Лекция 6

Метрические задачи

Метрическими называются такие задачи, в условии или решении которых присутствуют геометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой.

- Наиболее часто встречаются метрические задачи: на взаимную перпендикулярность геометрических фигур, на определение натуральной величины заданных отрезка или угла, на построение натурального вида плоской фигуры и т. п.

Метрические задачи связаны с различными измерениями: натуральных величин отрезков, углов, плоских фигур; расстояний между фигурами и т.д.

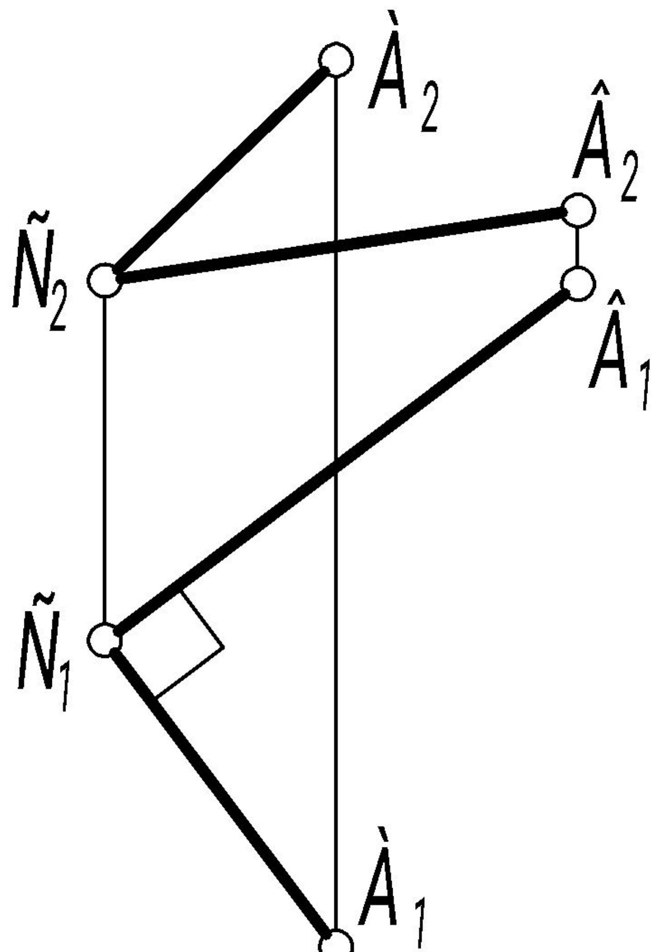
Метрические задачи проще решать, используя способы преобразования комплексного чертежа.

Из всего многообразия метрических задач выделяются две основные:

1. Первая основная метрическая задача - на перпендикулярность прямой и плоскости.
2. Вторая основная метрическая задача - на определение натуральной длины отрезка. Эта задача решается методом прямоугольного треугольника, который рассматривался в первом модуле.

Как Вы думаете?

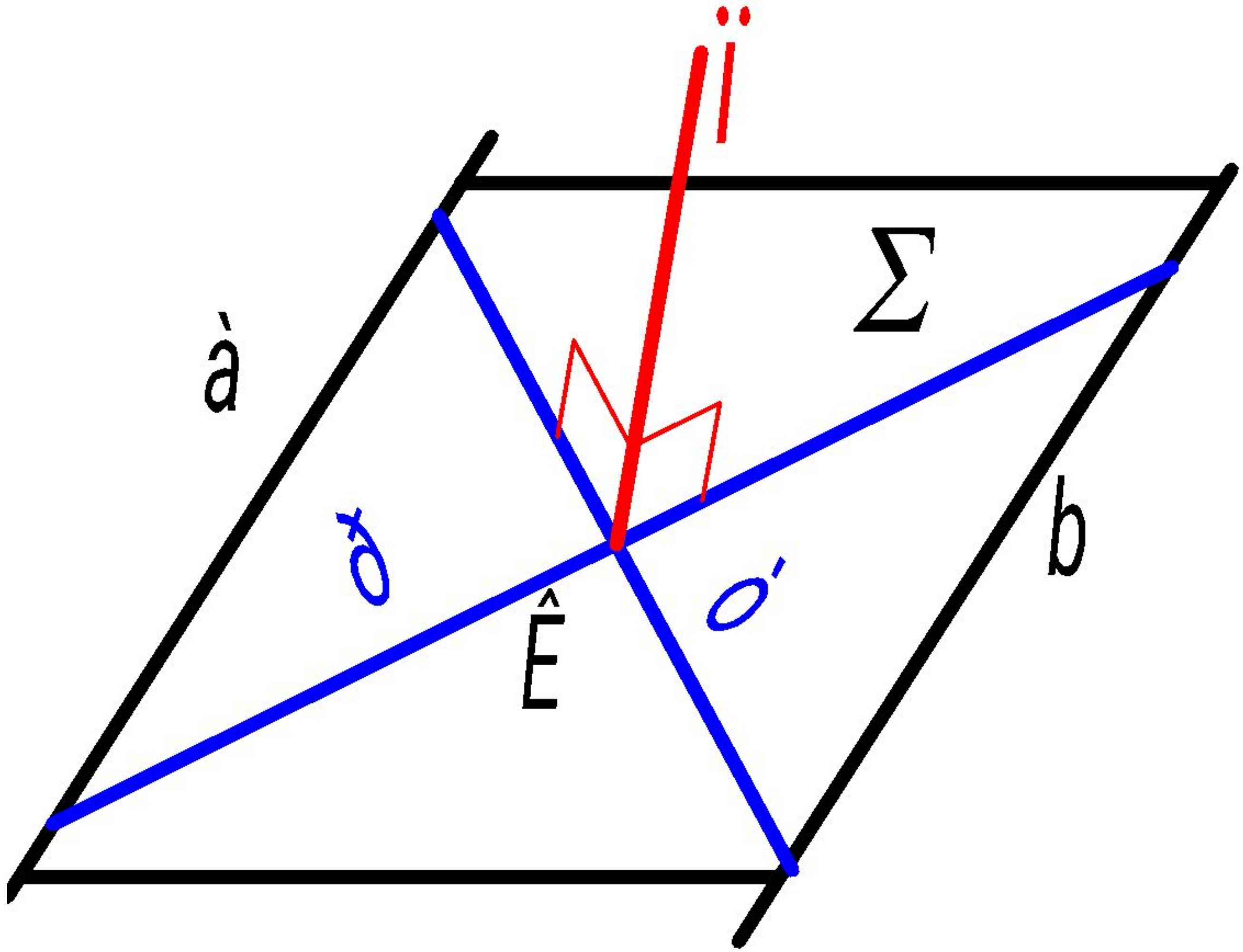
1. Что является кратчайшим расстоянием от точки до прямой, до плоскости?
2. Присутствует ли на какой-нибудь плоскости проекций натуральная величина угла?



Взаимная перпендикулярность прямой и плоскости.

Из элементарной геометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

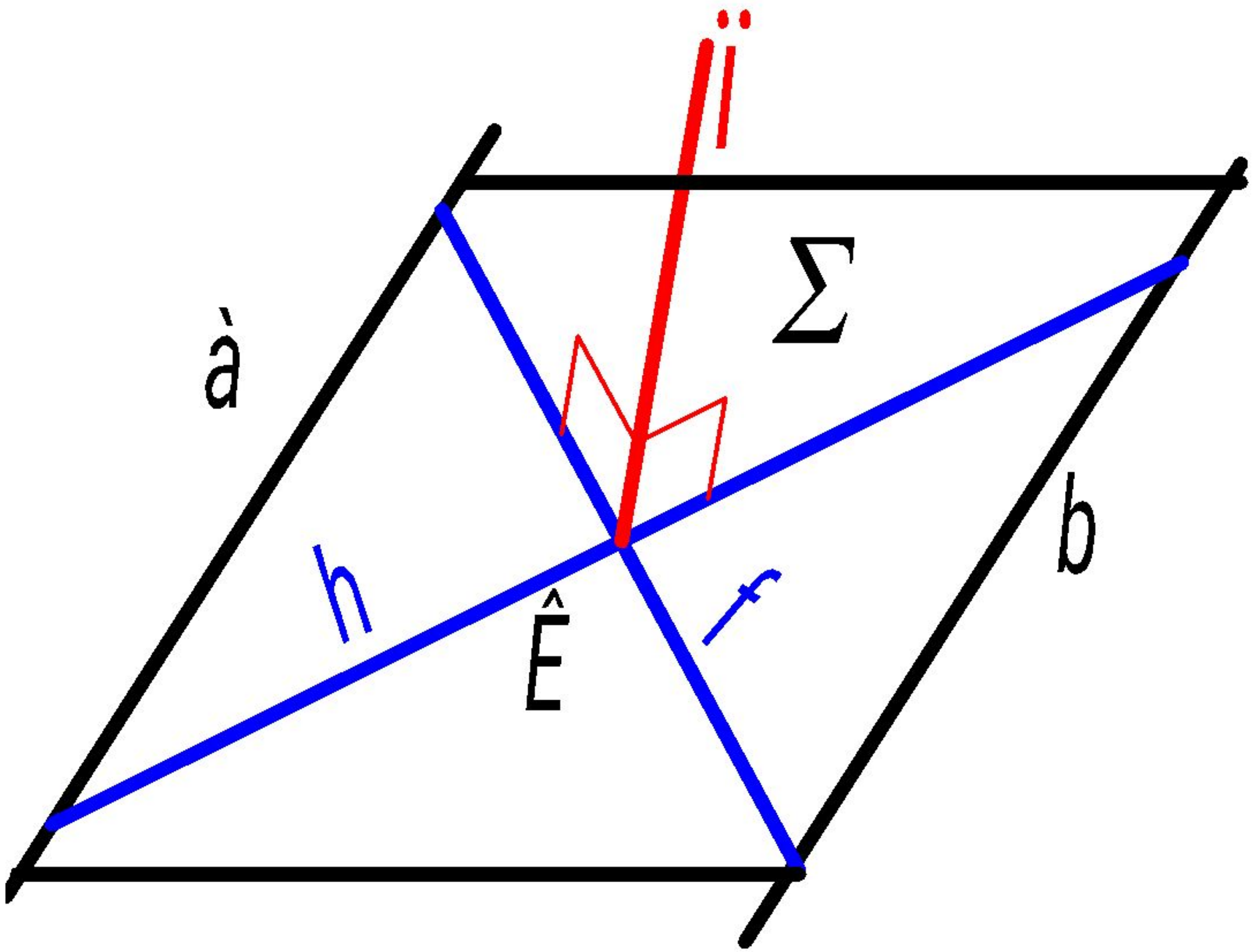
Задача: Через точку *К* $\in \Sigma$ построить прямую *n*, перпендикулярную плоскости $\Sigma(a \parallel b)$.



