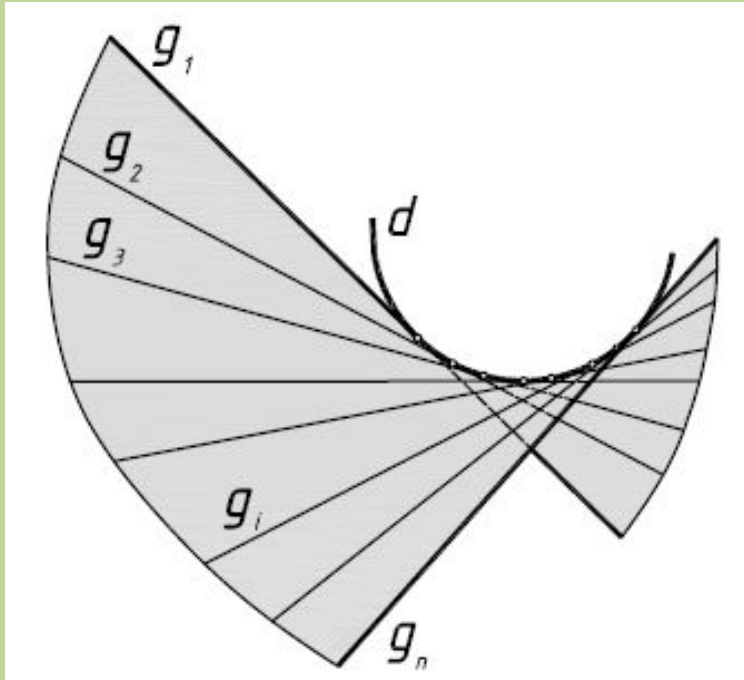


Рис. 7.7

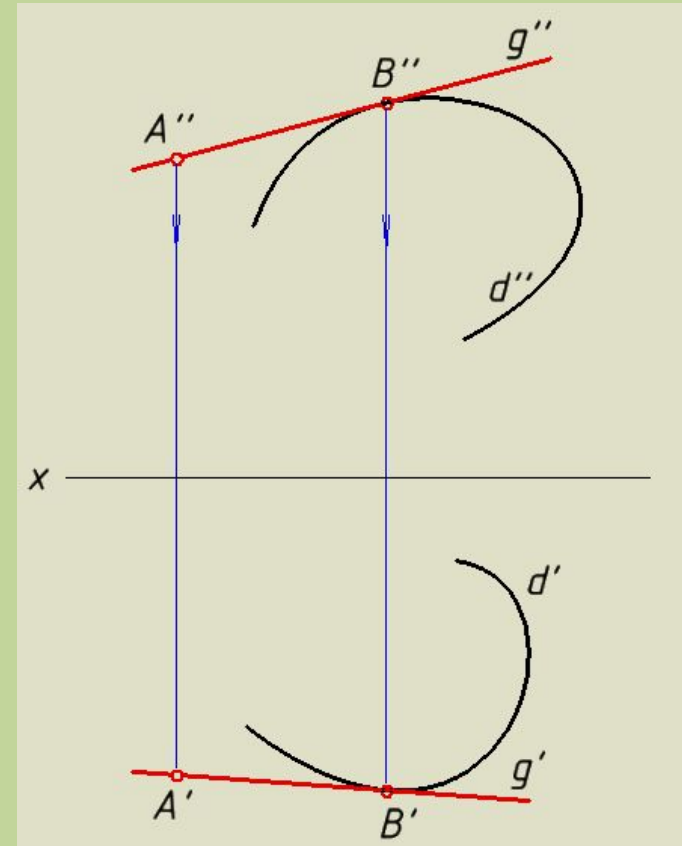


Рис. 7.8

# Цилиндрическая поверхность

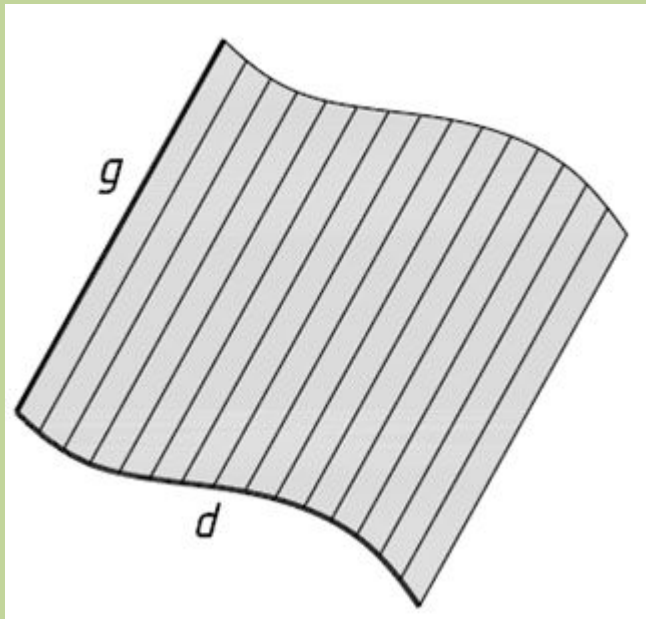


Рис. 7.9

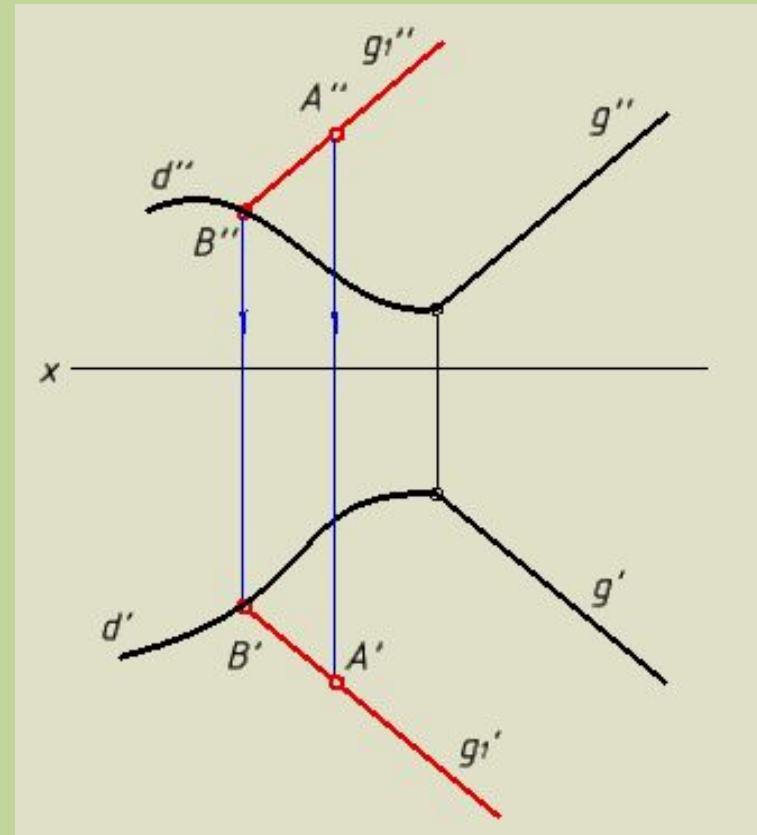


Рис. 7.11



# Коническая поверхность

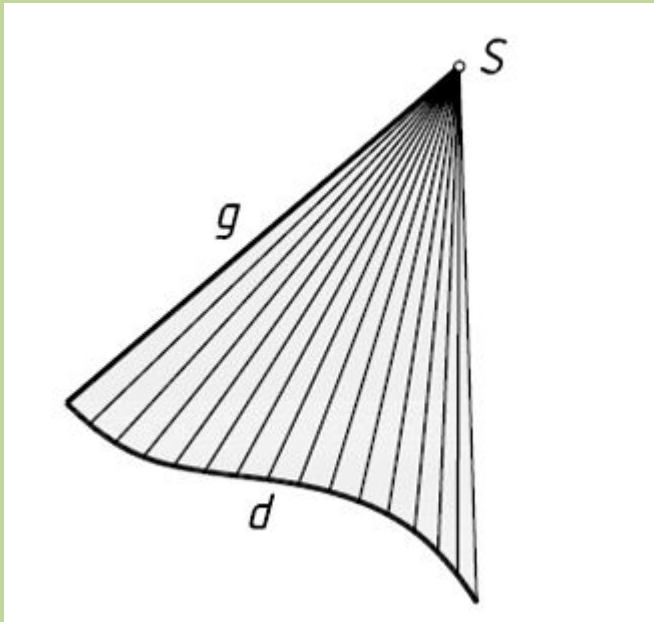


Рис. 7.10

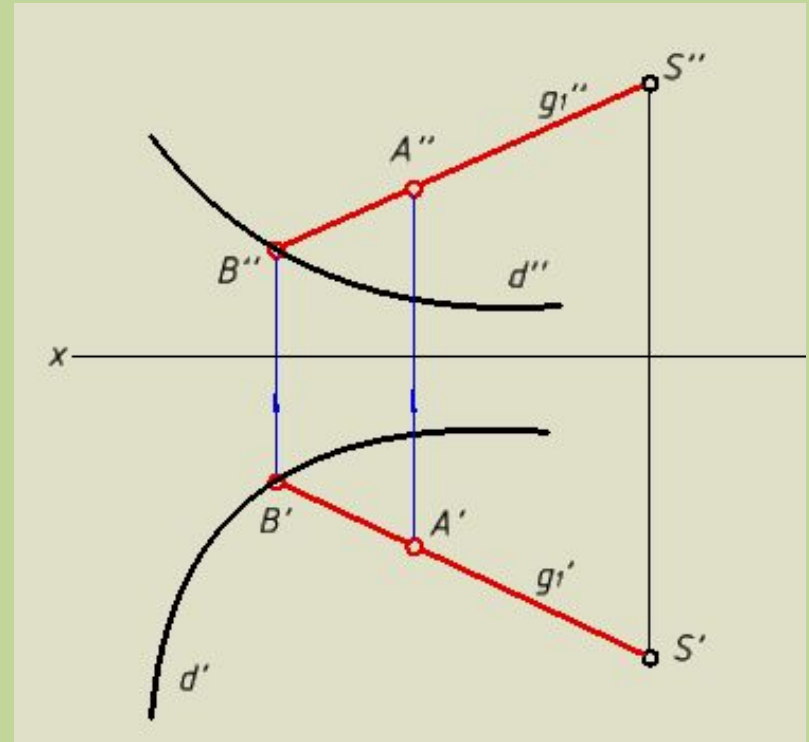


Рис. 7.12

# Подклассы поверхностей

Движение образующей  $g$  может быть задано:

- **направляющими** линиями  $d$ ;
- **законом движения** образующей, а именно:
  - **поступательным;**
