

ПРЕДМЕТ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

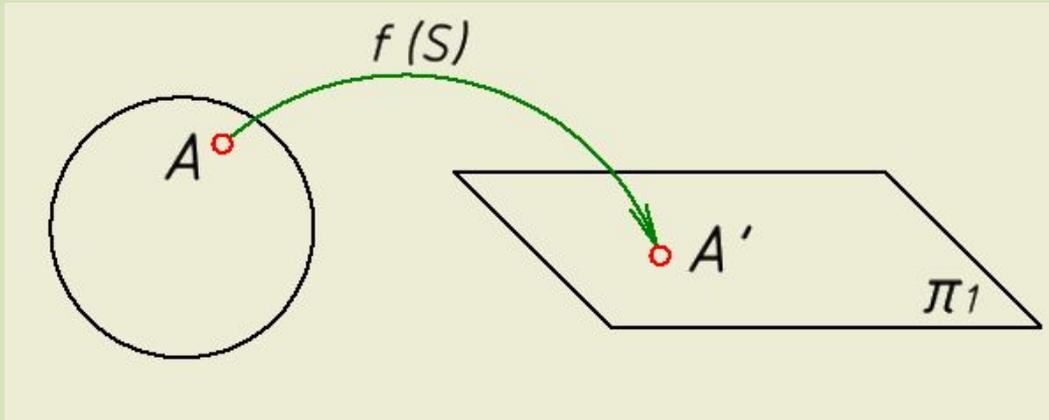
Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные фигуры, представляющие совокупность точек, линий, поверхностей и тел, изучаются по их проекционным изображениям.

Начертательная геометрия изучает:

- ***Методы графического отображения*** пространственных фигур на поверхностях отображения;
- ***Способы решения позиционных и метрических задач***, связанных с этими фигурами, по их графическим изображениям.

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Проецирование – **отображение фигур пространства на поверхности проекций**, причем такое, что каждой точке фигуры ставится в соответствие единственная точка – ее проекция.



Аппарат проецирования :

- что отображаем
- на что отображаем
- каким способом отображаем

Две основные задачи проецирования:

1. **Прямая задача** – по оригиналу получить изображение
2. **Обратная задача** – по проекции получить оригинал

Принятые обозначения:

В пространстве	На плоскости проекций
<u>ТОЧКИ</u>	
$A, B, C...$	$A'; B'; C'; A''; B''; C''...$
<u>ЛИНИИ</u>	
$a, b, c, l...$	$a'; b'; ... a''; b''...$
<u>ПОВЕРХНОСТИ</u>	
$\alpha, \beta, \gamma...$	$\alpha'; \beta'; \gamma'...$

Проекции с использованием прямых линий – проецирующих лучей

Проекция точки – точка пересечения проецирующей прямой, проходящей через данную точку, с плоскостью проекций.

Проекция геометрической фигуры – множество проекций ее точек.

След геометрической фигуры – фигура ее пересечения с плоскостью проекций.

Конкурирующие точки – точки, лежащие на одной проецирующей прямой.

Центральное проецирование

Центральное проецирование – отображение, при котором **все** проецирующие прямые проходят через одну точку – центр проецирования

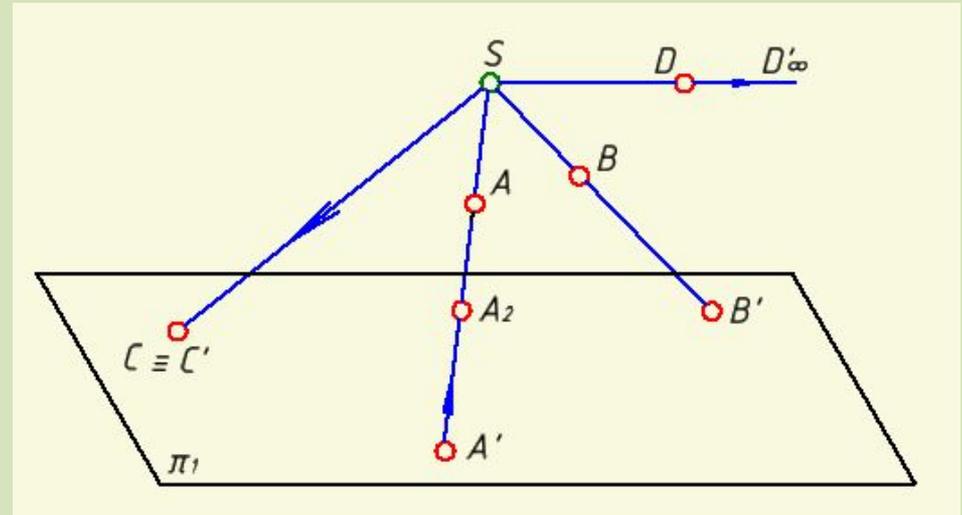
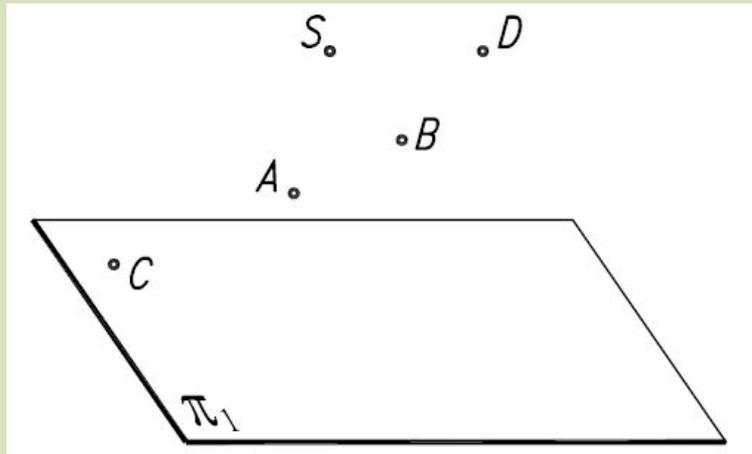