Чтобы провести прямую $n \perp \Sigma$, нужно в этой плоскости взять две пересекающиеся прямые, это $p \cap m = K$. Прямую n нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

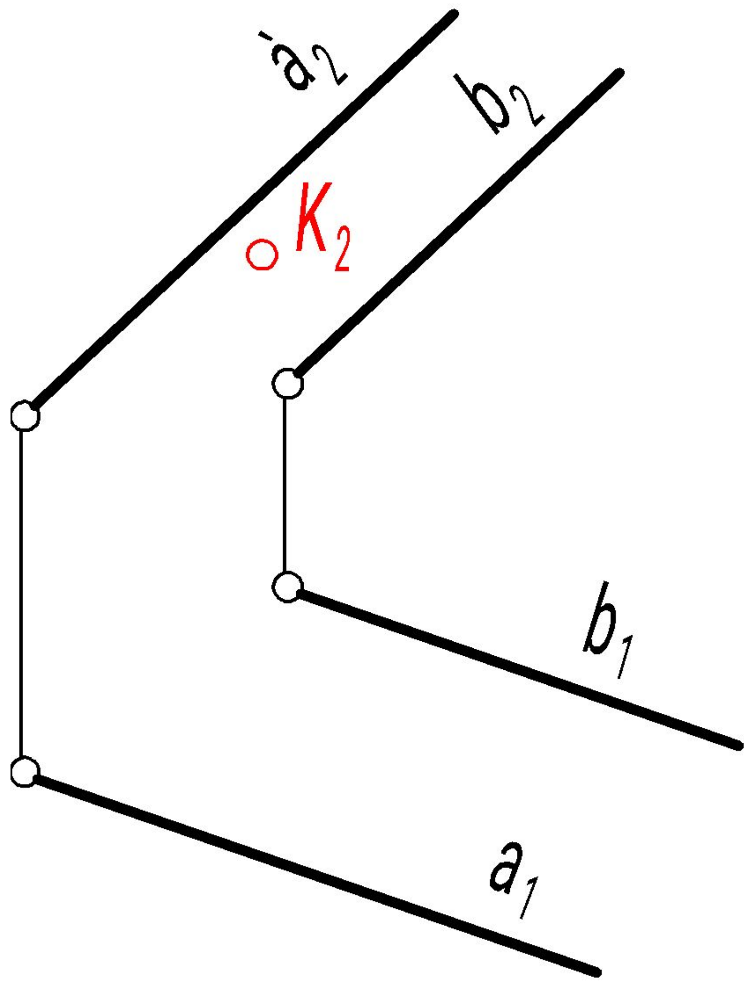
Однако, если прямые p и m будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину. Согласно теореме опроецировании прямого угла, прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую-нибудь плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельной этой плоскости проекций.

Поэтому, в качестве прямых *p* и *m* выгодно взять горизонталь *h* и фронталь *f* . Тогда прямой угол между *n* и *h* спроецируется в натуральную величину на $П_1$, а прямой угол между *n* и *f* - на $П_2$.

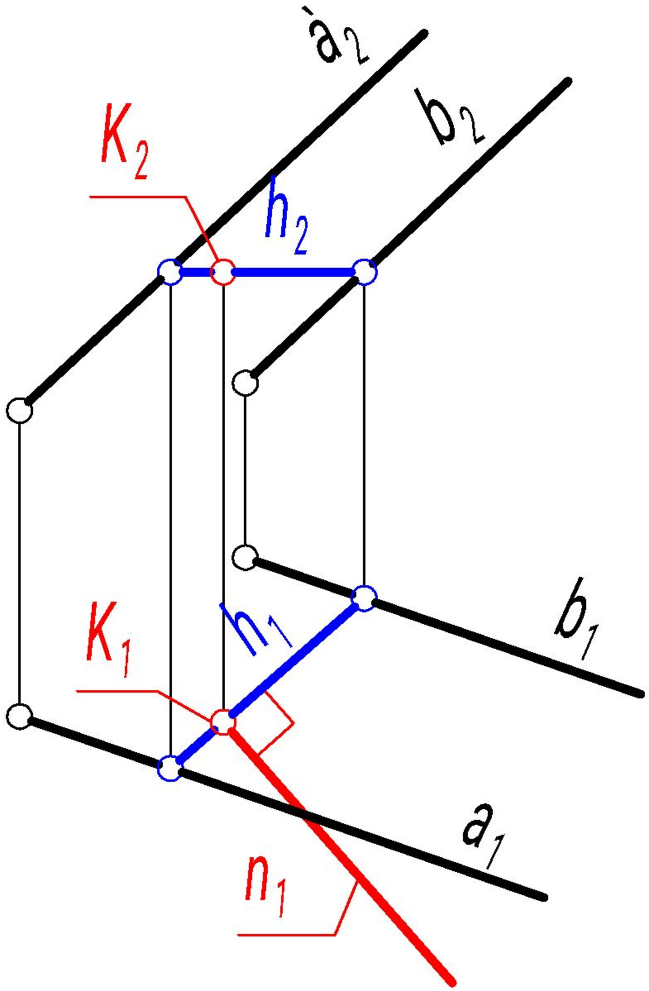


Плоский чертёж: Плоскость Σ задана параллельными прямыми *a* и *b*. Точка *К(К₂)* принадлежит этой плоскости. Нужно построить

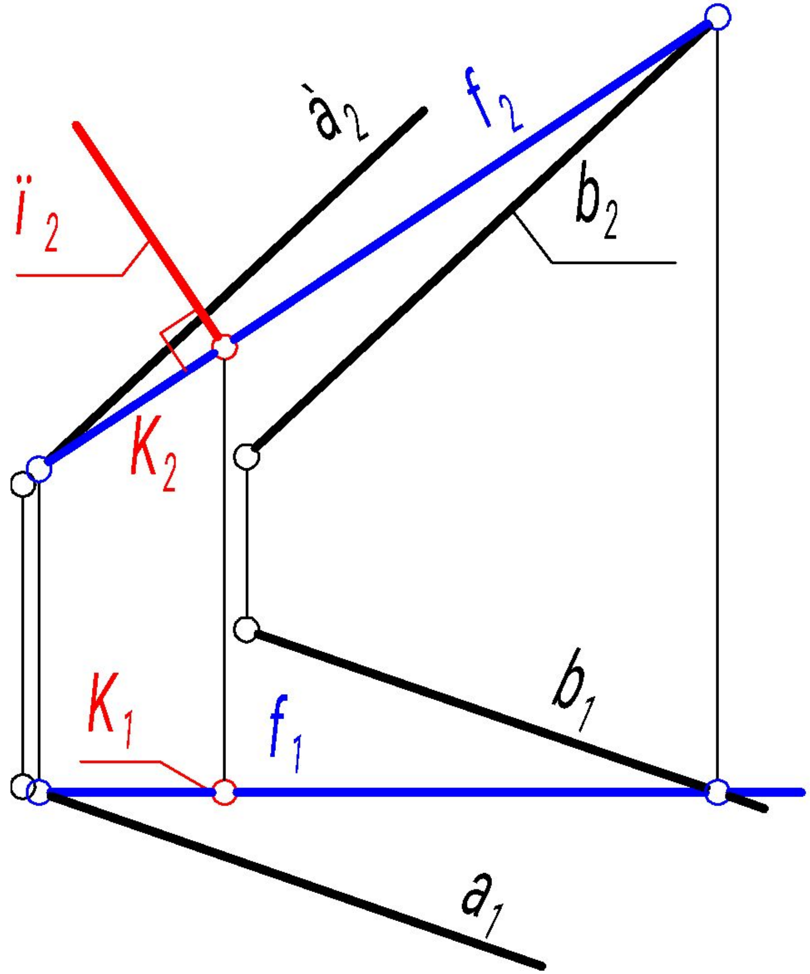
$n \perp \Sigma, n \in K$.



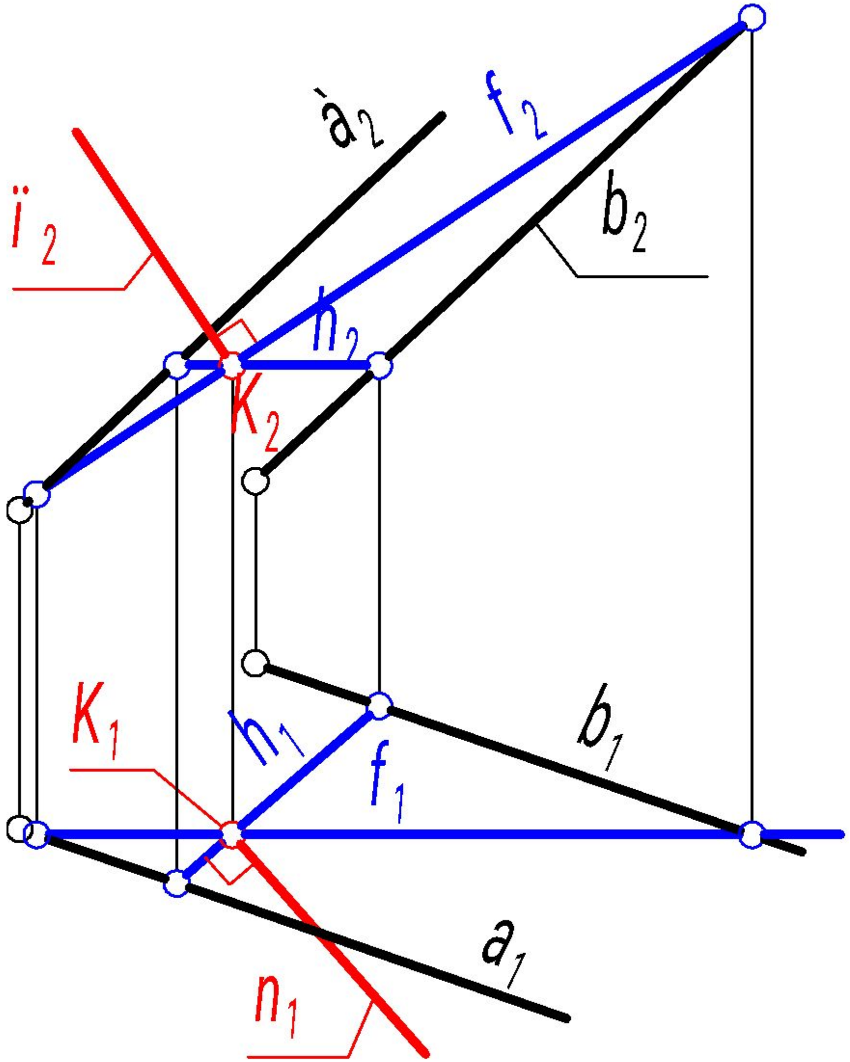
В плоскости необходимо взять горизонталь *h* и фронталь *f*. Затем, перпендикулярно каждой из них строить *n*. Построения начинаем с горизонтали



Аналогично находим n_2 . Через точку K_1 проводим f_1 $\perp$ линиям связи, находим f_2. Так как n $\perp$ f, то n_2 $\perp$ f_2, поэтому проводим n_2 $\perp$ f_2 через точку K_2.



Полностью решение задачи представлено . Видимость прямой *n* не учитывалась.



Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset \Sigma$, $f \subset \Sigma$, $h \cap f = K$.

2. $K \in n \Rightarrow K_1 \in n_1$, $K_2 \in n_2$.