  - **вращательным;**
  - **винтовым.**

## Поверхности параллельного переноса (сдвига)

– формируются при движении образующей  $g$  вдоль оси переноса. Все точки образующей перемещаются поступательно (рис. 7.13)

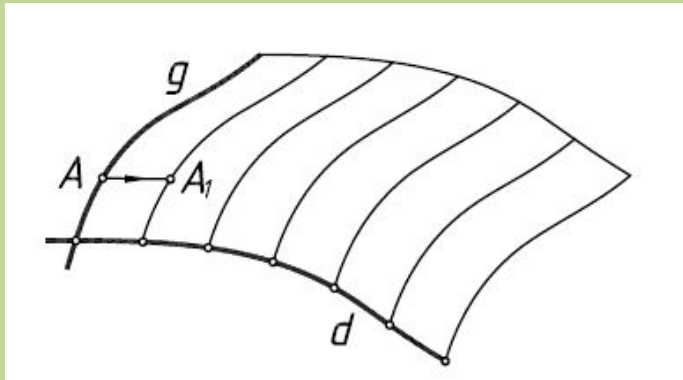
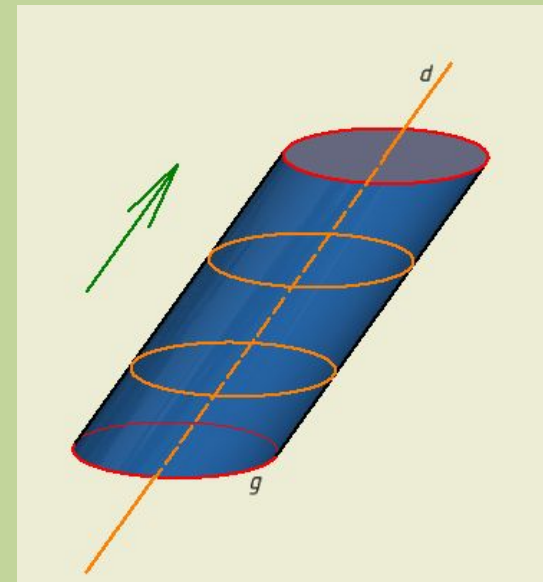


Рис. 7.13



# Поверхности вращения

- формируются при вращении образующей (прямой или кривой) вокруг неподвижной оси вращения (рис. 7.14). Каждая точка образующей ( $A, B, C$ ) перемещается по окружности ( $a, b, c$ ) с центром на оси вращения.