Рис. 1.1

S – центр проецирования
 π_1 – плоскость проекций

SA', SB' – проецирующие лучи
 A' – центральная проекция точки A

Центральное проецирование

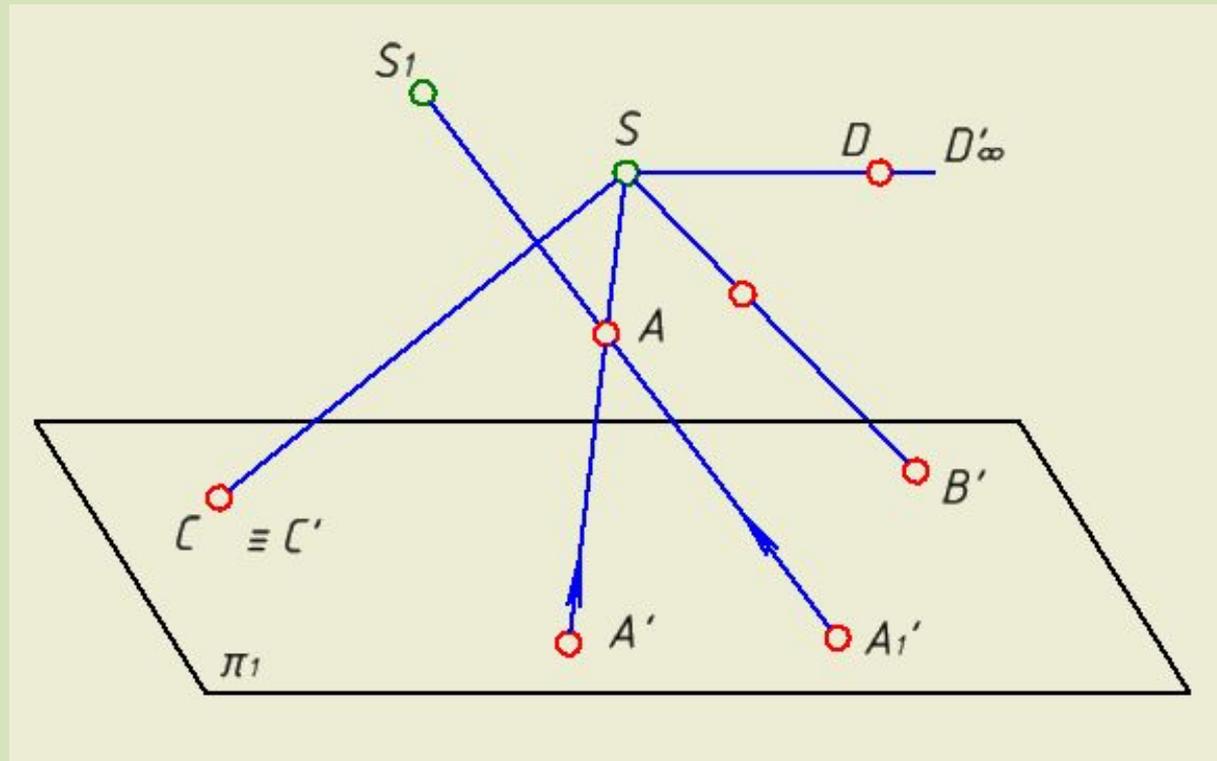


Рис. 1.1

S_1 – центр проецирования

S_1A_1' , SB_1' – проецирующие лучи

A_1' – центральная проекция точки A

Параллельное проецирование

Параллельное проецирование – отображение, при котором **все** проецирующие прямые проходят параллельно заданному направлению