3. $n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1$;

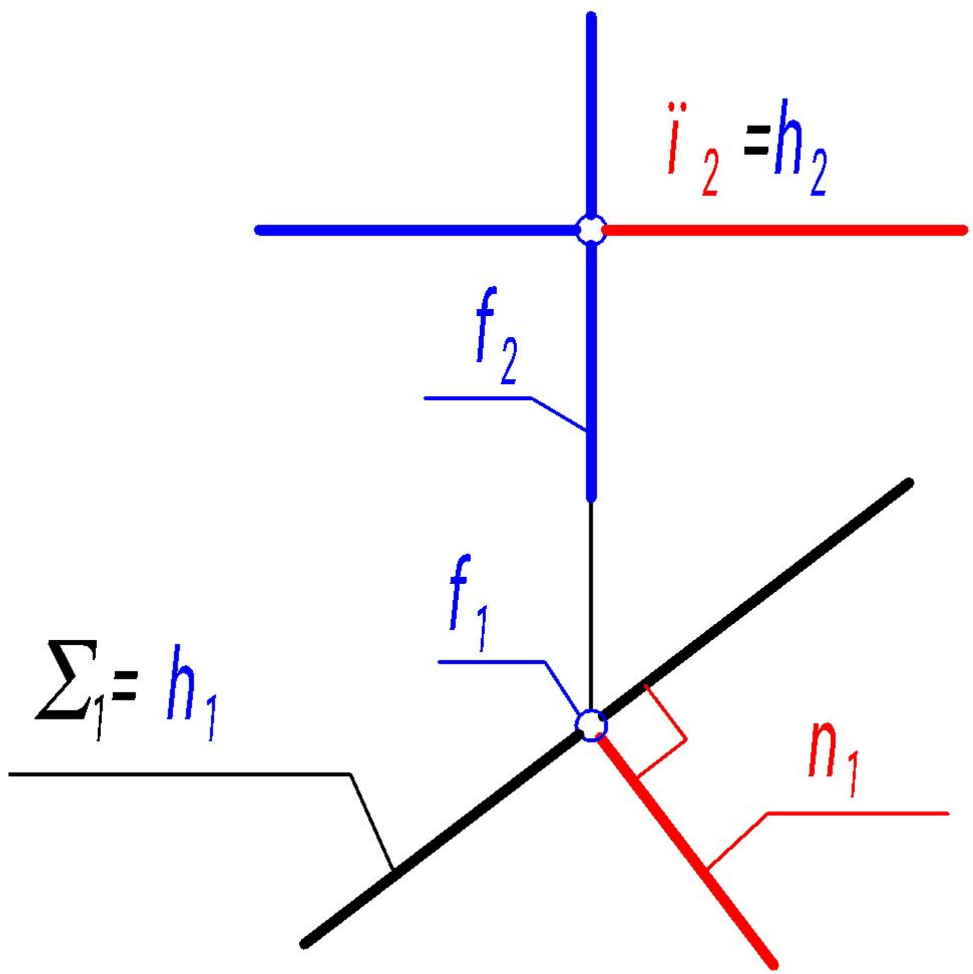
4. $n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2$.

Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую n, перпендикулярную данной плоскости Σ, достаточно построить n_1 и n_2, расположив их в любом месте чертежа, чтобы $n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$, где h и f - горизонталь и фронталь плоскости, при условии, что $h \cap f$.

Если Σ - горизонтально проецирующая:

$\Sigma \perp\perp \Pi_1 \Rightarrow h_1 = \Sigma_1$, $f \perp\perp \Pi_1$

$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1$; $n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2$; $\Rightarrow n$ - горизонталь

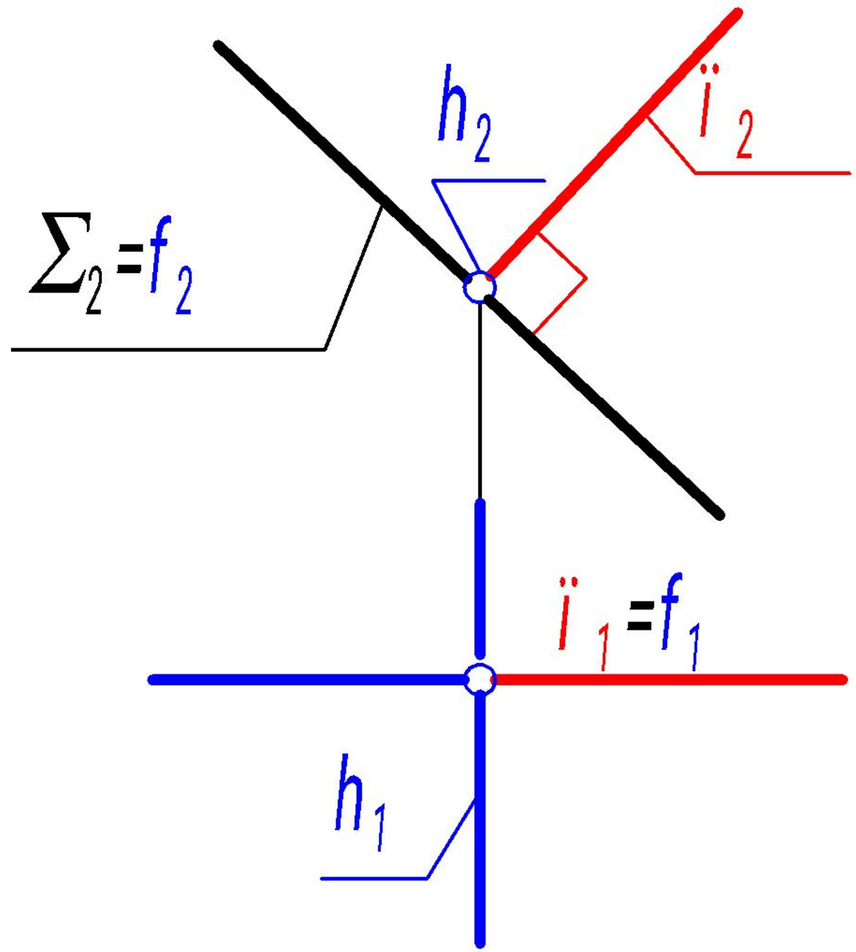


Если Σ - фронтально проецирующая:

$\Sigma \perp\perp \Pi_2 \Rightarrow f_2 = \Sigma_2,\ h \perp\perp \Pi_2.$

$n \perp h \Rightarrow n_1 \perp h_1;\ n \perp f \Rightarrow n_2 \perp f_2; \Rightarrow n$ -

.

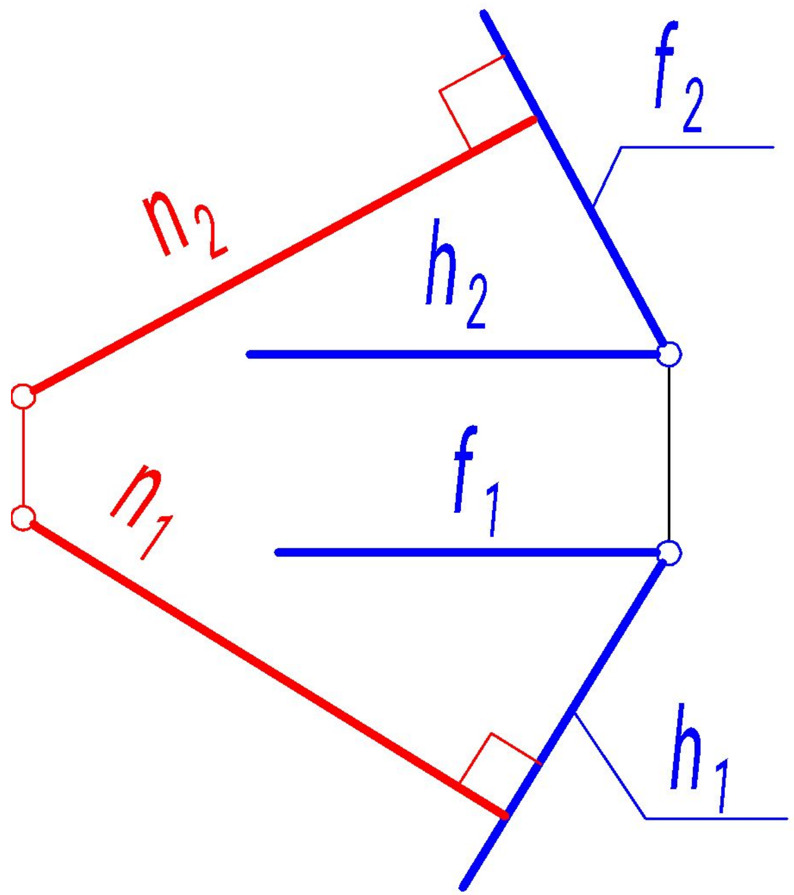


Если плоскость Σ занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня(фронталь, горизонталь).

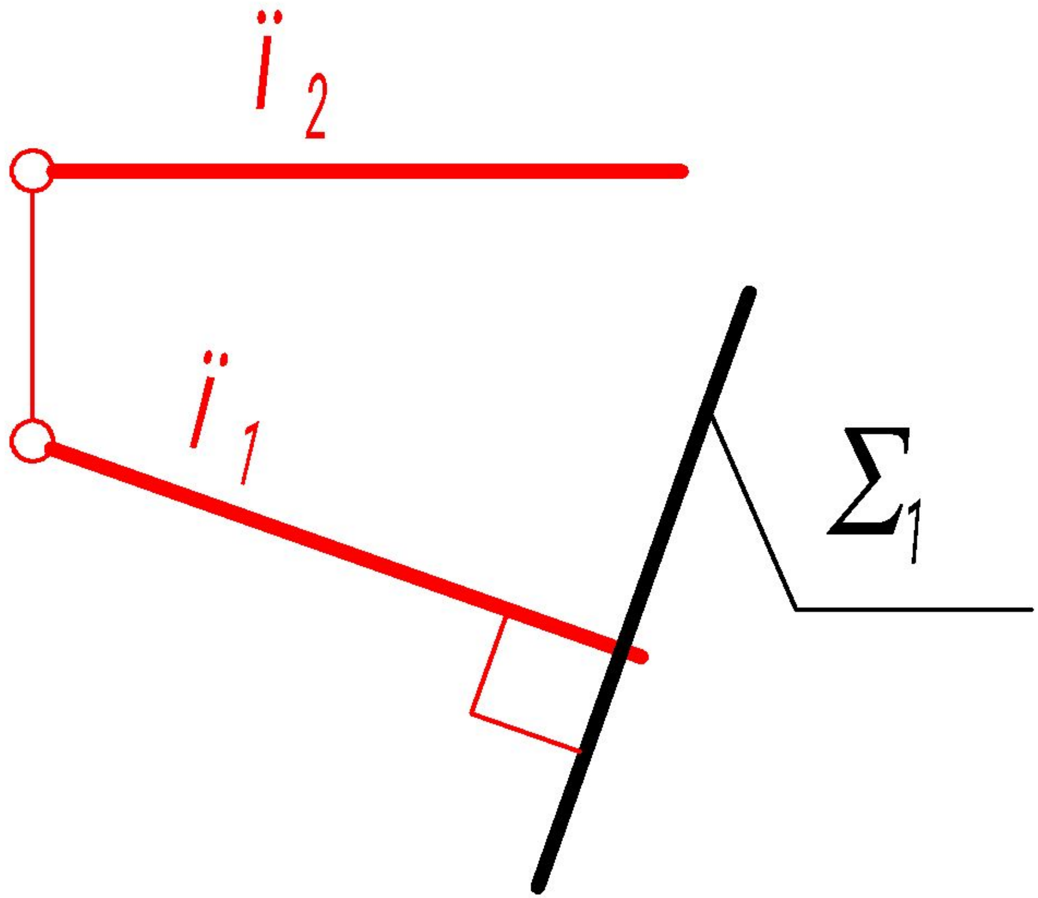
- Чтобы лучше понять данное утверждение, нужно вспомнить , какие прямые являются линиями уровня в проецирующих плоскостях. Для этого посмотрите рис. 2-12 и 2-14 в модуле № 2.

Обратная задача.