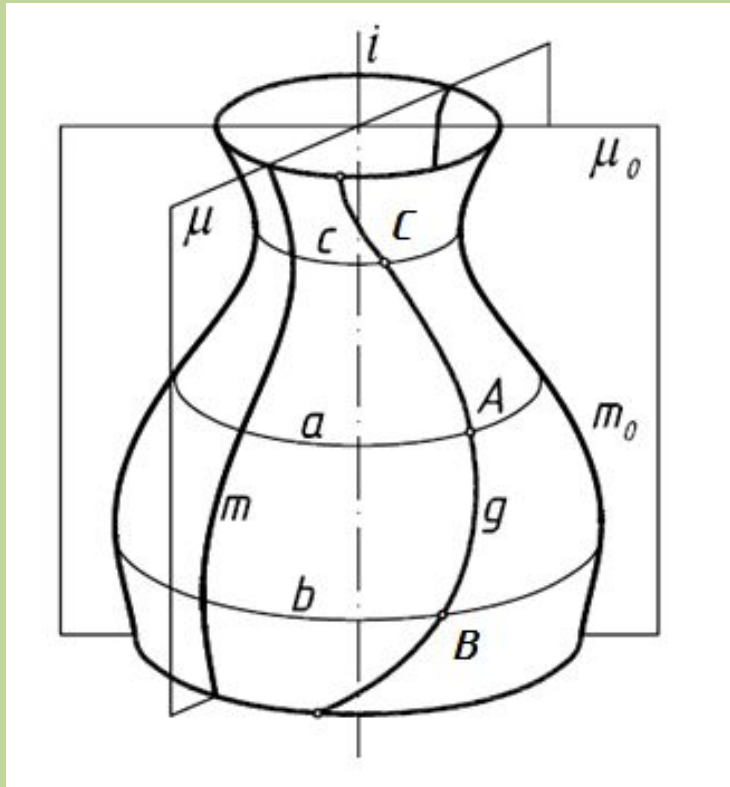


Рис. 7.14

$i$  – ось вращения

$g$  – образующая

$a, b, c$  – параллели

$b$  – экватор (наибольшая параллель)

$c$  – горло (наименьшая параллель)

$\mu$  – меридиональная плоскость

$$i \perp \mu$$

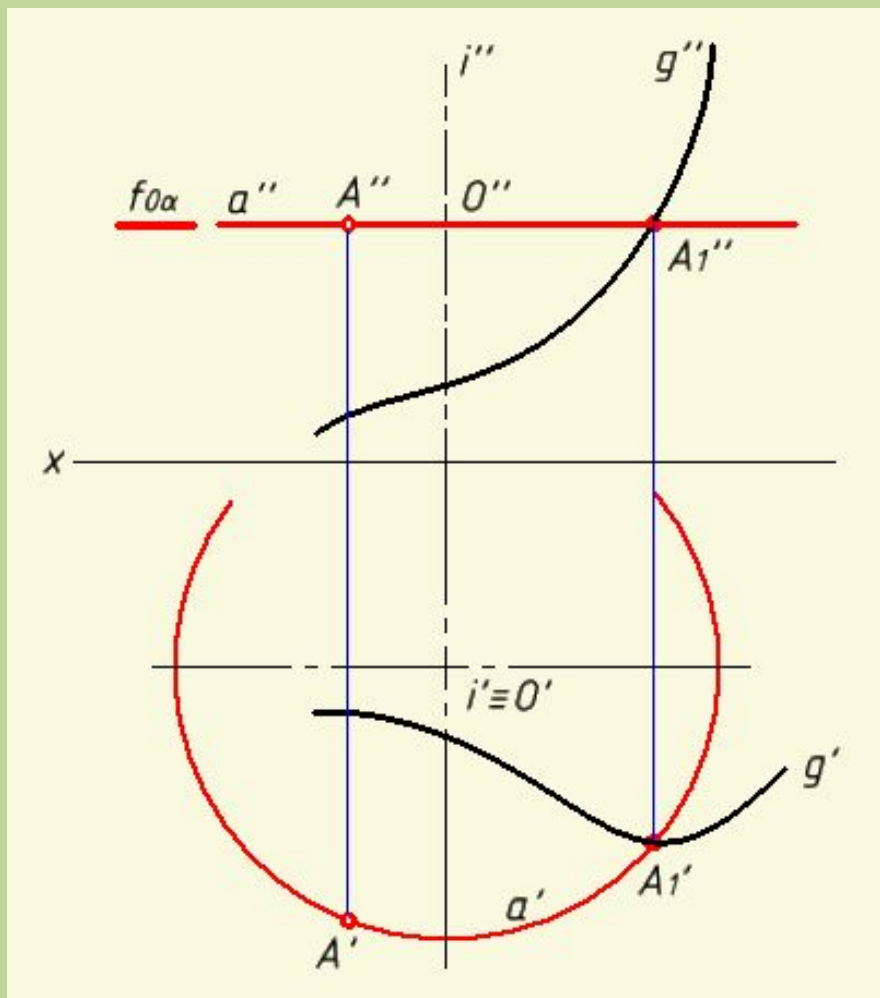
$m$  – меридиан

$\mu_0$  – плоскость главного меридиана

$$\mu_0 \parallel \pi$$

$m_0$  – главный меридиан

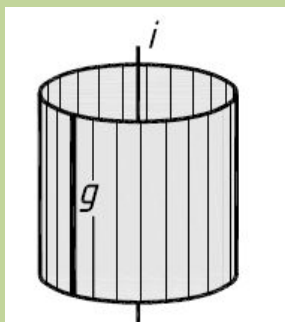
**Очерк поверхности** – границы видимости поверхности по отношению к плоскостям проекций



**Вращение** – перемещение точки по окружности в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Пересечение плоскости вращения с осью вращения – центр вращения. Расстояние от точки до центра вращения – радиус вращения