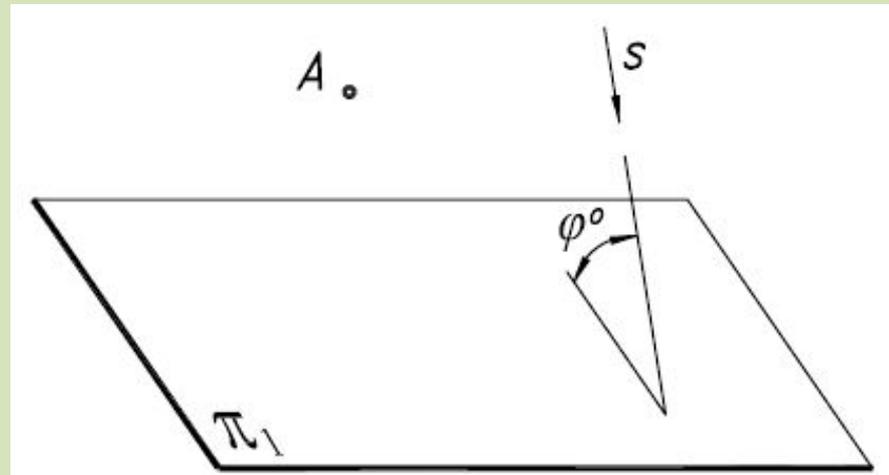


Рис. 1.2

S – направление проецирования, $\phi \neq 90^\circ$

π_1 – плоскость проекций

Параллельное проецирование

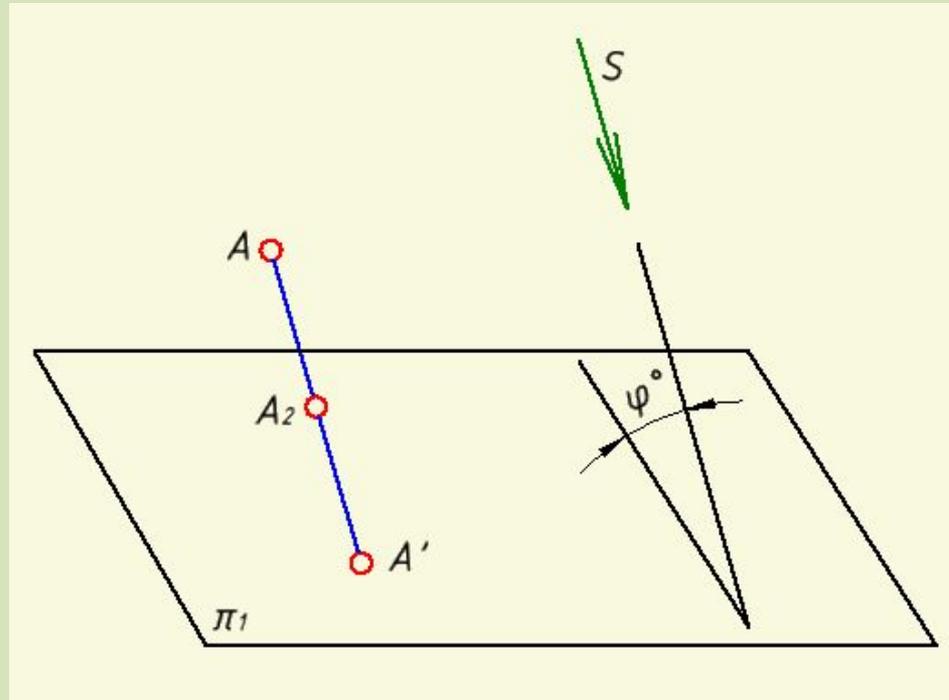


Рис. 1.2

S – направление проецирования, $\phi \neq 90^\circ$

π_1 – плоскость проекций

AA' – проецирующий луч, $AA' \parallel S$

A' – параллельная проекция точки A

Параллельное проецирование

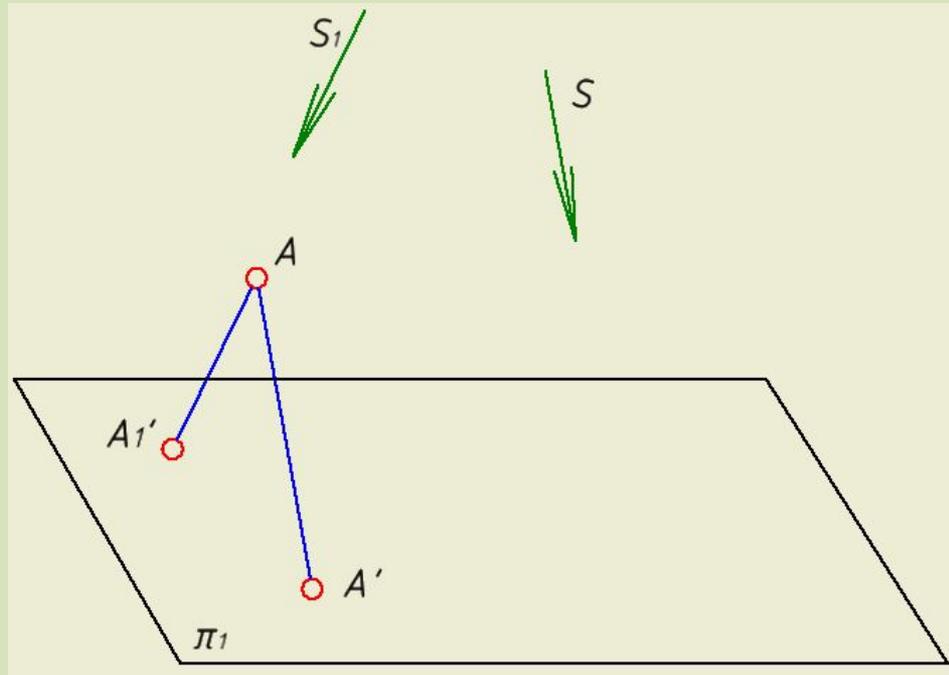


Рис. 1.2

S – направление проецирования, $\phi \neq$

90°

AA' – проецирующий луч, $AA' \parallel S$

A' – параллельная проекция точки A

S_1 – направление проецирования, $\phi_1 \neq$

90°

AA_1' – проецирующий луч, $AA_1' \parallel S_1$

A_1' – параллельная проекция точки A

Ортогональное проецирование

Ортогональное проецирование – отображение, при котором **все проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций**

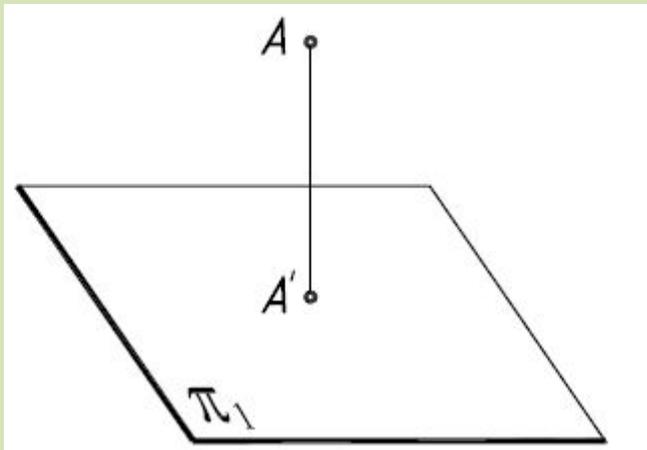
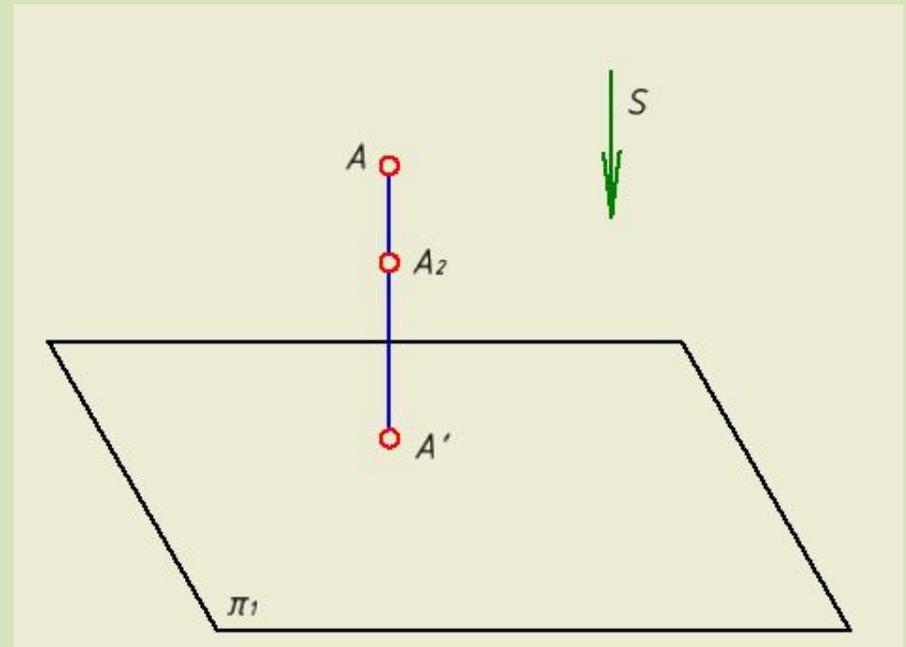