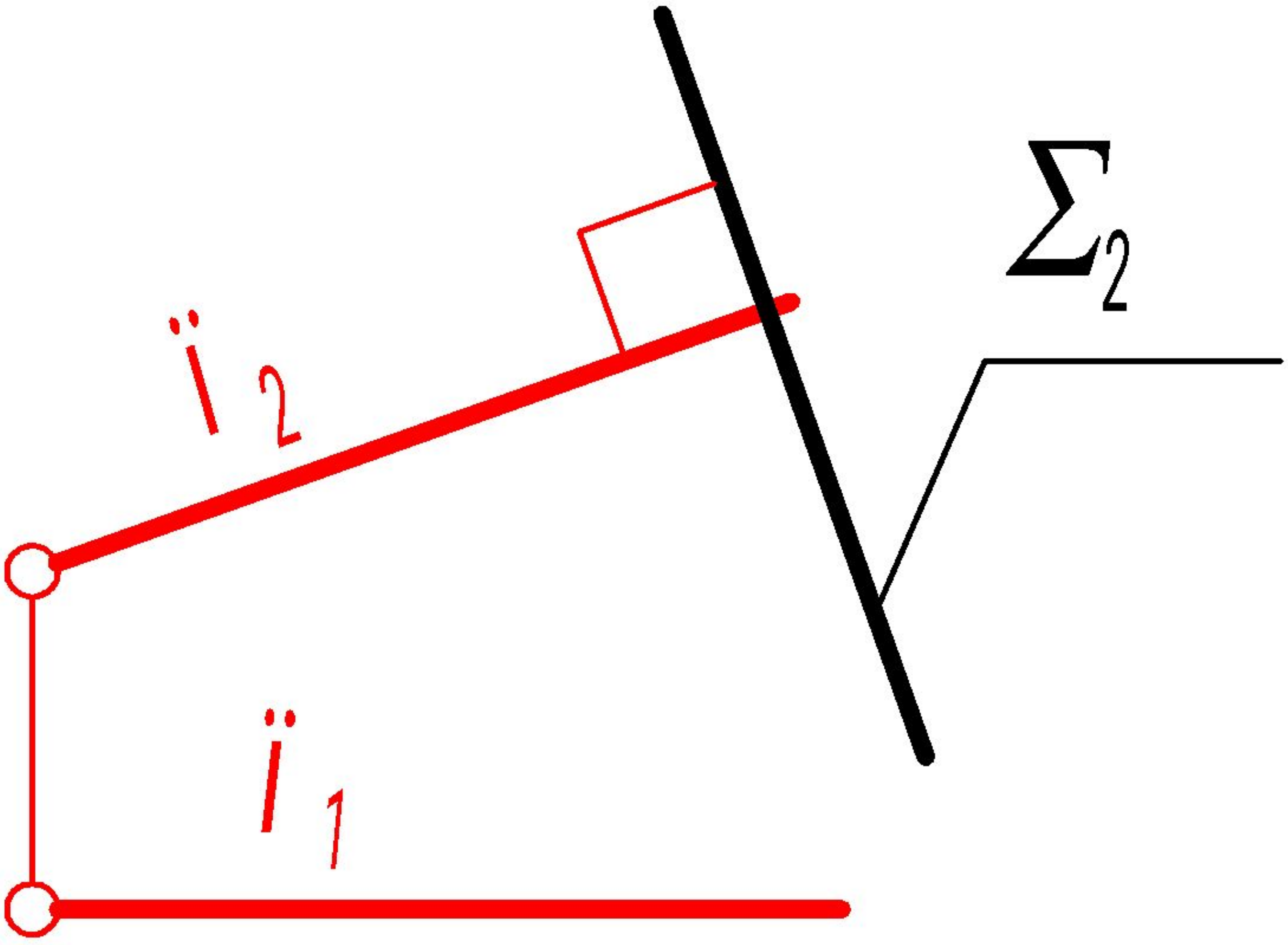
Чтобы задать на чертеже плоскость, перпендикулярную данной прямой *n*, достаточно задать проекции горизонтали и фронтали этой плоскости так, чтобы $f_2 \perp n_2$, а $h_1 \perp n_1$. При этом, очевидно, должно выполняться условие $h \cap f$.



Если прямая *n* - горизонталь, то плоскость *Σ*, перпендикулярная ей, является горизонтально проецирующей (*Σ1*).



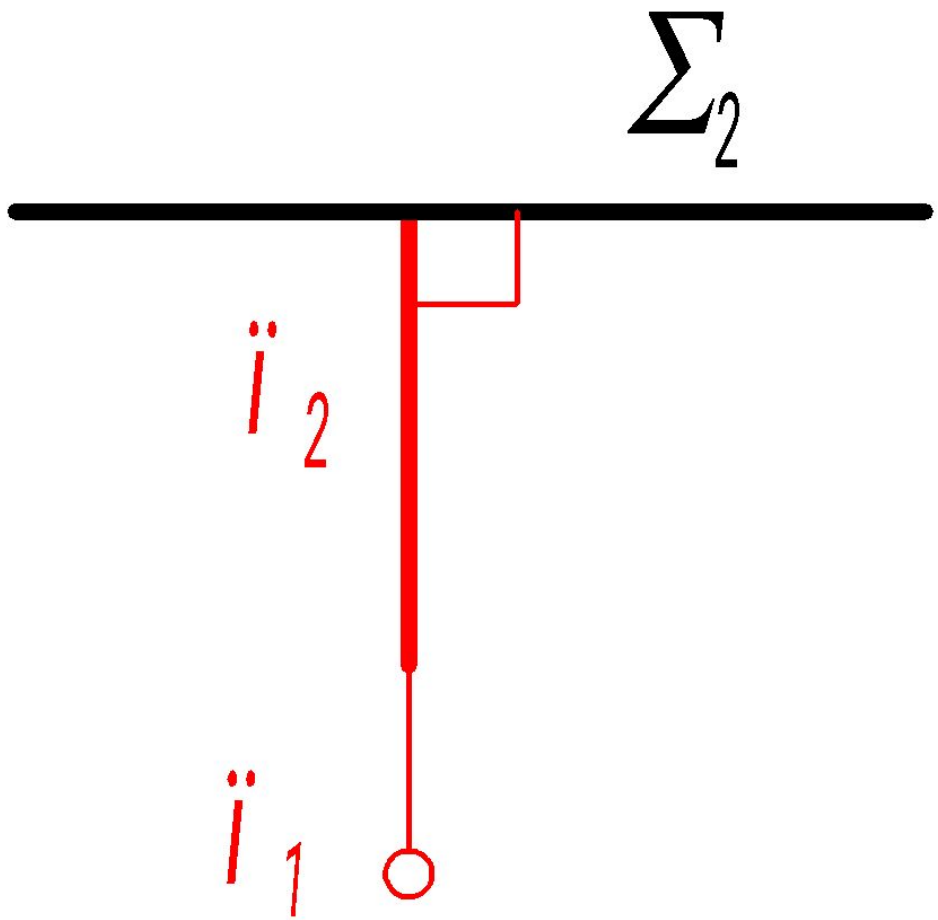
Если прямая *n* - фронталь, то плоскость *Σ*, перпендикулярная ей, является фронтально проецирующей (*Σ2*).



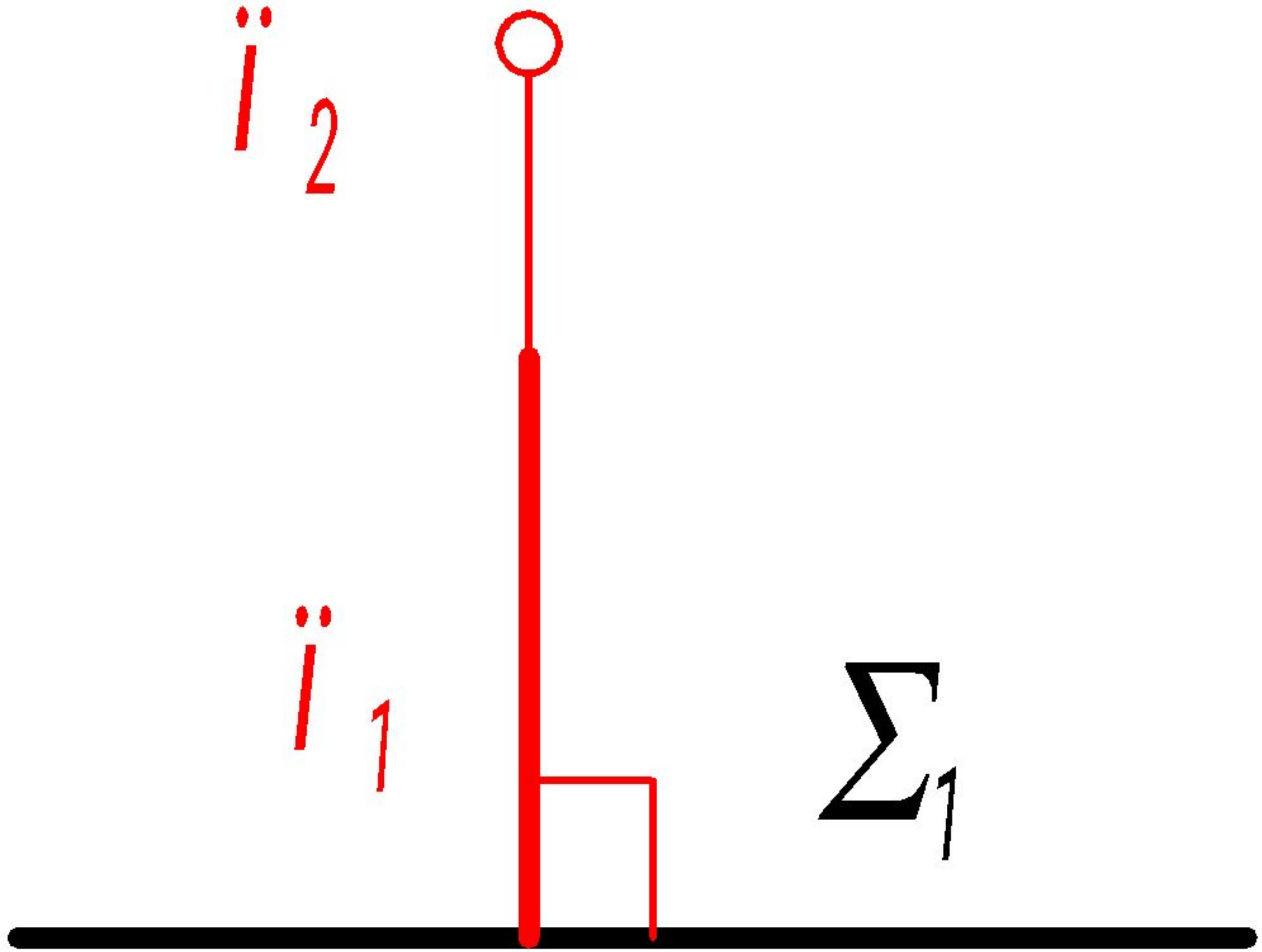
Если прямая *n* занимает проецирующее положение, то плоскость, перпендикулярная ей, является плоскостью уровня.

Прямая *n* - горизонтально проецирующая,

$\Sigma \perp n$ - горизонтальная плоскость уровня (Σ_2).