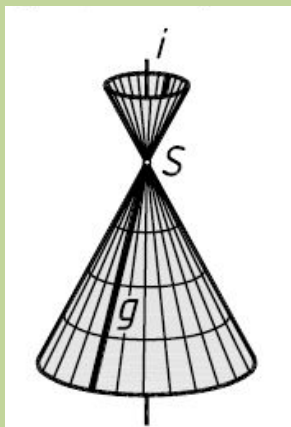
Рис. 7.15

## Поверхности вращения с прямолинейной образующей



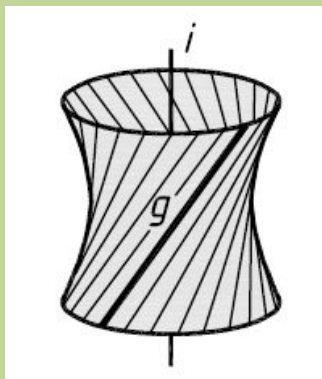
Цилиндрическая поверхность вращения

$$g \parallel i$$



Коническая поверхность вращения

$$g \cap i$$



Однополостный гиперboloид вращения

$$g \perp i$$

Рис. 7.16

# Цилиндрическая поверхность

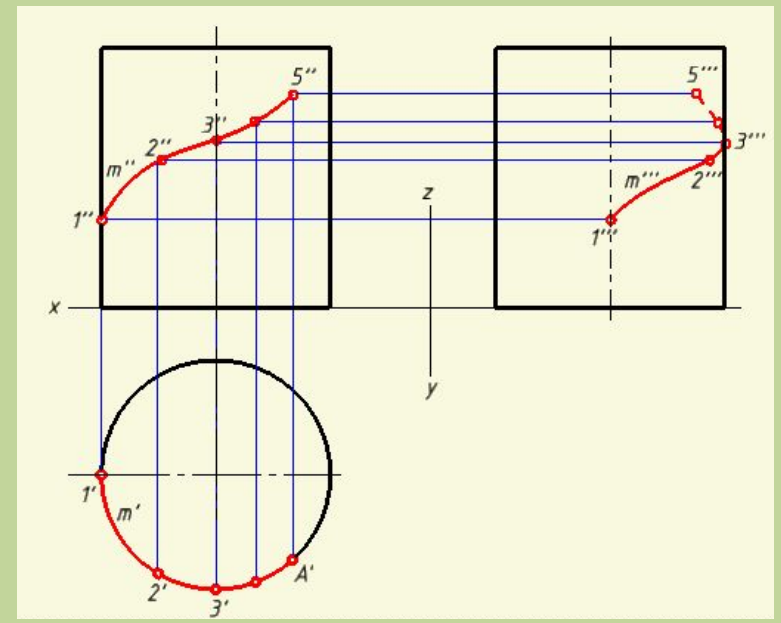
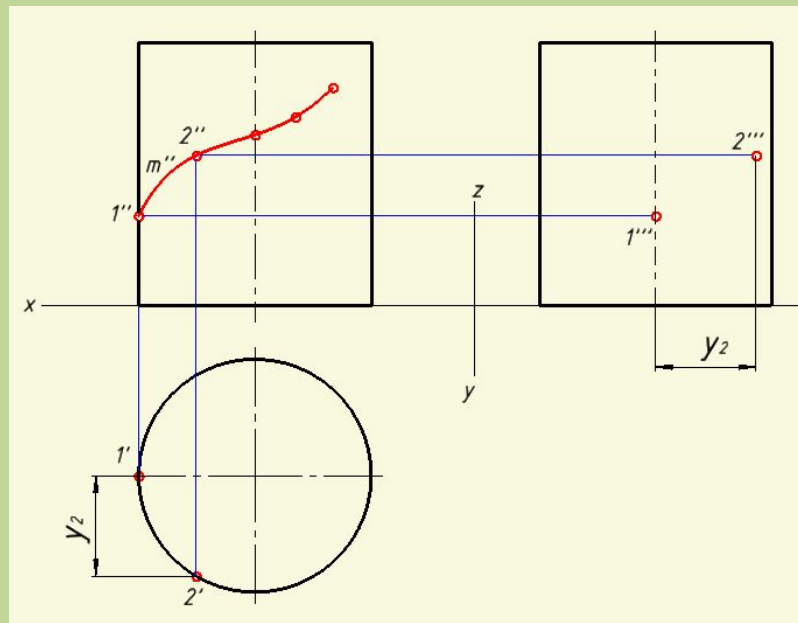


Рис. 7.17

# Коническая поверхность

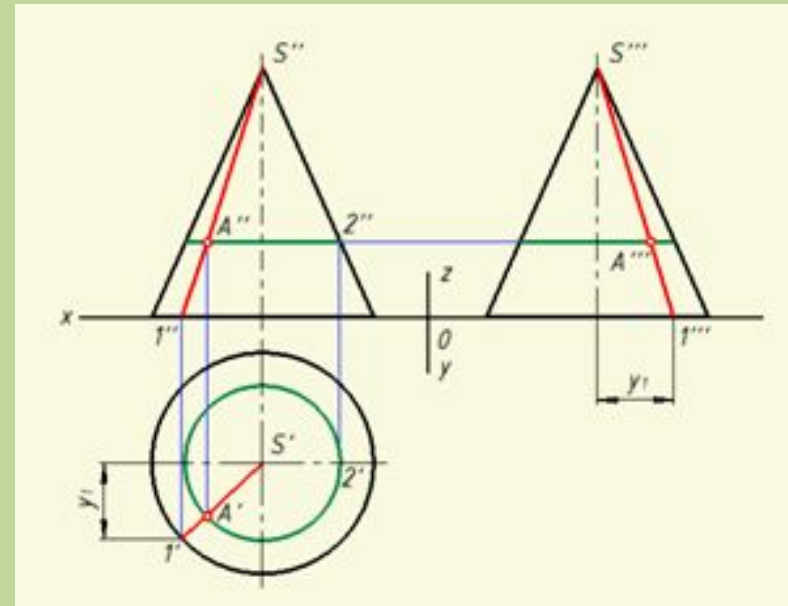
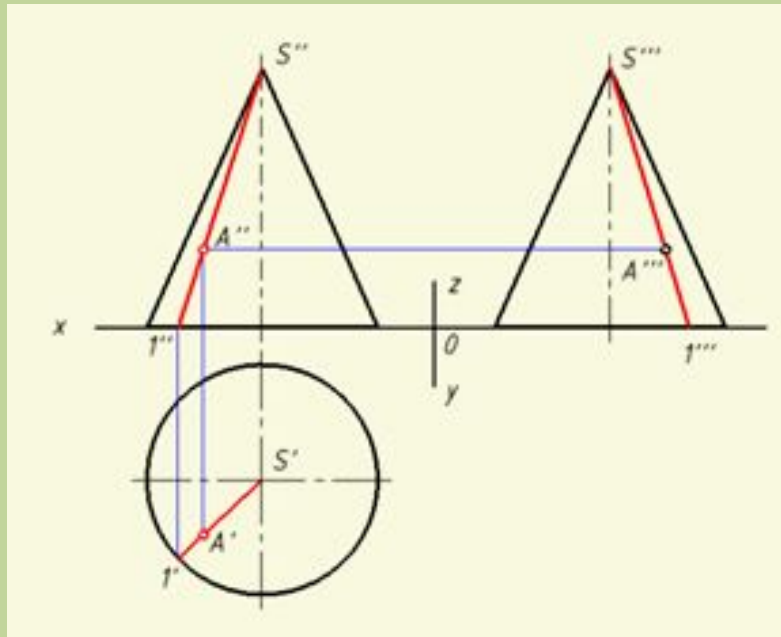