Рис. 1.3



S – направление проецирования, $\phi = 90^\circ$ $S \perp \pi_1$

π_1 – плоскость проекций

AA' – проецирующий луч, $AA' \perp \pi_1$

A' – ортогональная проекция точки A

Ортогональное проецирование

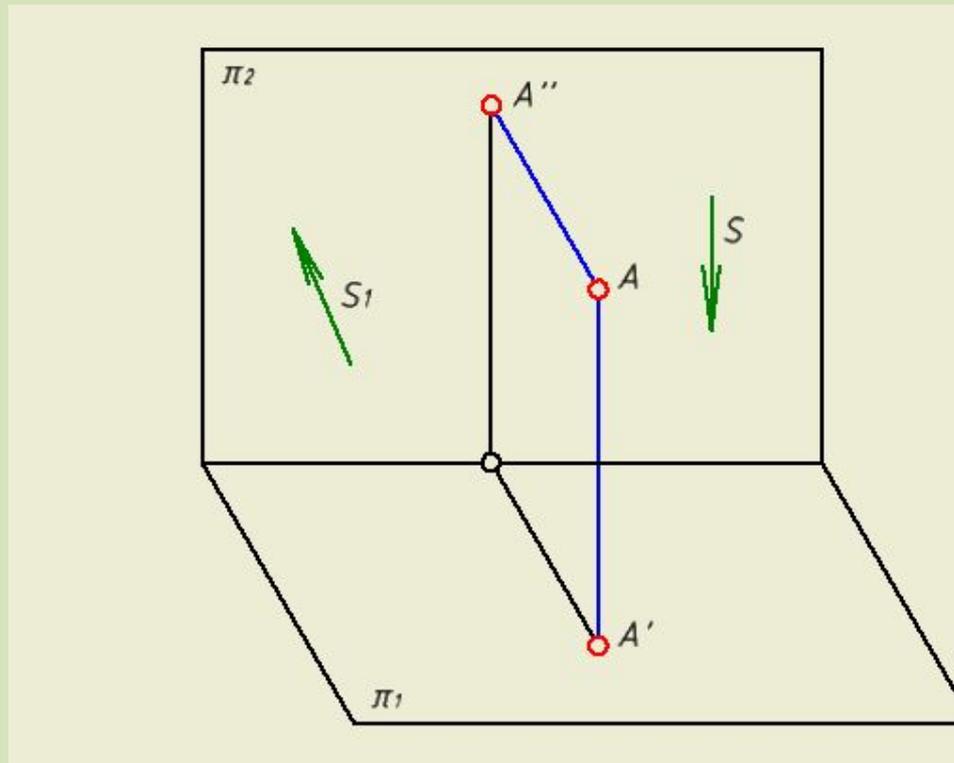
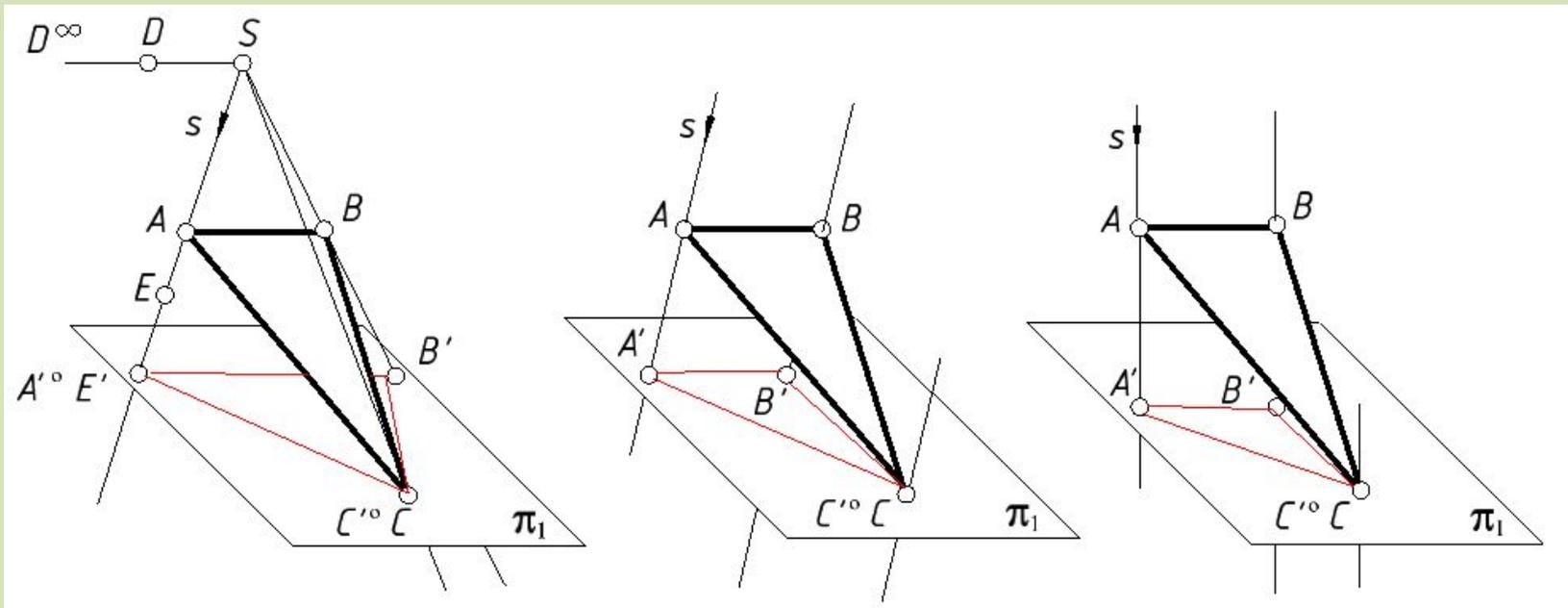


Рис. 1.3

- S – направление проецирования, $\phi = 90^\circ$ $S \perp \pi_1$
 S_1 – направление проецирования, $\phi_1 = 90^\circ$ $S_1 \perp \pi_2$
 π_1, π_2 – плоскости проекций
 AA', AA'' – проецирующие лучи, $AA' \perp \pi_1, AA'' \perp \pi_2$
 A', A'' – ортогональные проекции точки A



Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь **две ее проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.**

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Инвариантные свойства ортогонального проецирования

Инвариантными или неизменными называются такие свойства геометрических фигур и отношений между ними, которые **не изменяются в процессе отображения.**