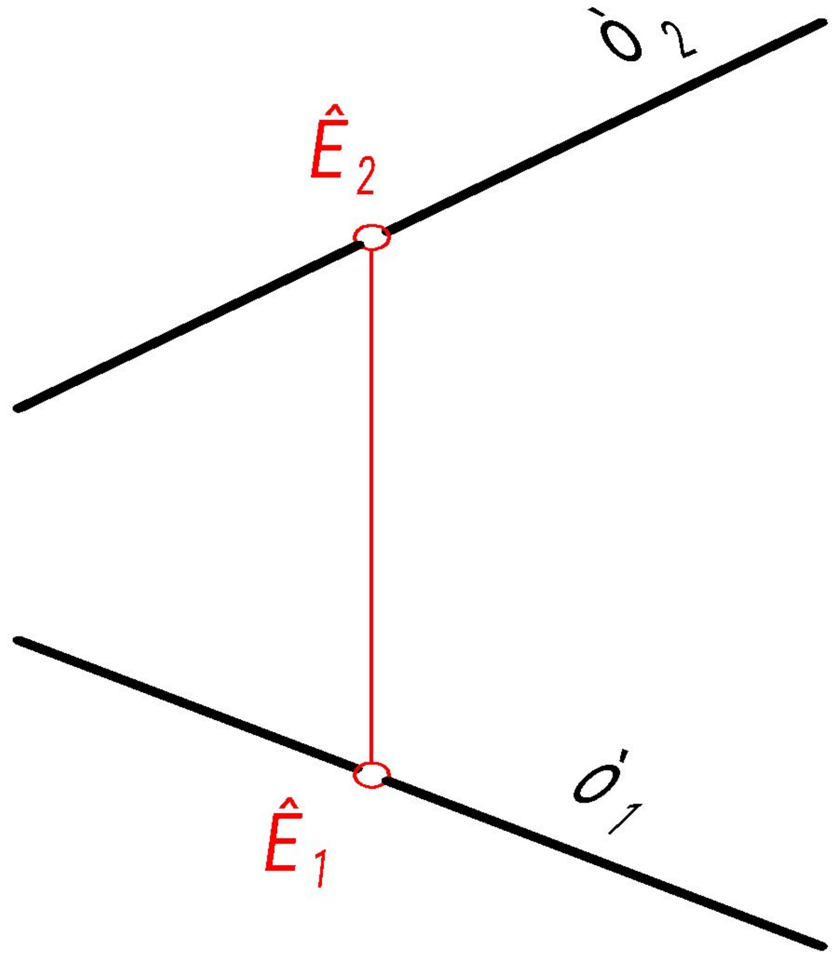


Прямая *n* - фронтально проецирующая,
$\Sigma \perp n$ - фронтальная плоскость уровня(Σ_1).



Взаимная перпендикулярность двух прямых общего положения

Задача: Через точку *K*, взятую на прямой общего положения *m*, провести прямую *n*, тоже общего положения, перпендикулярную *m* .

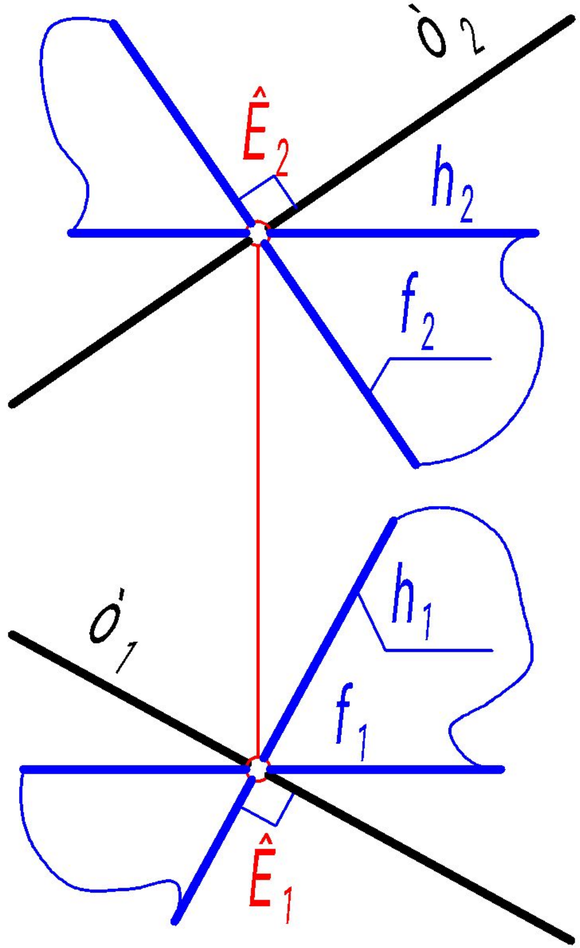


Так как прямой угол между прямыми общего положения искажается на обеих плоскостях проекций, то решение задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых приходится сводить к задаче на построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

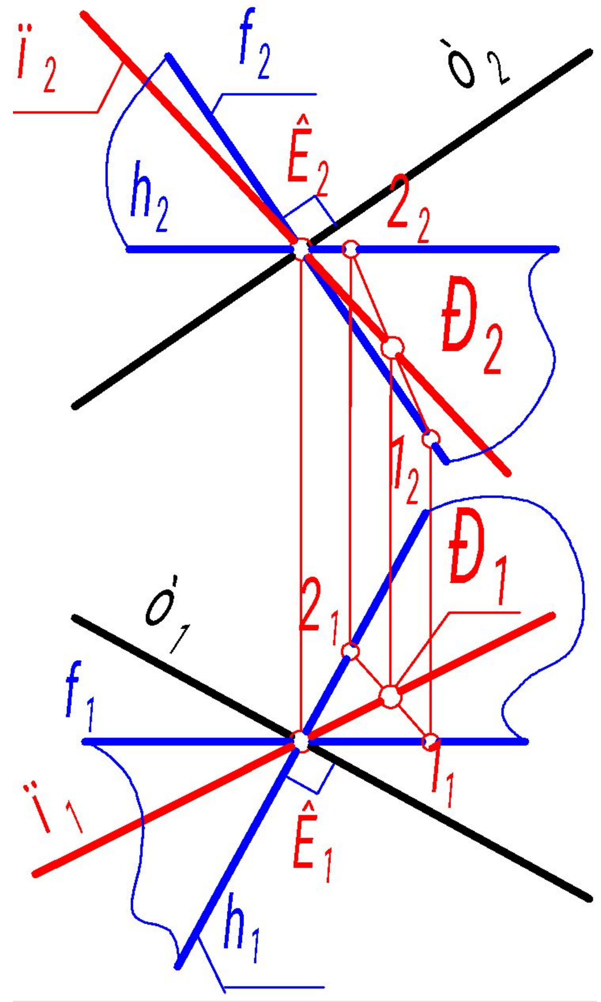
При этом используется известное положение, что две прямые перпендикулярны в том, и только в том случае, если через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой.

Алгоритм решения:

1. Через точку *К* проводим плоскость *Σ*, перпендикулярную прямой *m*. Плоскость задаём пересекающимися горизонталью и фронталью, причём, $h_1 \perp m_1$, а $f_2 \perp m_2$.



2. Так как плоскость *Σ(h ∩ f) ⊥ m*, то в этой плоскости можно взять некоторую прямую общего положения *n*, проходящую через точку *К*. Она будет перпендикулярна *m*. Задаём n_1.



3. Известно, что прямую определяют две точки. На n_1, кроме K_1, возьмём ещё одну точку P_1.

4. Находим n_2 в плоскости Σ. Для этого проводим в этой плоскости прямую *12*(1_1-2_1). Точка P_1 принадлежит этой прямой, а, следовательно, плоскости Σ. Находим P_2 и проводим прямую n_2

Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp m$, $\Sigma = h \cap f = K$; $h \perp m \Rightarrow h_1 \perp m_1$, $h_2 \perp K_2K_1$; $f \perp m \Rightarrow f_2 \perp m_2$, $f_1 \perp K_2K_1$;

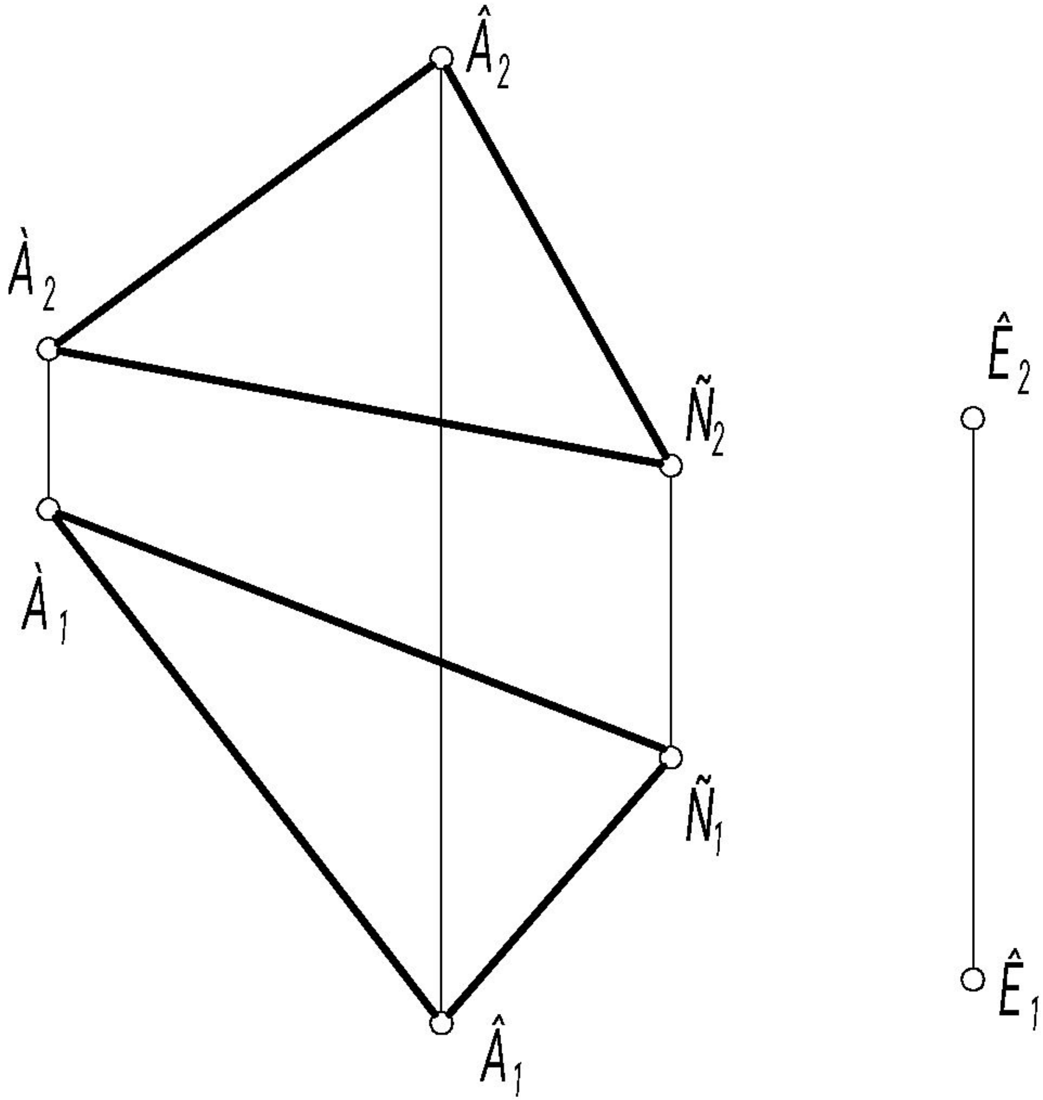
2. $n = PK$, $n \subset \Sigma$, $n_1 = P_1K_1$; $P_1 \in 1_12_1 \Rightarrow P_1 \in \Sigma \Rightarrow P_2 \Rightarrow n_2$.

3. $n \subset \Sigma \Rightarrow n \perp m$.

Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Задача: Через точку *К*, взятую вне плоскости *Г* *(АВС)* провести плоскость *Σ ⊥ Г* .



Алгоритм:

1. Плоскость Σ задаём пересекающимися прямыми $m \cap n = K$. Согласно вышесказанному, одна из них должна быть перпендикулярна плоскости Γ. Пусть это будет n.