Рис. 7.18

# Поверхности вращения с образующей окружностью

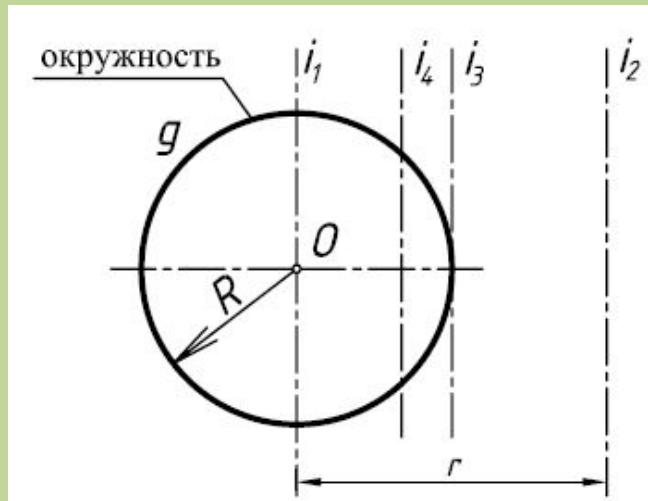


Рис. 7.19

Сфера  
 $r=0$



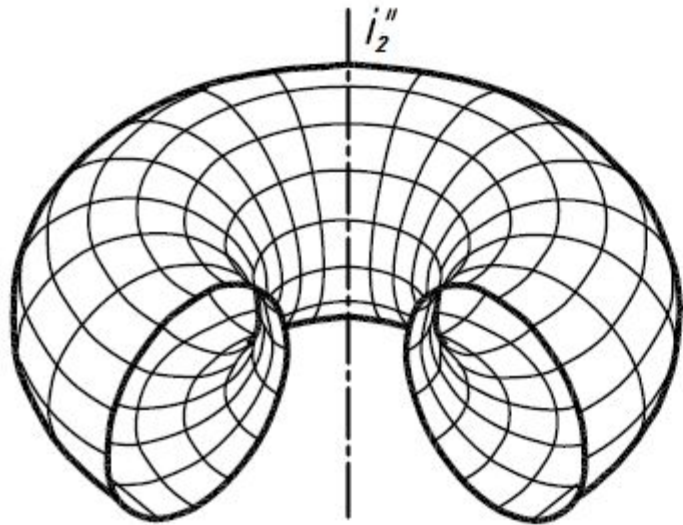
Рис. 7.20

**Тор** – поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, не проходящей через центр этой окружности

При вращении окружности вокруг ее диаметра образуется **сфера**

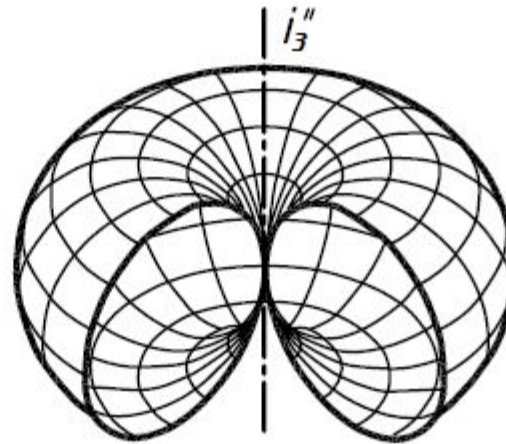


# Торовые (кольцевые) поверхности



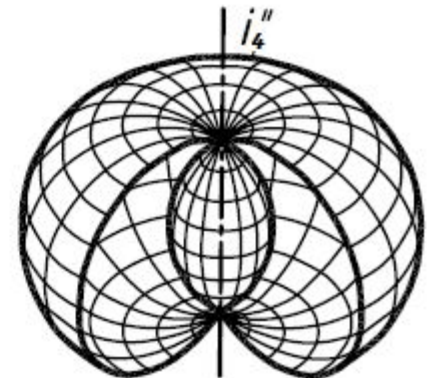
а) открытая

$$r > R$$