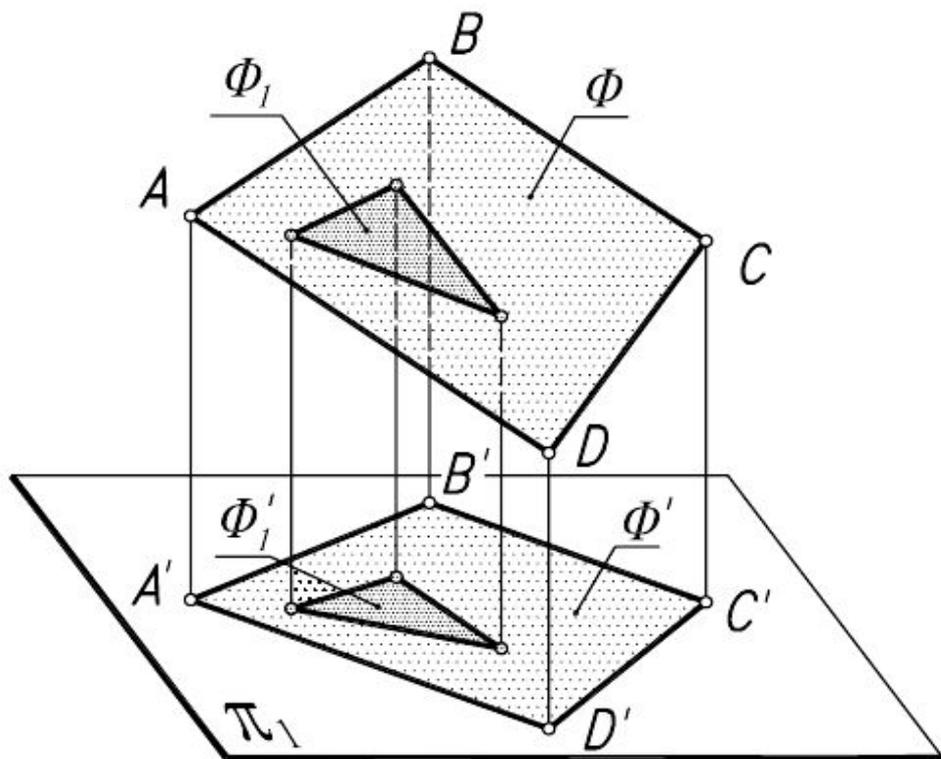


Рис.1.4

1. Проекция точки – есть точка
 A' – проекция точки A
 B' – проекция точки B
2. Проекция прямой, в общем случае, есть прямая
 $A'B'$ – проекция прямой AB
 $C'D'$ – проекция прямой CD
3. Если фигура Φ_1 принадлежит фигуре Φ , то проекция фигуры Φ_1 принадлежит проекции фигуры Φ

$$\Phi_1 \subset \Phi \Rightarrow \Phi'_1 \subset \Phi'$$

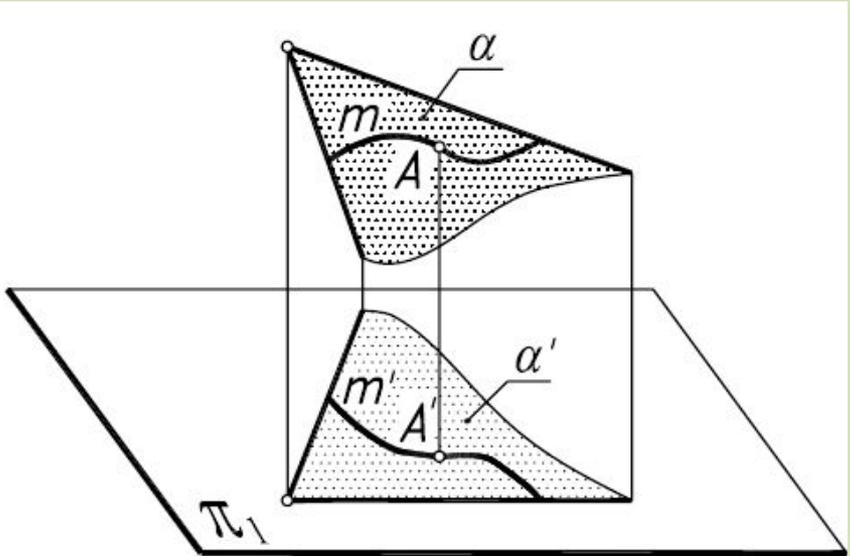


Рис.1.5

– Если точка A принадлежит линии m , то проекция точки A принадлежит проекции линии m

$$A \in m \Rightarrow A' \in m'$$

– Если линия m принадлежит поверхности α , то проекция линии m принадлежит проекции поверхности α

$$m \in \alpha \Rightarrow m' \in \alpha'$$

– Если точка A принадлежит линии m , которая принадлежит поверхности α , то проекция точки A принадлежит проекции поверхности α

$$A \in m \in \alpha \Rightarrow A' \in \alpha'$$

– Если фигура Φ принадлежит поверхности α , перпендикулярной плоскости проекций, то **проекция фигуры Φ принадлежит линии пересечения поверхности α с плоскостью проекций – следу $h_{0\alpha}$ поверхности α**

$$\Phi \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi_1 \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\alpha}$$

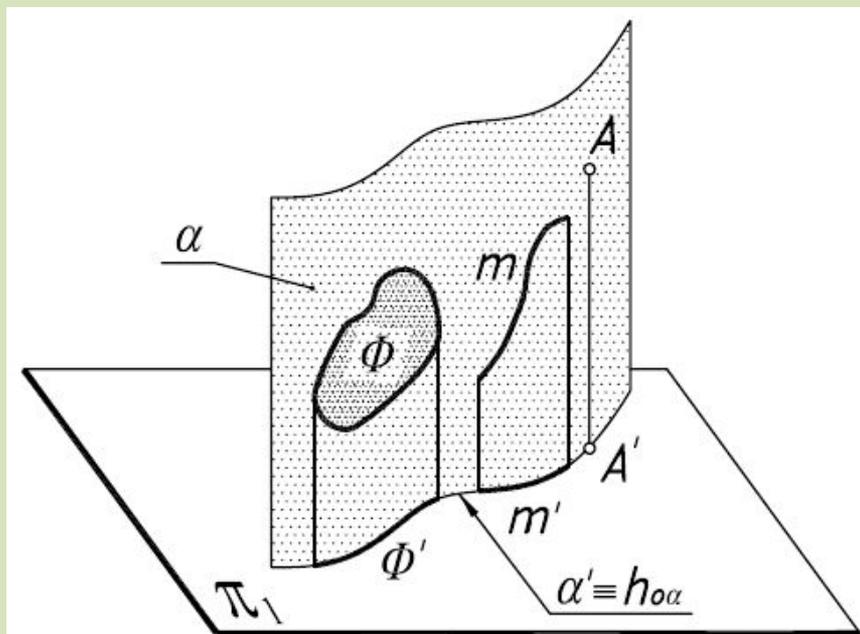


Рис.1.6

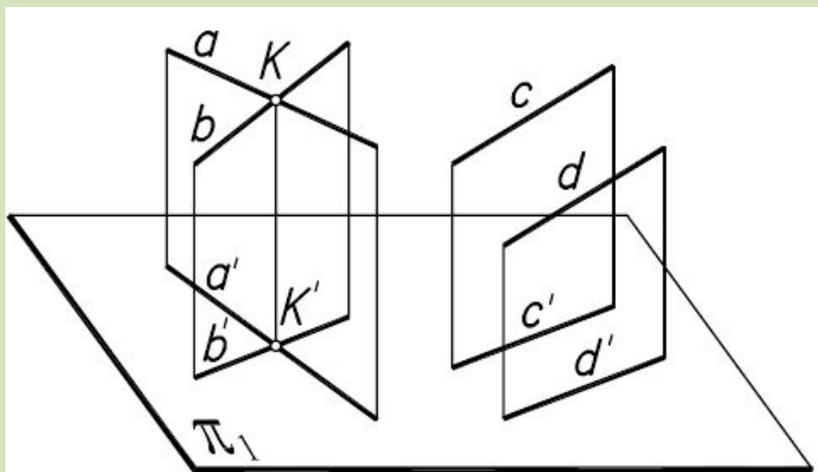


Рис.1.7

– Параллельные прямые проецируются в параллельные прямые

$$c \parallel d \Rightarrow c' \parallel d'$$

– Точка пересечения проекций пресекающихся прямых K' есть проекция точки пересечения самих прямых