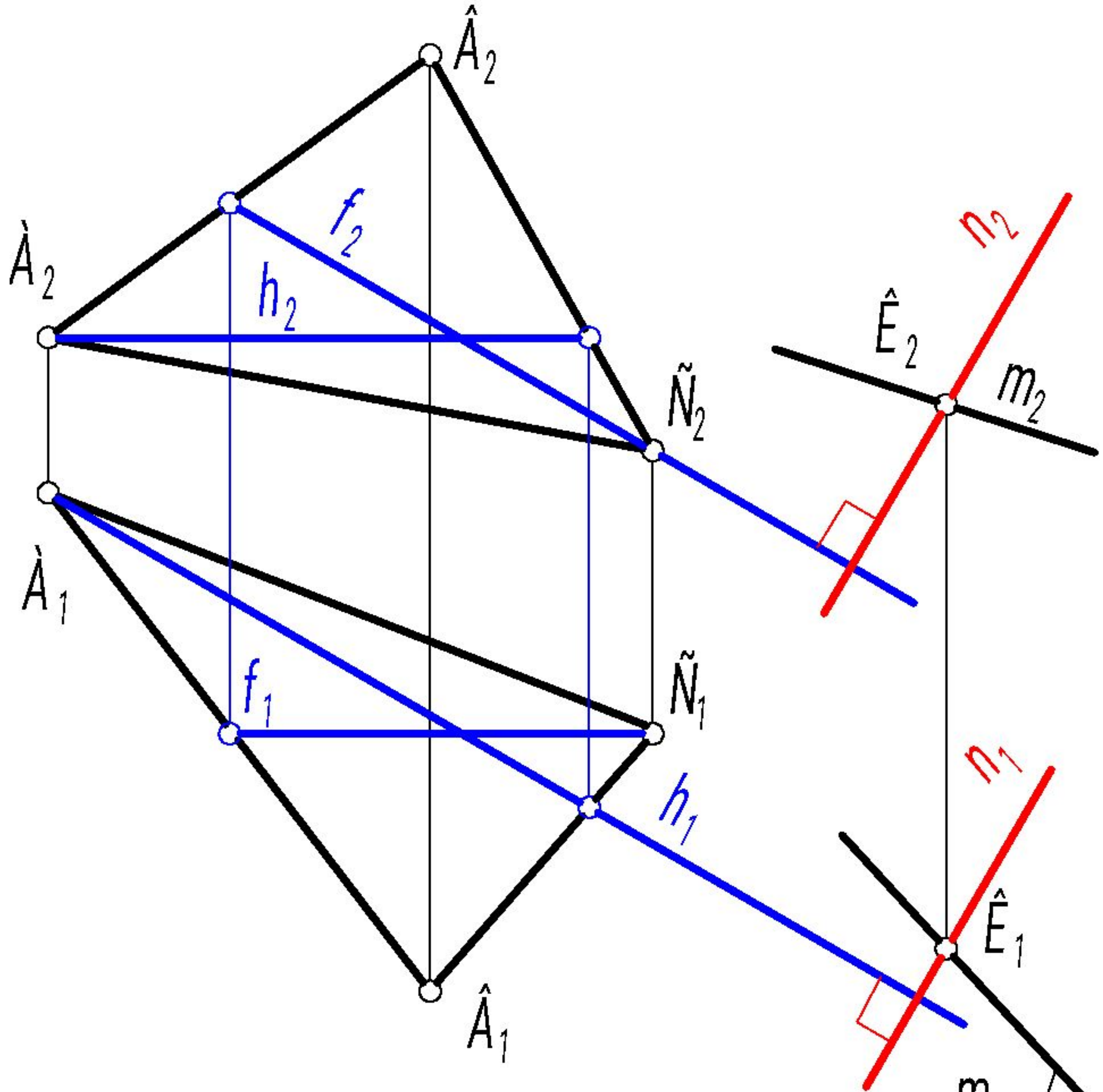
2. В плоскости Γ берём горизонталь и фронталь.

3. Через точку K_1 проводим $n_1 \perp h_1$, а через K_2 проводим $n_2 \perp f_2$, следовательно, $n \perp \Gamma$.

4. Прямую m, проходящую через точку K, задаём произвольно.

- Таким образом, $\Sigma(n \cap m) \perp \Gamma(ABC)$.

Решение



Алгоритмическая запись решения:

1. $h \subset Г \Rightarrow h_2 \Rightarrow h_1$, $f \subset Г \Rightarrow f_1 \Rightarrow f_2$;

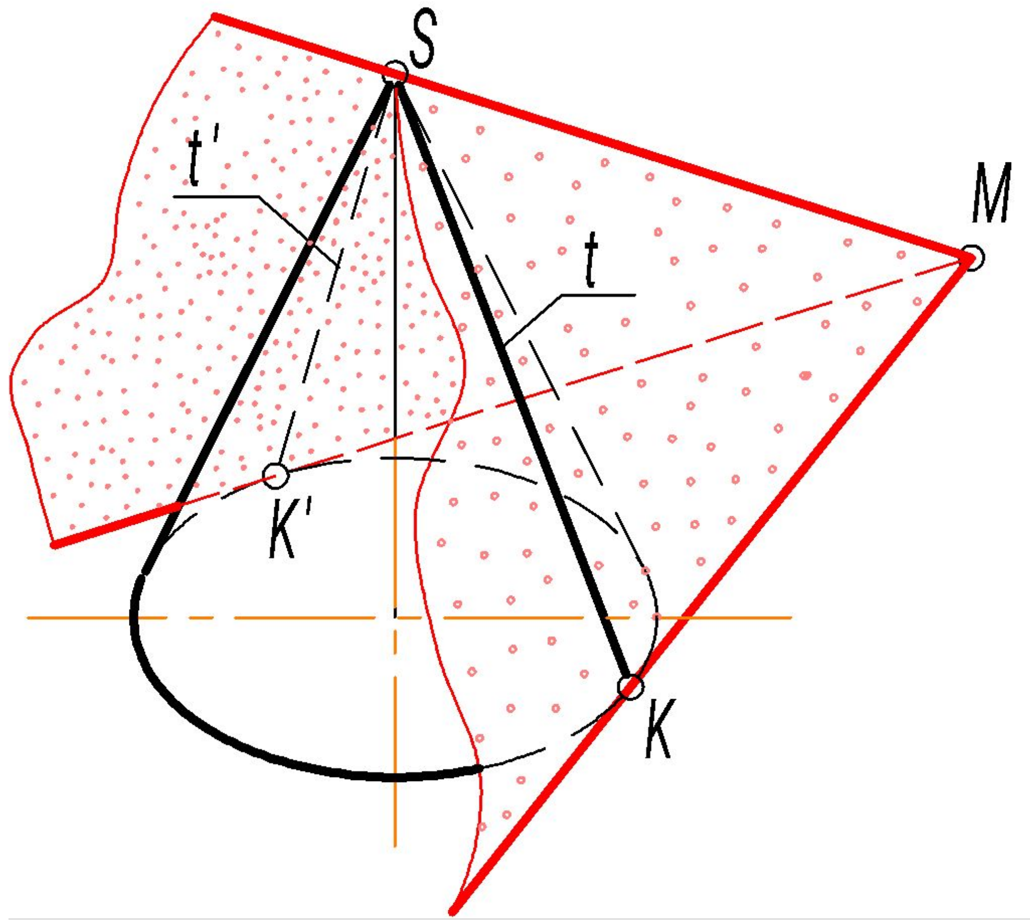
2. $\Sigma = m \cap n = K$, $n \perp Г \Rightarrow n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$.

3. $\Sigma \perp Г$.

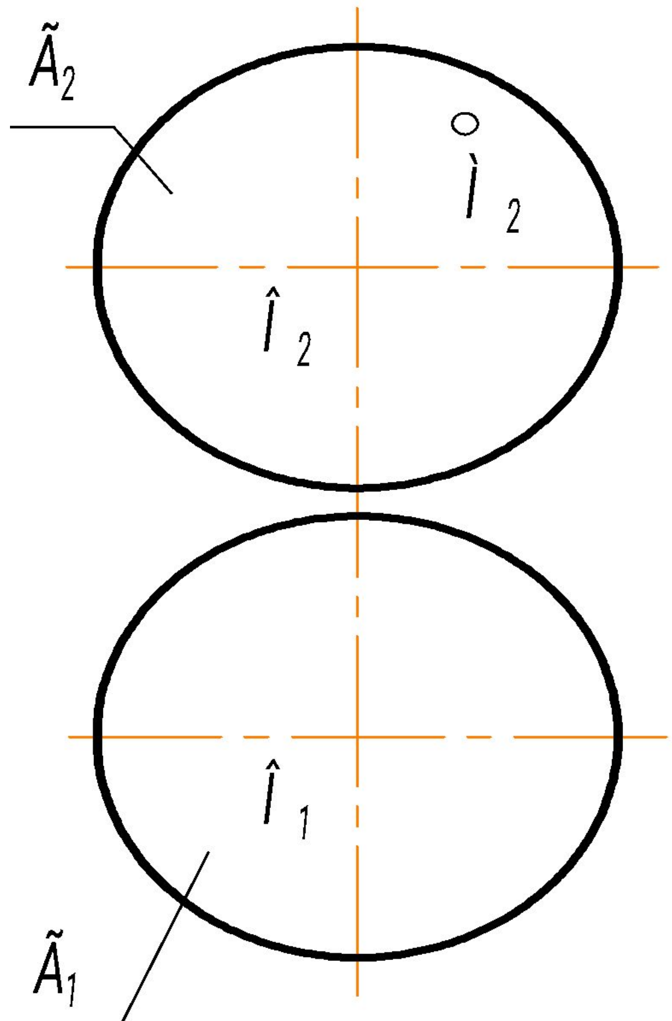
Построение плоскости, касательной к поверхности

- Касательная плоскость - это множество всех касательных прямых, проведённых к данной кривой поверхности и проходящих через одну её точку.
- На чертеже плоскость, касательную к поверхности, можно задавать, например, двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к поверхности в данной точке. Но можно касательную плоскость задавать различными условиями, характер которых зависит от вида поверхности.

Например, к конусу касательную плоскость можно провести так, чтобы она проходила через точку *M*, расположенную вне поверхности конуса. Причём, такая задача имеет два решения, так как через данную точку можно провести две плоскости, касающиеся поверхности конуса по образующим *SK* и *SK'*, которые в то же время являются касательными, соответственно, *t* и *t'*.



Задача: Через точку *M(M₂)* на сфере *Г* с центром в точке *O* провести плоскость *Σ*, касательную к её поверхности



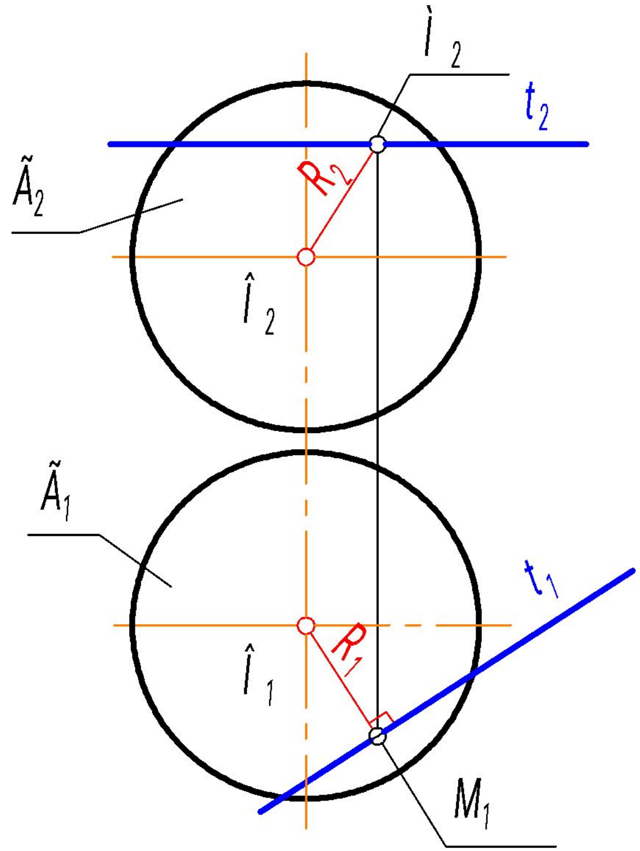
Так как любая прямая, принадлежащая касательной плоскости к сфере, будет перпендикулярна к её радиусу, то задача сводится к построению плоскости, перпендикулярной прямой. Плоскость удобно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых будет перпендикулярна радиусу сферы.