б) закрытая

$$r = R$$

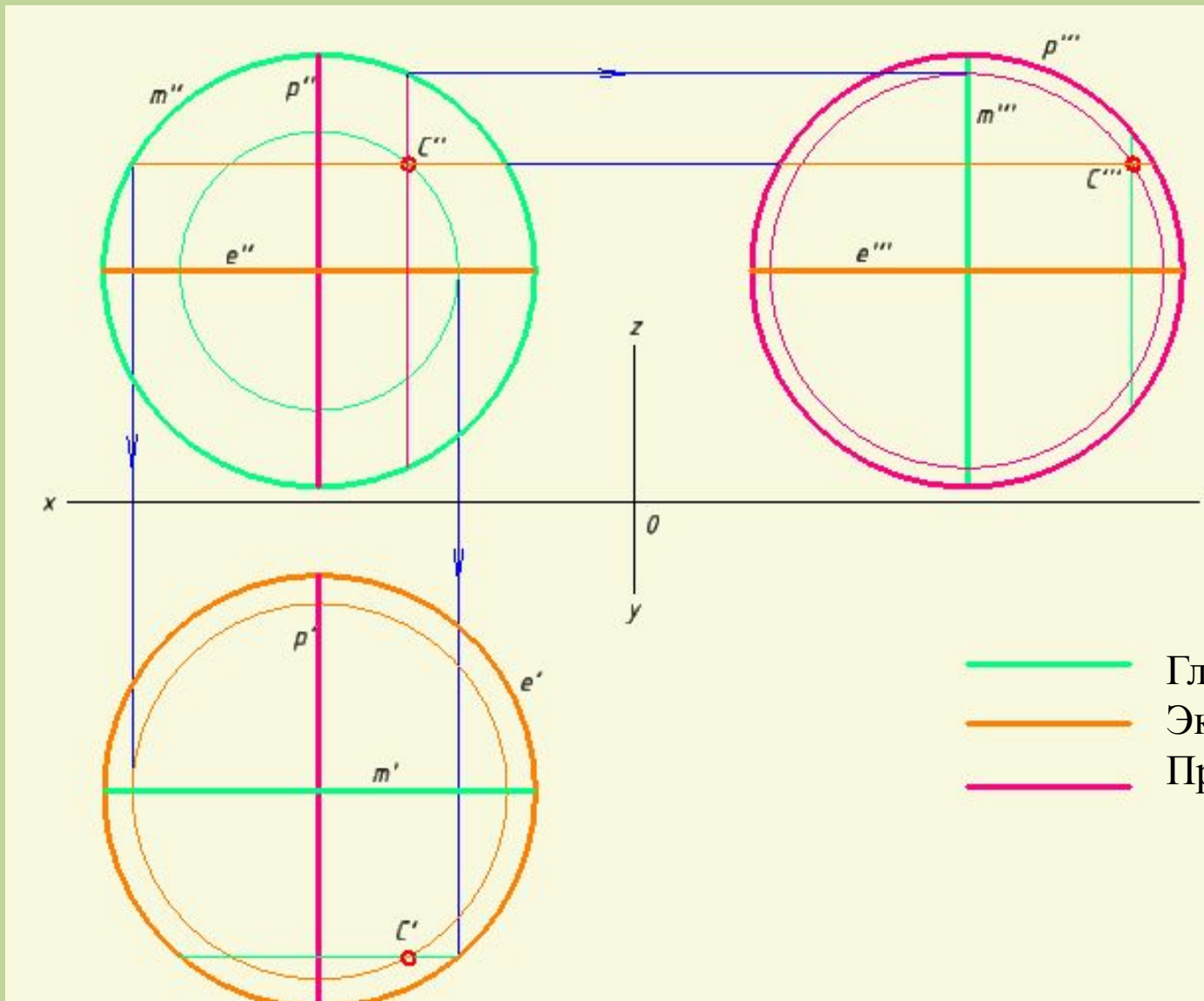


в) самопересекающаяся

$$r < R$$

Рис. 7.21

# Поверхности вращения с образующей окружностью



- Главный меридиан
- Экватор
- Профильный меридиан

# Построение проекций точек, принадлежащих торовой поверхности

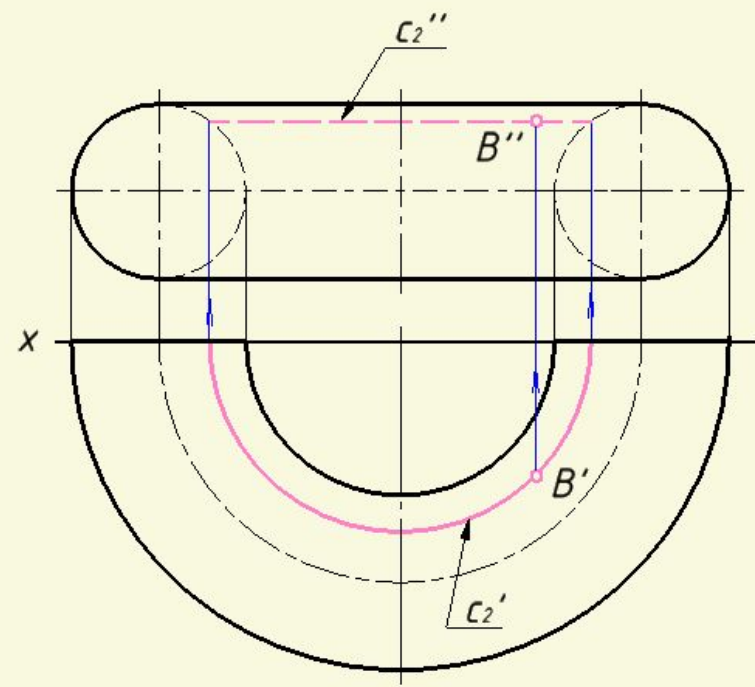
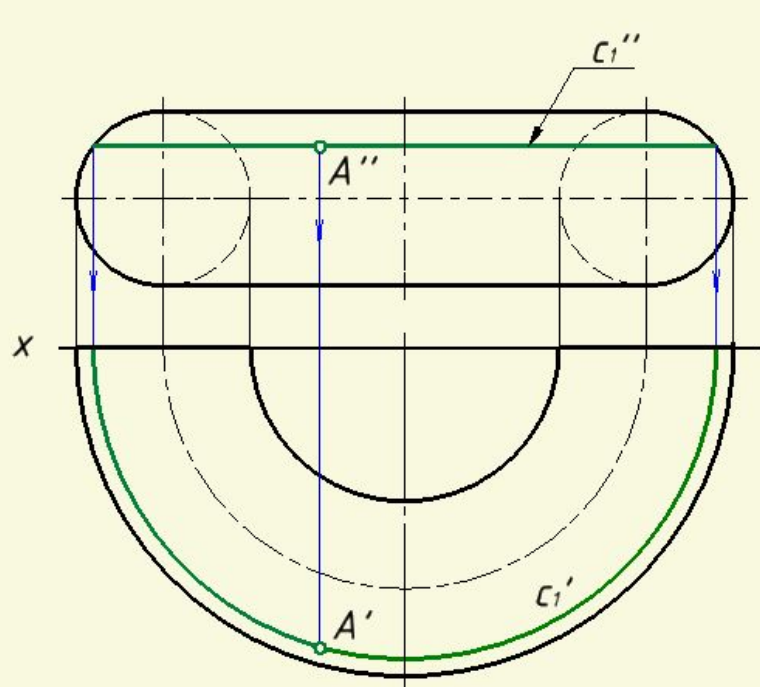


Рис. 7.23

# Поверхности вращения с образующей кривой второго порядка

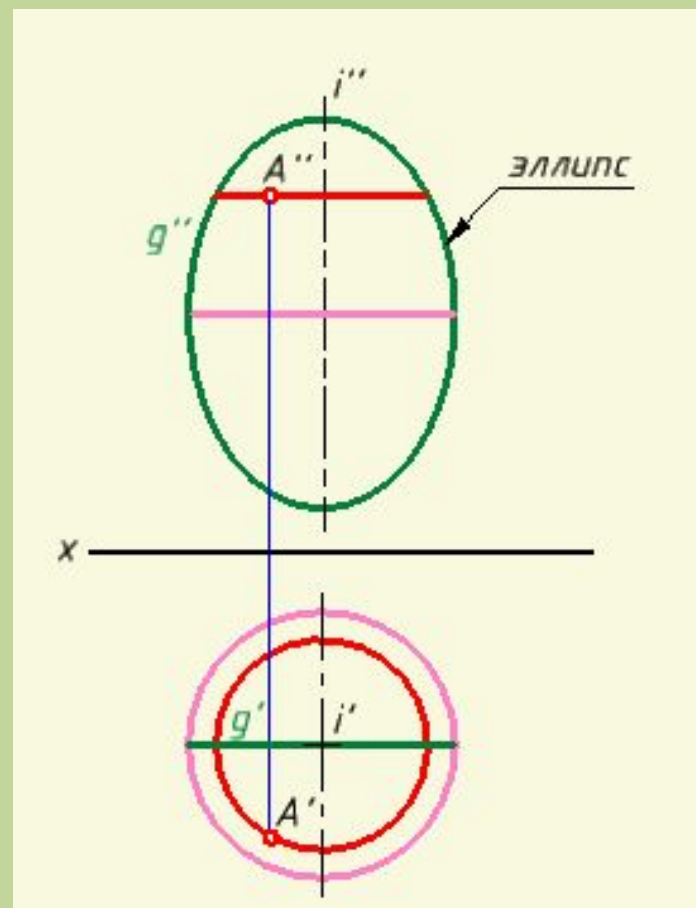
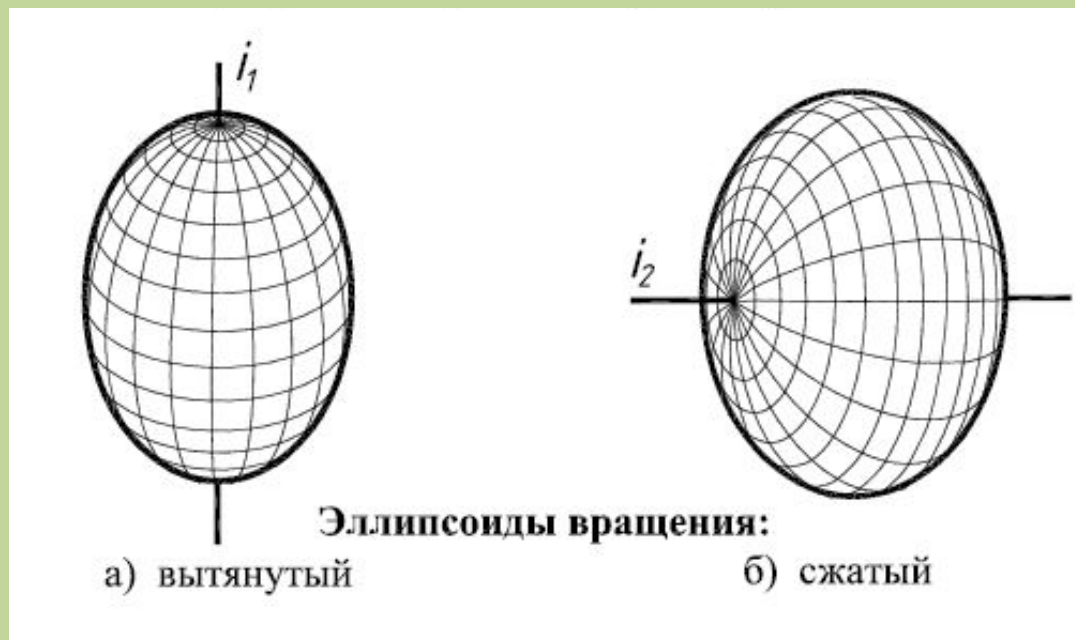