$$a \cap b = K \Rightarrow a' \cap b' = K'$$

– Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

– Если точка K делит отрезок в данном отношении, то и проекция точки K разделит проекции отрезка в том же отношении

$$\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|M'K'|}{|K'N'|}$$

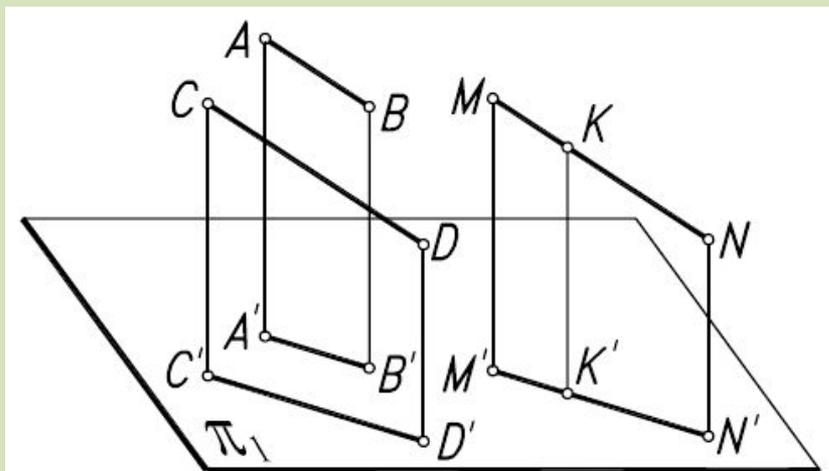
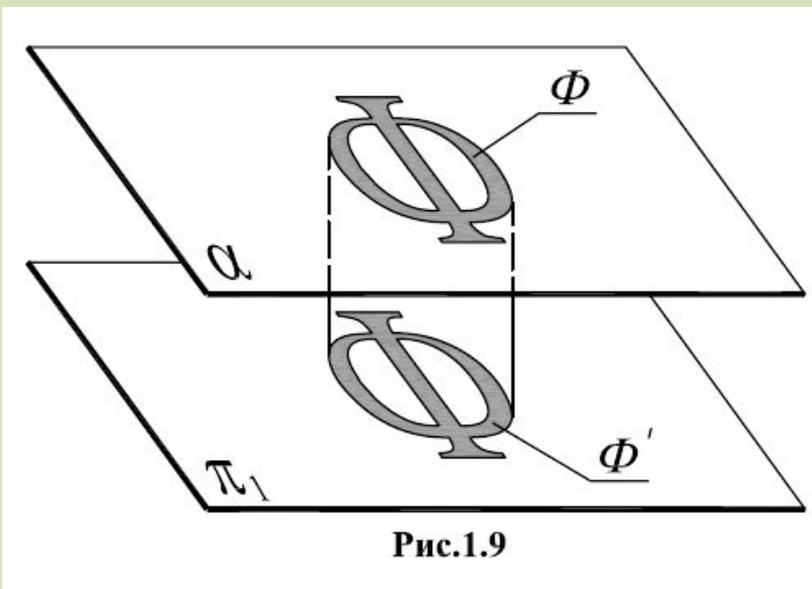
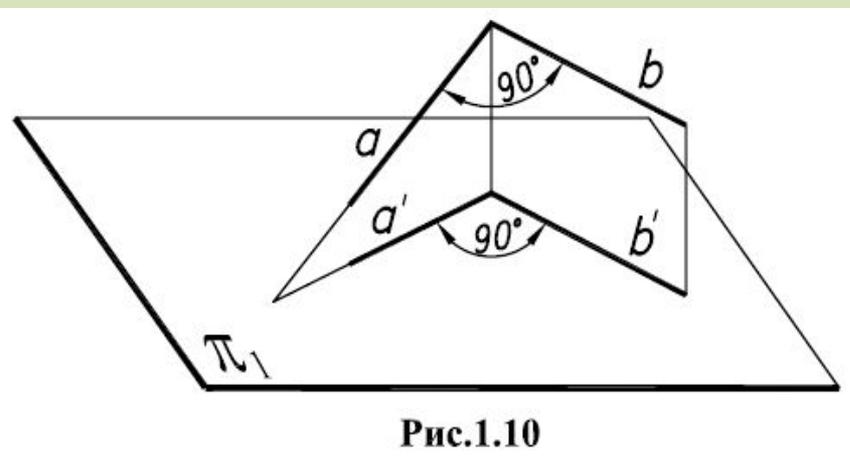


Рис.1.8



– Если фигура принадлежит плоскости, параллельной плоскости проекций, то на эту плоскость проекций данная фигура проецируется без искажения

$$\Phi \subset \alpha \quad \wedge \quad \alpha \parallel \pi_1 \Rightarrow \Phi = \Phi'$$



Теорема о проецировании прямого угла:
 Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая сторона не перпендикулярна к ней, то прямой угол проецируется без искажения на данную плоскость проекций