Алгоритм:

1. Находим M_1 по принадлежности сфере.

2. Проводим R_1 и R_2 из центра сферы O_1 и O_2 к точкам M_1 и M_2.

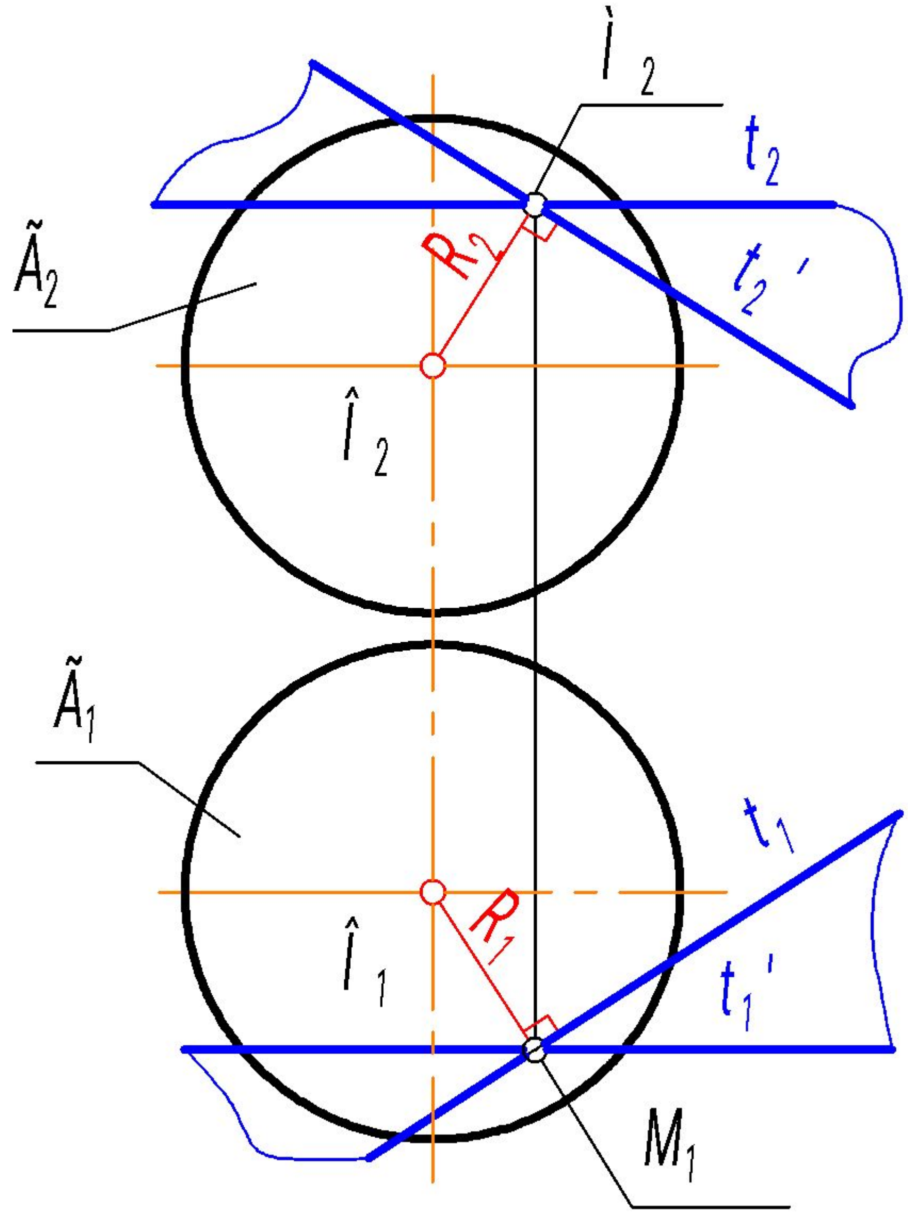
3. Проводим $t_1 \perp R_1$ - это горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной радиусу, а, следовательно, касательной к сфере. Поскольку, прямой угол на $П_1$ спроецирован в натуральную величину, то прямая t - горизонталь, и её проекция на $П_2$ будет перпендикулярна линиям связи $\Rightarrow t_2$.



4. Аналогично проводим построения второй касательной *t'*, которая перпендикулярна радиусу: $t_2' \perp R_2$, $t_1' \perp$ линиям связи, то есть *t'* - фронталь.

5. Плоскость $\Sigma(t \cap t') \perp R \Rightarrow \Sigma$ - касательная к сфере.

- Примечание: В данной задаче видимость поверхности не учитывалась.


Ì 2
t2
Ã2
R2
t2 '
Î 2
Ã1
t1
R1
Î 1
t1'
M1

Алгоритмическая запись решения:

1. $M \in \Gamma \Rightarrow M_1$.

2. $OM = R \Rightarrow O_1M_1 = R_1,\ O_2M_2 = R_2$.

3. $\Sigma(t \cap t') = M;\ t=h,\ t \perp R \Rightarrow t_1 \perp R_1,\ t_2 \perp M_2M_1$.

4. $t' = f,\ t' \perp R \Rightarrow t_2' \perp R_2,\ t_1' \perp M_2M_1$.

5. $\Sigma \perp R \Rightarrow \Sigma$ - $\underline{U}$ Γ.

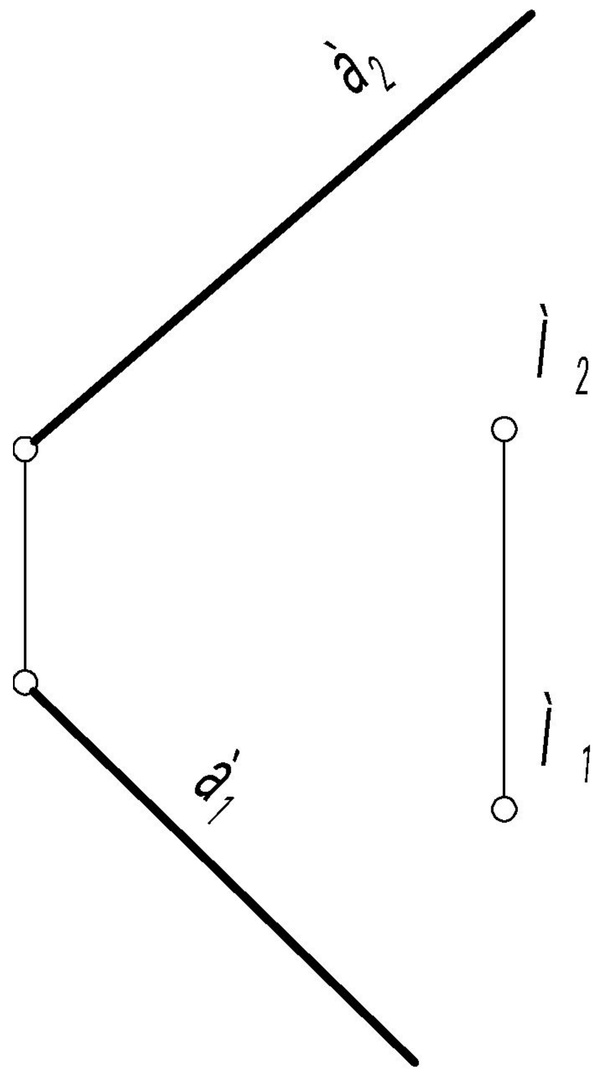
Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами

К таким задачам относятся: задачи на определение расстояний от точки до прямой, до плоскости, до поверхности; между параллельными и скрещивающимися прямыми; между параллельными плоскостями и т. п.

Все эти задачи объединяют три обстоятельства:

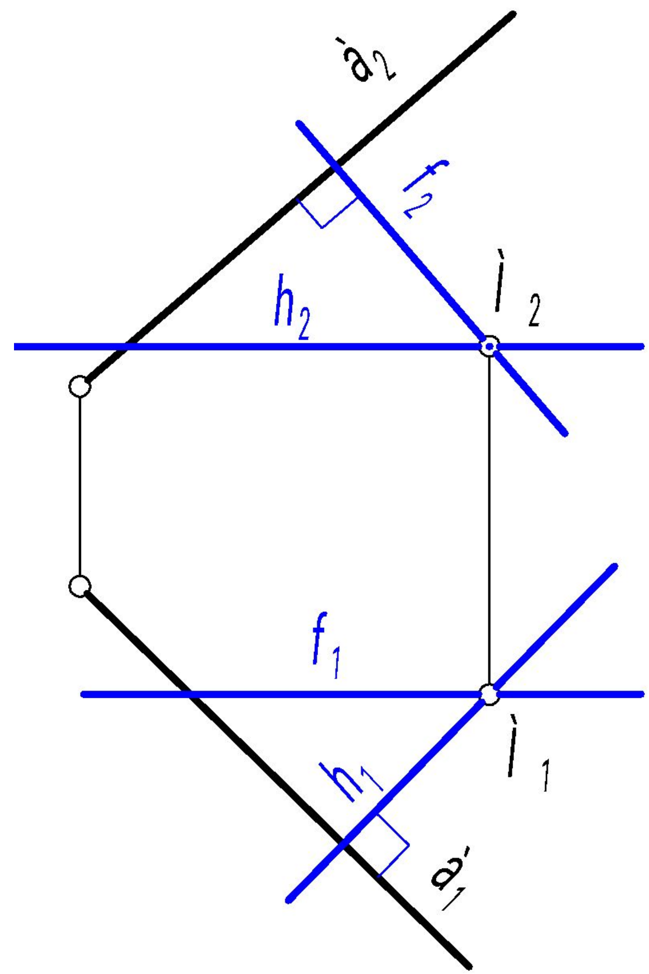
- **во-первых**, поскольку кратчайшим расстоянием между такими фигурами является перпендикуляр, то все они сводятся к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.
- **во-вторых**, в каждой из этих задач необходимо определять натуральную длину отрезка, то есть решать вторую основную метрическую задачу.
- **в-третьих**, это сложные по составу задачи, они решаются в несколько этапов, и на каждом этапе решается отдельная, небольшая конкретная задача.