Рис. 7.24

# Поверхности вращения с образующей кривой второго порядка

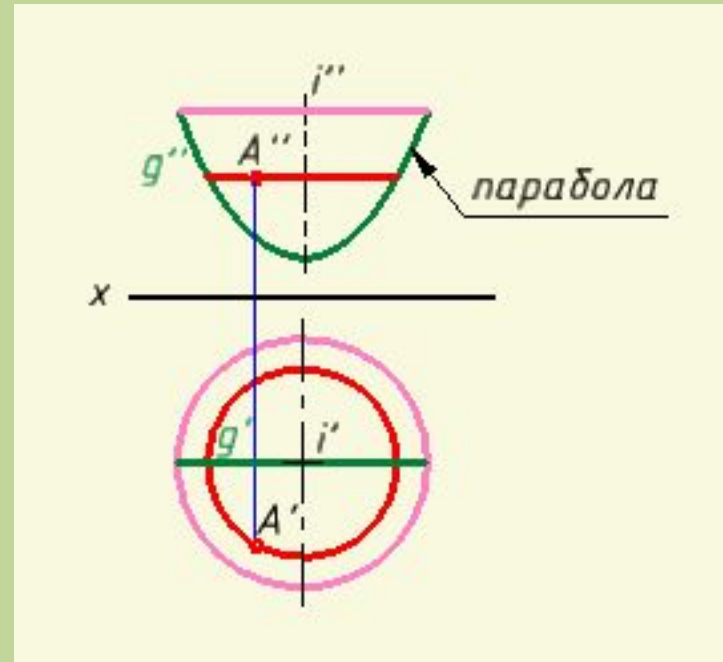


Рис. 7.25

# Поверхности вращения с образующей кривой второго порядка

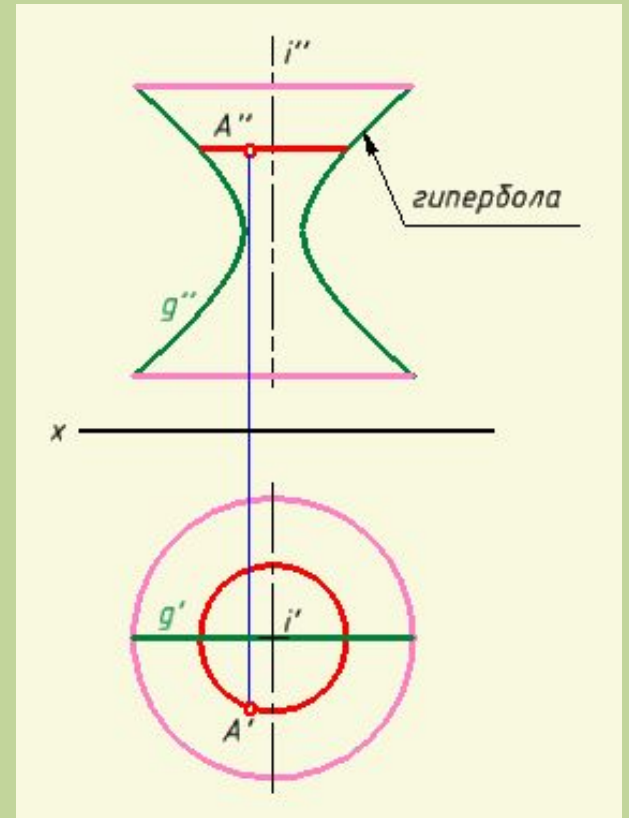
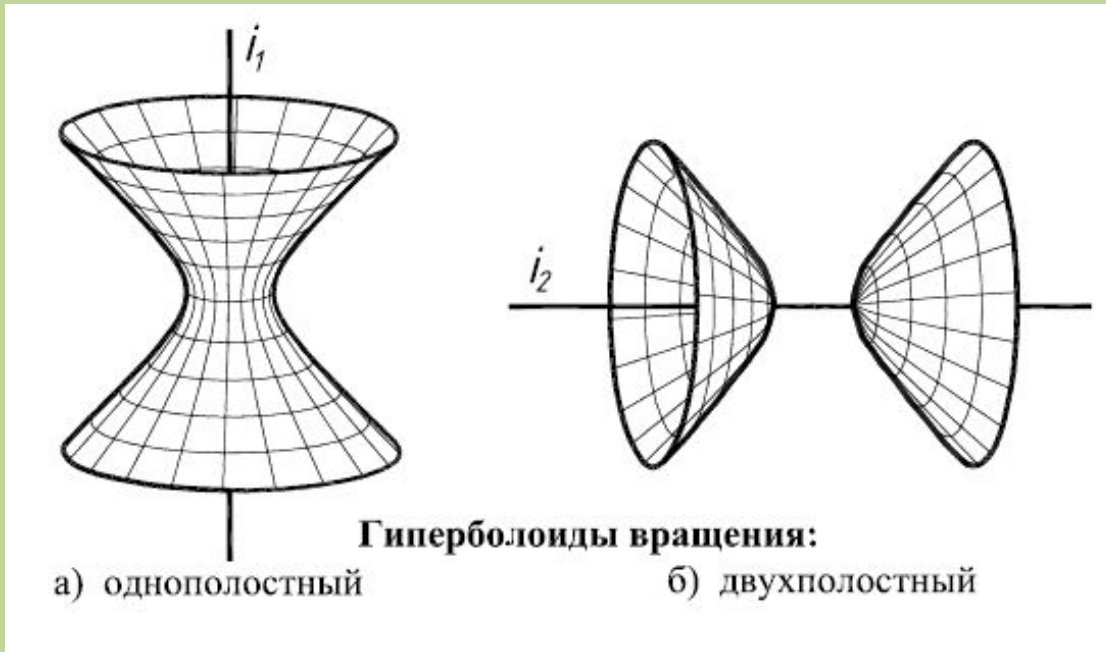


Рис. 7.26

# ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Винтовая поверхность формируется **при винтовом движении образующей (прямой или кривой) вокруг оси.**

Шаг ( $P$ ) винтовой поверхности – **перемещение образующей вдоль оси за один оборот**