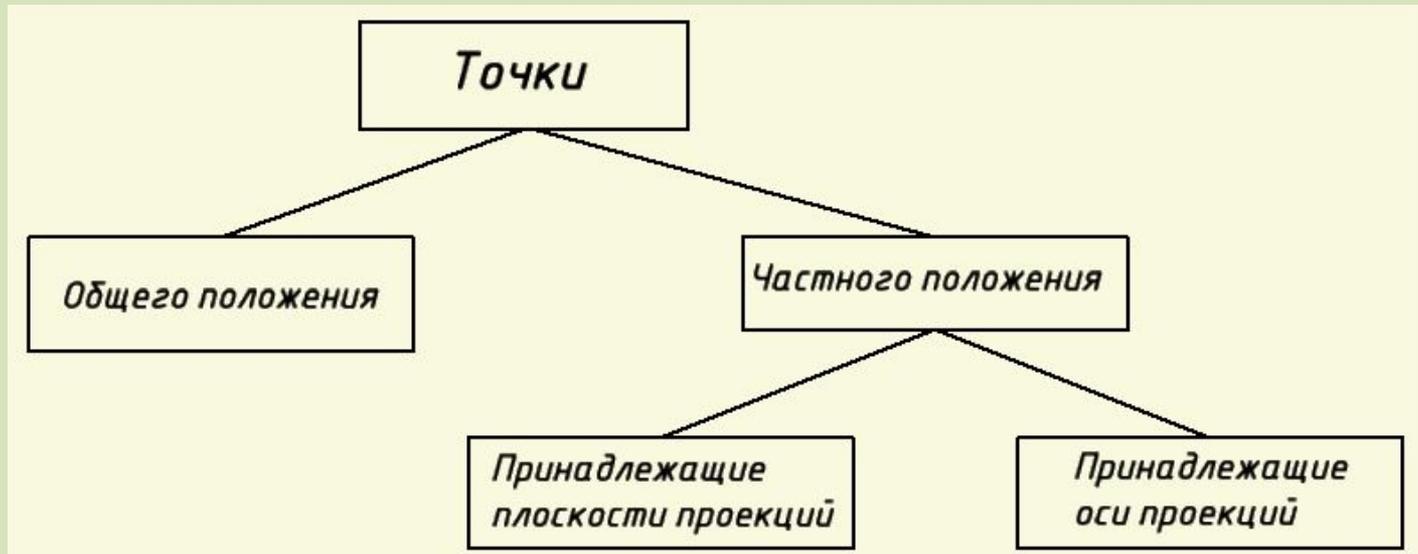
$$a \cap b; a \perp b; b \parallel \pi_1; a \cap \pi_1 \neq 90^\circ \\ \Rightarrow a' \perp b'$$

ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

Точка – неопределяемое понятие геометрии

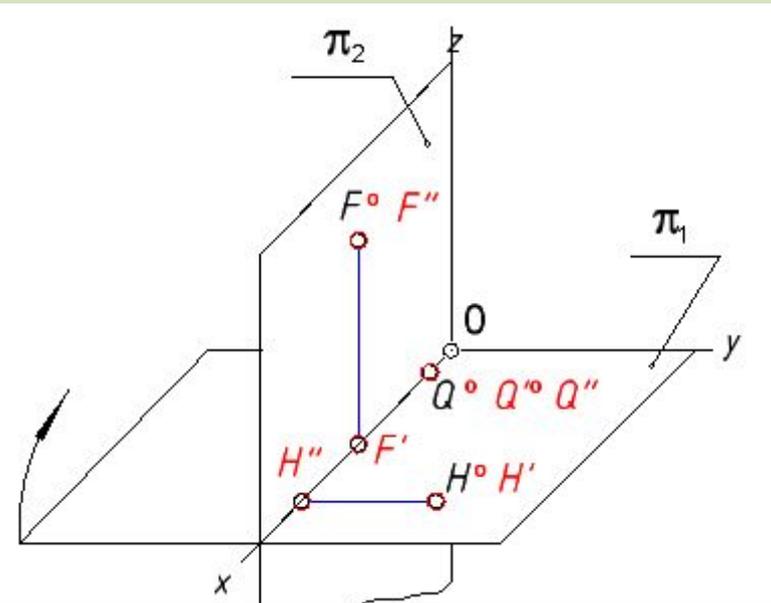
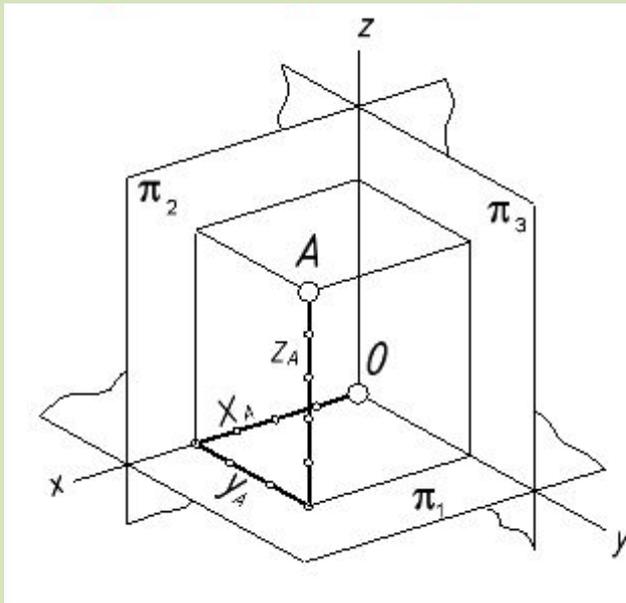
В пространстве точка задается **ее координатами $A(x, y, z)$**

На чертеже точка задается **двумя ее проекциями**



Точки общего положения – точки, у которых **ни одна из координат не равна нулю**

Точки частного положения – точки, у которых **одна, две или три координаты равны нулю**



Точка A – точка **общего положения**

Точки H, F, Q - точки **частного положения**

$$H \in \pi_1; H'' \in x$$

$$F \in \pi_2; F' \in x$$

$$Q \in x; Q', Q'' \in x$$

Координаты точки – упорядоченные **числа**, определяющие **положение точки** на прямой, поверхности (плоскости), в пространстве

Плоскости проекций – **взаимно перпендикулярные плоскости**, на которых получают отображения геометрических фигур

Оси проекций – взаимно перпендикулярные прямые, по которым пересекаются плоскости проекций

Начало координат – точка пересечения осей проекций

Четверти пространства – **четыре подпространства**, получаемые в результате деления пространства двумя взаимно перпендикулярными плоскостями проекций

Октанты пространства – **восемь подпространств**, получаемые в результате деления пространства тремя взаимно перпендикулярными плоскостями проекций

Ортогональная проекция точки – **основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость проекций**

Комплексный чертеж (Эпюр Монжа) – **чертеж, получаемый разворотом плоскостей проекций до совмещения их с фронтальной плоскостью и содержащий упорядоченные проекции геометрических фигур**

Линия связи – **перпендикуляр к оси проекций**, на котором располагается **упорядоченная пара проекций точки** на комплексном чертеже