Задача: Определить расстояние от точки *M* до прямой общего положения *a*



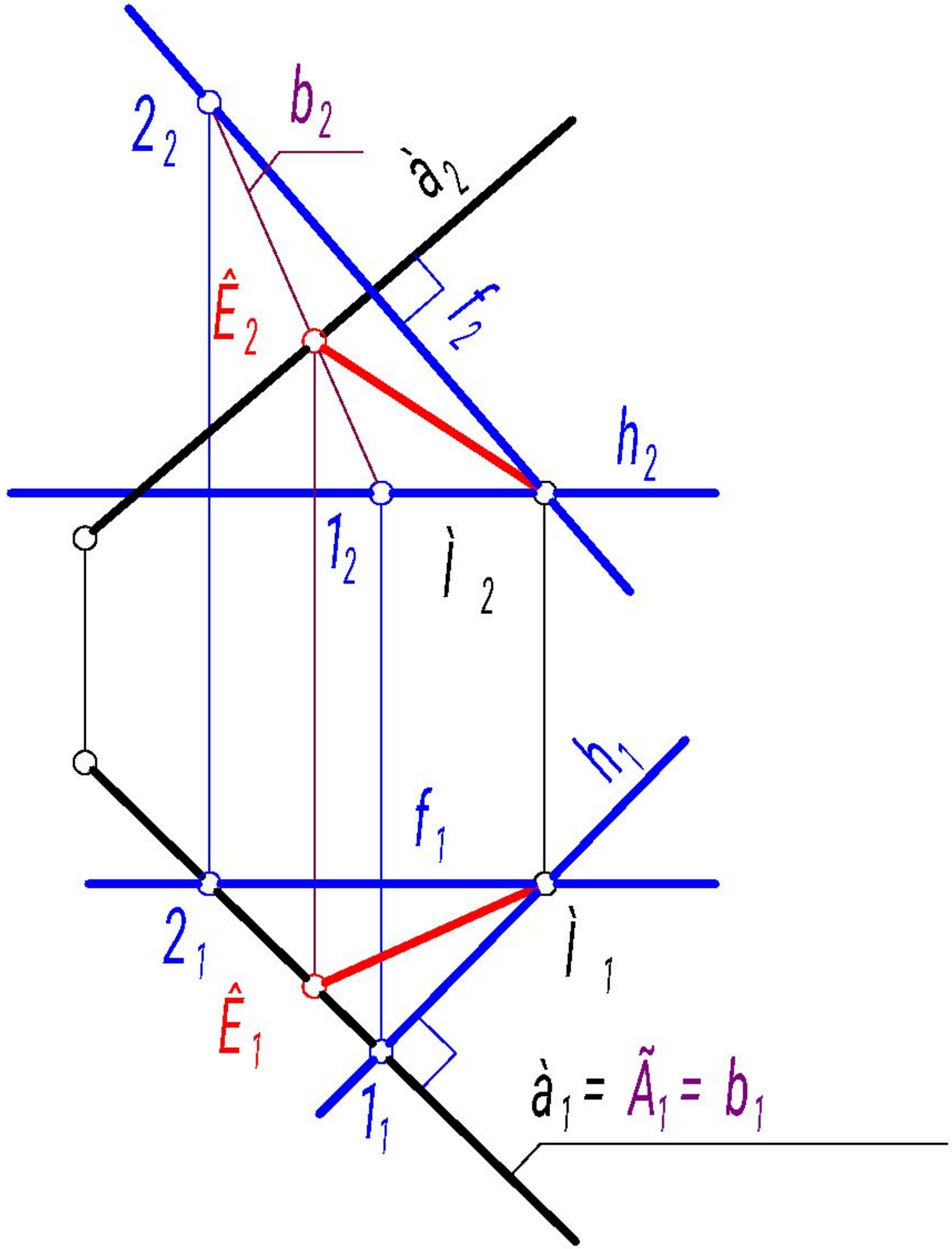
Алгоритм:

1 этап: Расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр. Поскольку прямая *a* - общего положения, то для построения перпендикуляра к ней необходимо вначале через точку *M* провести плоскость *Σ*, перпендикулярную *a*. Задаём эту плоскость, как обычно, $h \cap f$, при этом $h_1 \perp a_1$, а $f_2 \perp a_2$



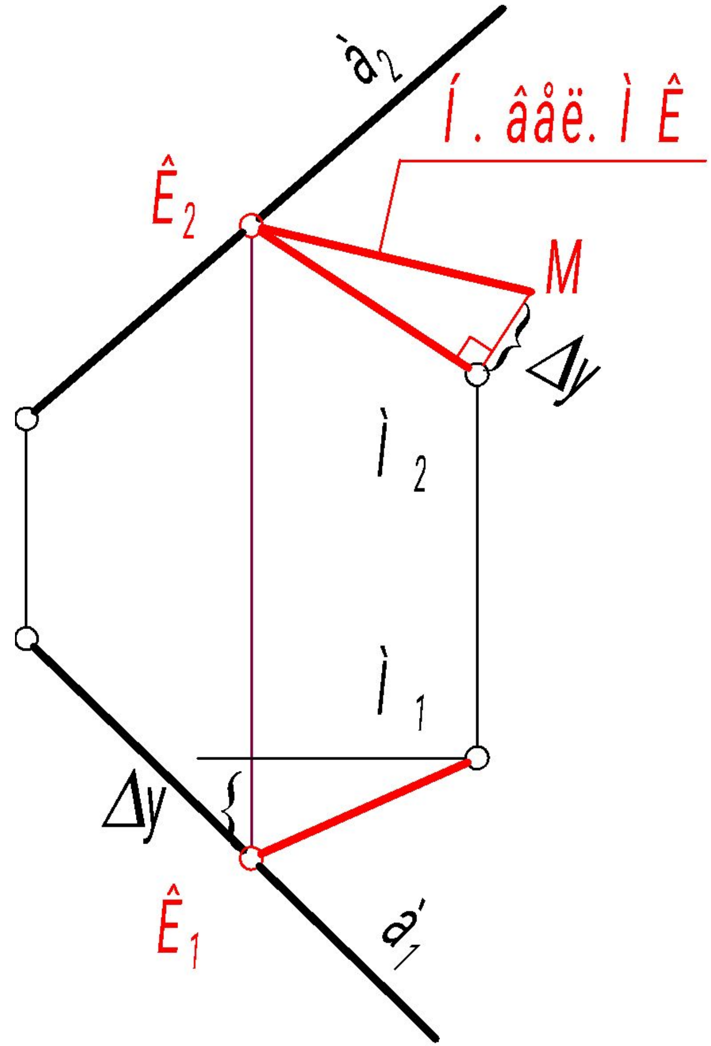
2 этап: Для построения перпендикуляра необходимо найти для него вторую точку. Это будет точка *K*, принадлежащая прямой *a*. Для её нахождения нужно решить позиционную задачу, то есть, найти точку пересечения прямой *a* с плоскостью *Σ*. Решаем 1ГПЗ по третьему алгоритму:

- вводим плоскость - посредник *Г*, $Г \perp\perp П_1$, $Г \supset a \Rightarrow Г_1 = a_1$;
- $Г \cap \Sigma = b$, $Г \perp\perp П_1 \Rightarrow b_1(1_1 2_1) = Г_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$.
- $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$.

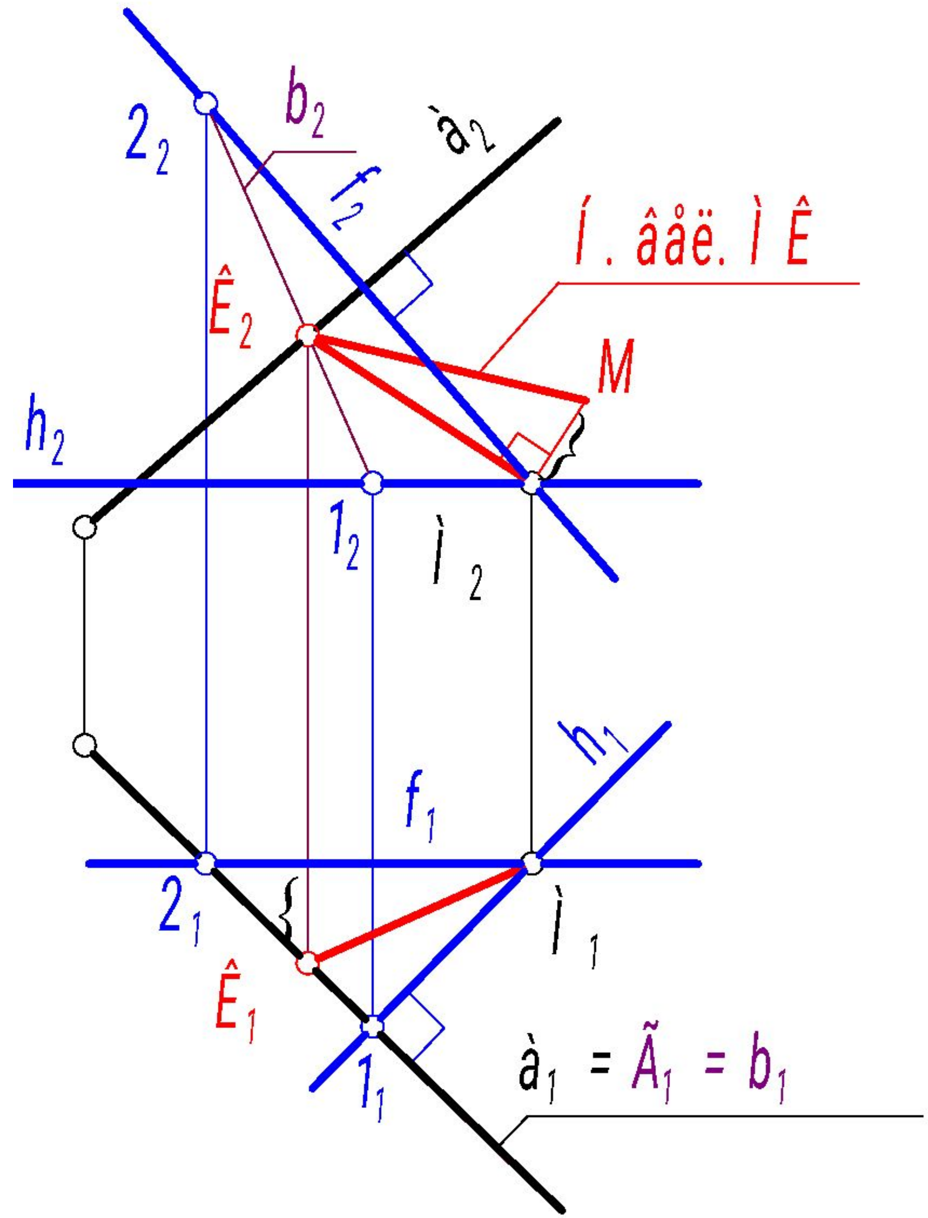


2 2
b 2
à 2
Ê 2
f 2
h 2
1 2
Ì 2
h 1
f 1
2 1
Ì 1
Ê 1
1 1
à 1 = Ã 1 = b 1

3 этап: Находим натуральную величину *МК* методом прямоугольного треугольника



Полное решение задачи



Алгоритмическая запись решения:

1. $\Sigma \perp a$, $\Sigma = h \cap f = M$, $h_1 \perp a_1$, $f_2 \perp a_2$.

2. Вводим плоскость - посредник Γ,

- $\Gamma \perp\perp \Pi_1$, $\Gamma \supset a \Rightarrow \Gamma_1 = a_1$;

- $\Gamma \cap \Sigma = b$, $\Gamma \perp\perp \Pi_1 \Rightarrow b1(1_1 2_1) = \Gamma_1$, $b \subset \Sigma \Rightarrow b_2(1_2 2_2) \subset \Sigma_2$.

- $b_2 \cap a_2 = K_2 \Rightarrow K_1$.

3. Находим натуральную величину MK.

Выводы:

1. Решение всех метрических задач сводится к решению первой основной метрической задачи - на взаимную перпендикулярность прямой и плоскости.

2. При определении расстояний между геометрическими фигурами всегда используется вторая основная метрическая задача - на определение натуральной величины отрезка.

3. Плоскость, касательную к поверхности в одной точке, можно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых является касательной к данной поверхности.