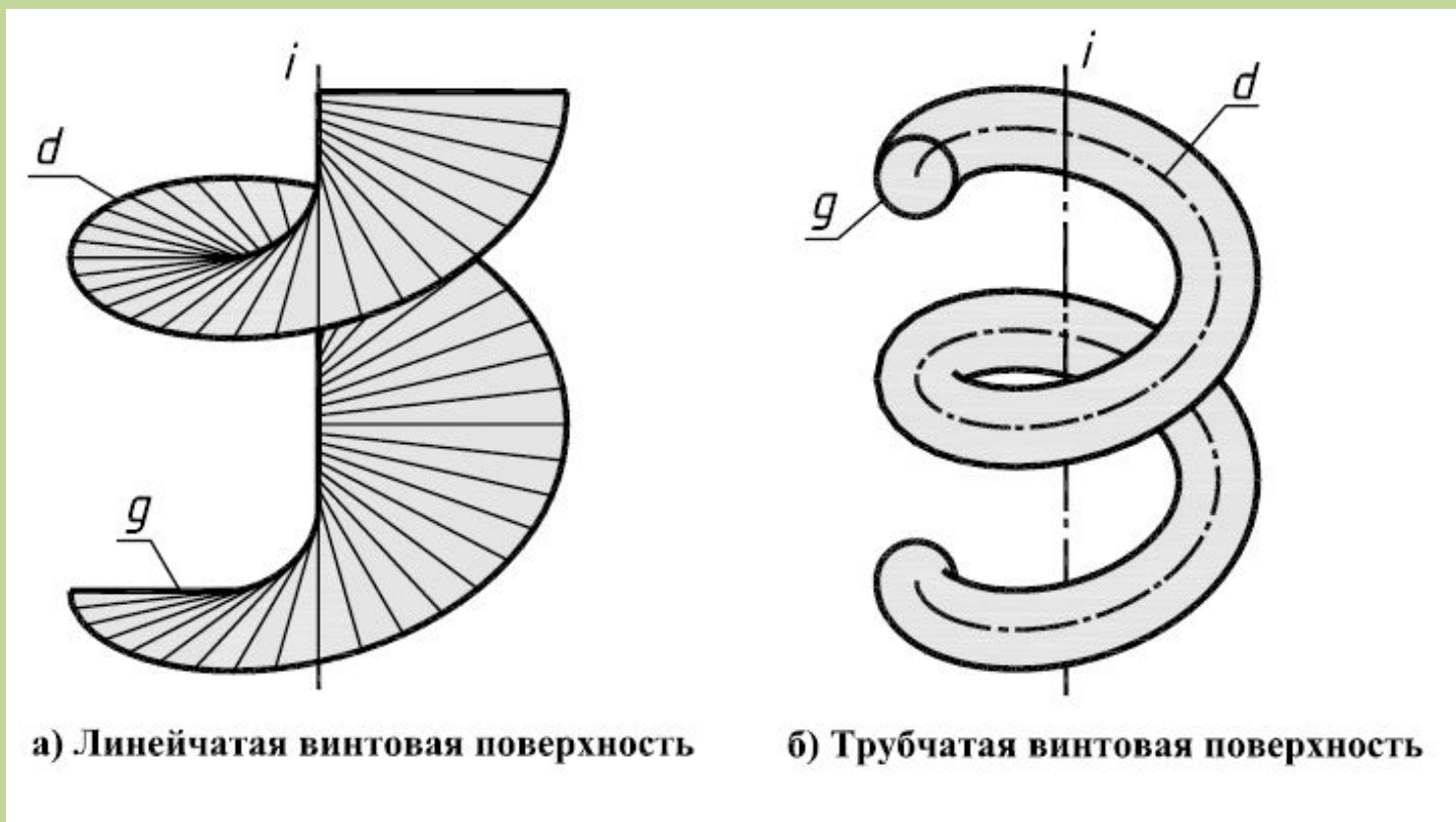


Рис. 7.27

# ГЕЛИКОИДЫ

Геликоид – винтовая поверхность с прямолинейной образующей.

В зависимости от положения прямолинейной образующей  $g$  по отношению к оси  $i$ , различают следующие виды геликоидов:

$g \perp i$  - геликоид **прямой**

$g \text{ не } \perp i$  - геликоид косо́й (**наклонный**)

$g \cap i$  - **закрытый** геликоид

$g \parallel i$  - **открытый** геликоид



# Геликоид прямой ( $g \perp i$ ), закрытый ( $g \cap i$ )

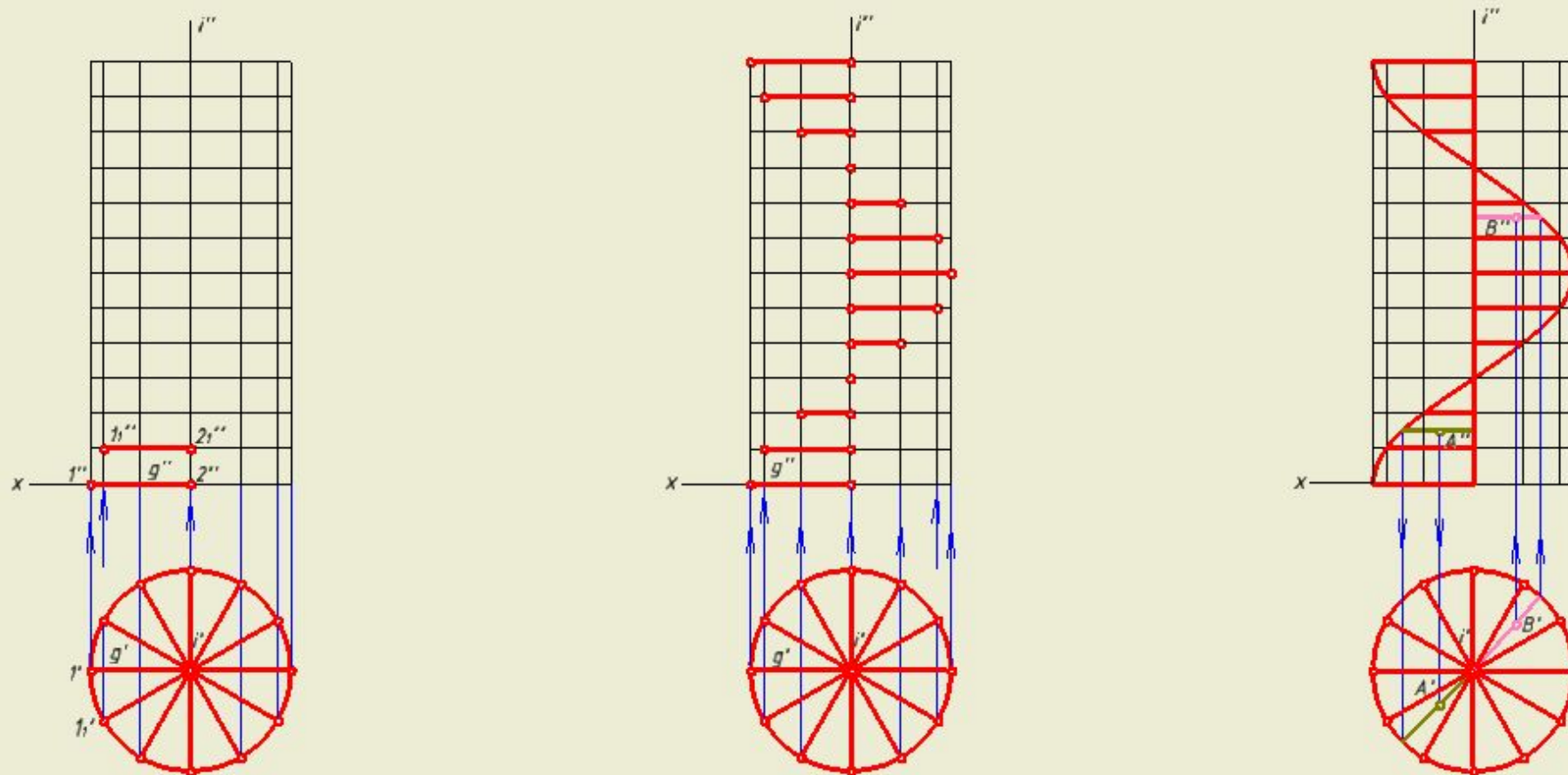


Рис. 7.28