Ортогональное проецирование точки на две плоскости проекций

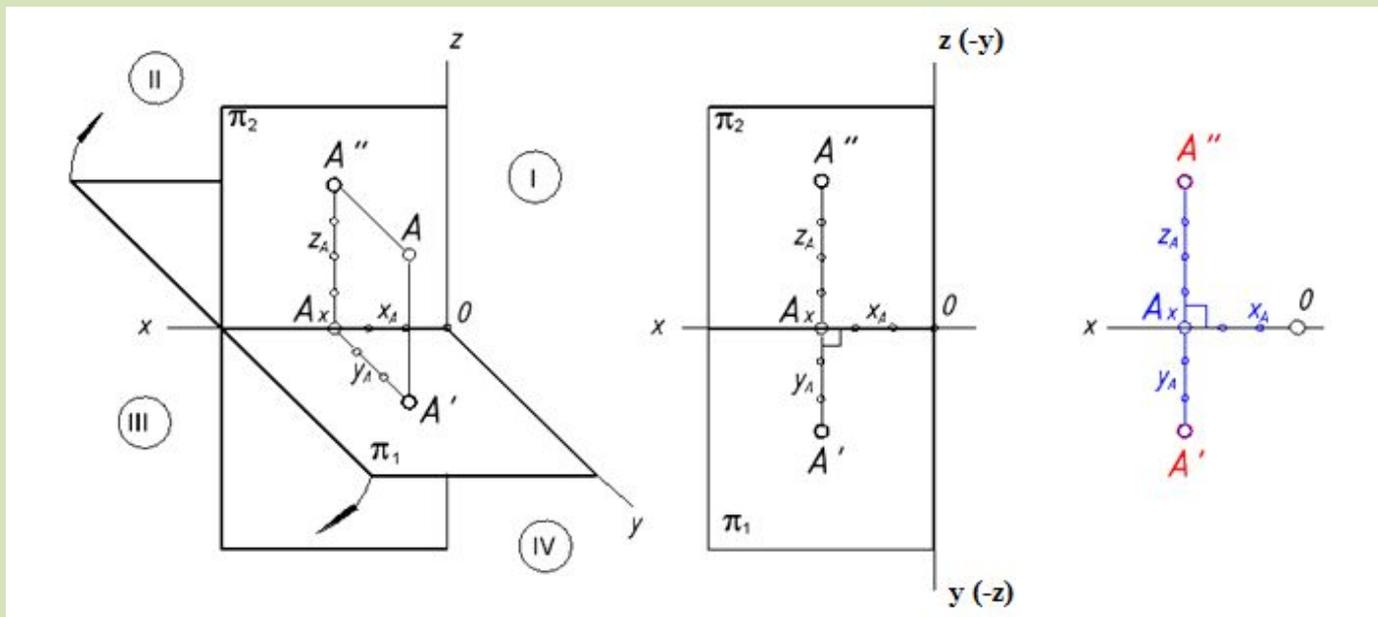


Рис. 1.11

Рис. 1.12

Рис. 1.13

- π_1 – горизонтальная плоскость проекций
- A' – горизонтальная проекция точки A
- π_2 – фронтальная плоскость проекций
- A'' – фронтальная проекция точки A
- x, y, z – оси проекций

$$AA' = A''A_x = z$$

$$AA'' = A'A_x = y$$

$$OA_x = x$$

$$A'(x, y), A''(x, z) \Rightarrow A(x, y, z)$$

Две проекции точки лежат **на одном перпендикуляре к оси проекций**.
 Поскольку плоскости проекций являются и координатными плоскостями – **две проекции** точки определяют ее **положение в пространстве**.

Ортогональное проектирование точки на три плоскости проекций

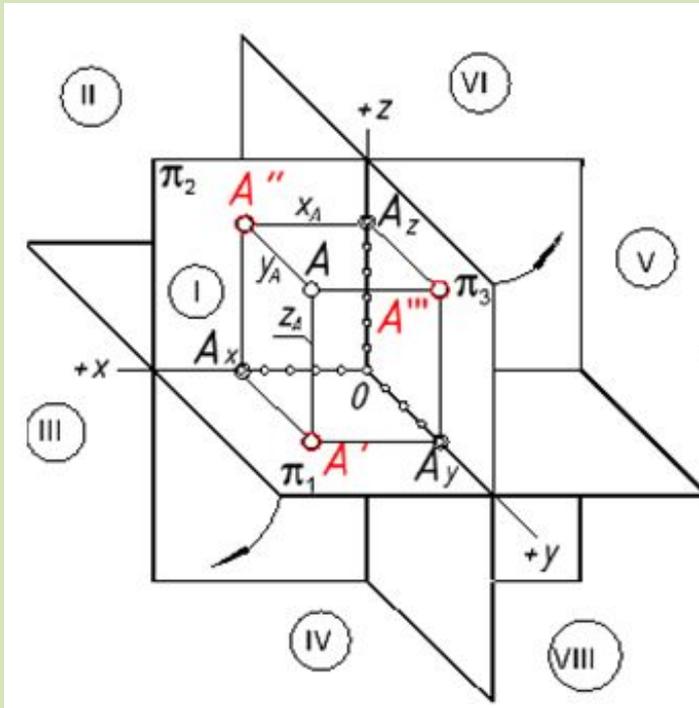


Рис. 1.14

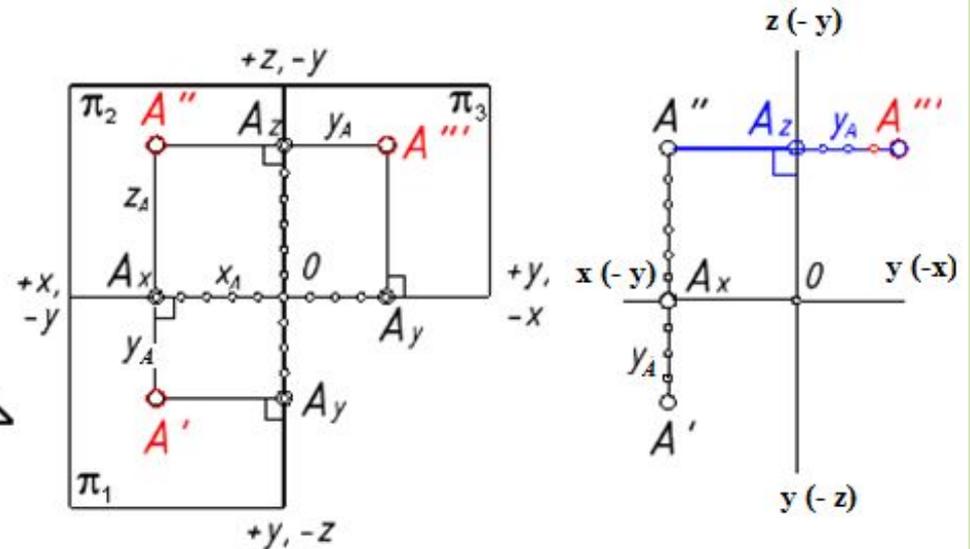


Рис. 1.15

π_3 – профильная плоскость проекций
 A''' – профильная проекция точки A

$$AA' = A''A_x = A_z O = A'''A_y = z$$

$$AA'' = A'A_x = A_y O = A'''A_z = y$$

$$A_x O = A''A_z = A'A_y = AA''' = x$$

Любые две проекции точки полностью определяют ее положение в пространстве.

Любая третья проекция точки может быть построена по двум заданным ее проекциям.