Лекция 1

Введение.
Методы проецирования.
Свойства параллельного проецирования

Предмет и метод курса

- Начертательная геометрия изучает пространственные формы и их отношения, используя метод проецирования («начертания»), с помощью которого строятся различные изображения, в том числе и технические чертежи. В теории изображения изучаются законы построения отображений различных фигур на плоскости.
- На основе этих законов выполняются чертежи как сложнейших машин и механизмов, так и простых деталей и моделей, а также формируется возможность изображать и такие предметы, которые существуют лишь в воображении человека.

Символика и обозначения

- Точки - прописными буквами латинского алфавита(*A,B,C*) или арабскими цифрами(*1,2,3*).
- Линии - строчными буквами латинского алфавита (*a, b, c*...)
- Поверхности - прописными буквами греческого алфавита: *Γ* - гамма, *Δ* - дельта, *Λ* - лямбда, *Σ* - сигма, *Φ* - фи, *Ψ* - пси, *Ω* - омега...
- Углы - $\angle ABC$, $a \wedge b$, $m \wedge AB$ или α, β, γ...
- Параллельность - ||
- Перпендикулярность - $\perp$
- Касание - $\underline{U}$
- Совпадение или тождество - =
- Принадлежность, включение - $\subset$ или $\in$, концы знака направлены в сторону большемерной фигуры.
- Пересечение - $\cap$
- Вращение - □
- Логическое следствие - $\Rightarrow$
- Фигура, проецирующая относительно... - $\perp\perp$.
- Скрещивающиеся прямые - $\underline{\circ}$
- Расстояние между элементами пространства - | | : | *AB* | - расстояние от точки *A* до точки *B*; | *Aa* | - расстояние от точки *A* до линии *a*; | *ab* | - расстояние между линиями *a* и *b*; | *AΣ* | - расстояние от точки *A* до поверхности *Σ*; | *ΓΣ* | - расстояние между поверхностями.

Цель и задачи курса

Цель курса:

1. Дать студенту геометрическое образование.

2. Помочь овладеть теорией изображений, а это значит научиться решать две основные

Задачи курса:

1. Моделирование пространства - это умение по оригиналу построить его плоское изображение;

2. Реконструирование пространства - это умение по плоскому изображению восстановить оригинал.

Краткая история начертательной геометрии

- Накопленные знания по теории и практике изображения систематизировал и обобщил французский ученый **Гаспар Монж** (1746-1818). Работа Монжа Начертательная геометрия была опубликована в 1795 г как учебное пособие.
- В России курс начертательной геометрии впервые начал читать в 1810 г К. И. Потье, ученик Монжа.
- В 1812 г вышел в свет первый в России оригинальный курс начертательной геометрии Я. А. Севастьянова. Большой вклад внесли в развитие начертательной геометрии проф. Н. И. Макаров, В.И Курдюмов, Н.А Рынин, И. И. Котов, Н.С. Кузнецов и др.

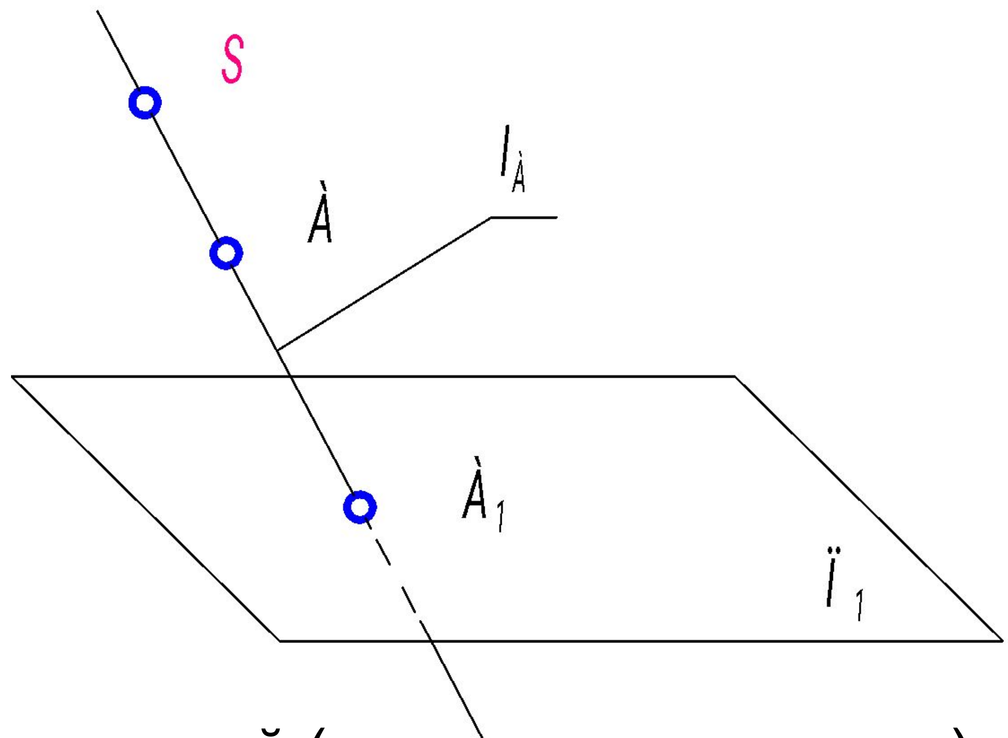
Методы проецирования

Основной метод начертательной геометрии - метод проецирования

Различают:

1. центральное проецирование
2. параллельное проецирование
3. ортогональное проецирование

Аппарат проецирования



$П_1$ -плоскость проекций (картинная плоскость)
S - центр проецирования
A - точка в пространстве
A_1 - проекция точки
lA - проецирующий луч

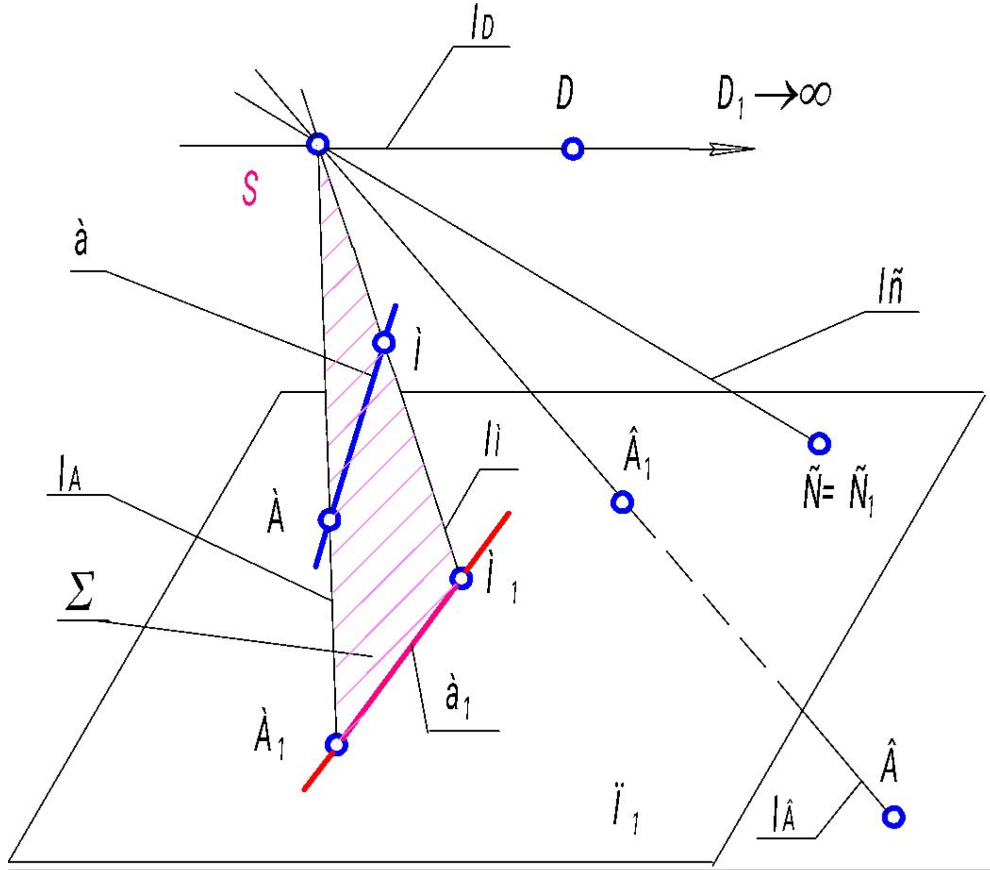
Спецификой курса начертательной геометрии является то, что изучение ведется на абстрактных геометрических фигурах: **точка, линия, плоскость, поверхность**. Мы будем изучать принципы построения изображений этих фигур на плоскости.

Точка - это нульмерная геометрическая фигура, неделимый элемент пространства, т.е. она не может быть определена другими более элементарными понятиями.Обозначается - *A,B,C*...- прописными буквами латинского алфавита. или цифрами. Точка не имеет размеров, то что мы показываем на чертеже точку в виде какой - то площади, пересечением двух линий или кружочком, является лишь ее условным изображением.

- Линия - одномерная геометрическая фигура, обозначается строчными буквами латинского алфавита - *а,в,с*... В начертательной геометрии линия определяется кинематически, как траектория непрерывно движущейся точки в пространстве.

Центральное проецирование

- Проецирование, когда проецирующий луч проходит через фиксированную точку *S*, называется центральным.
- По принципу центрального проецирования работают фото - и кинокамеры. Упрощенная схема работы человеческого глаза близка к этому виду проецирования. Изображения, построенные по принципу центрального проецирования, наиболее наглядны и их широко используют в своей работе архитекторы, дизайнеры, геологи и др.



$П_1$ - плоскость проекций (картинная плоскость,*S* - центр проецирования,
B, C, D - точки в пространстве, *C_1, B_1, D_1* - проекции точек
lB, lC, lD - проецирующие лучи
Σ - плоскость, проведенная через центр проецирования *S* и прямую *a*.
AM - прямая в пространстве
A_1M_1 - проекция прямой (или отрезка)

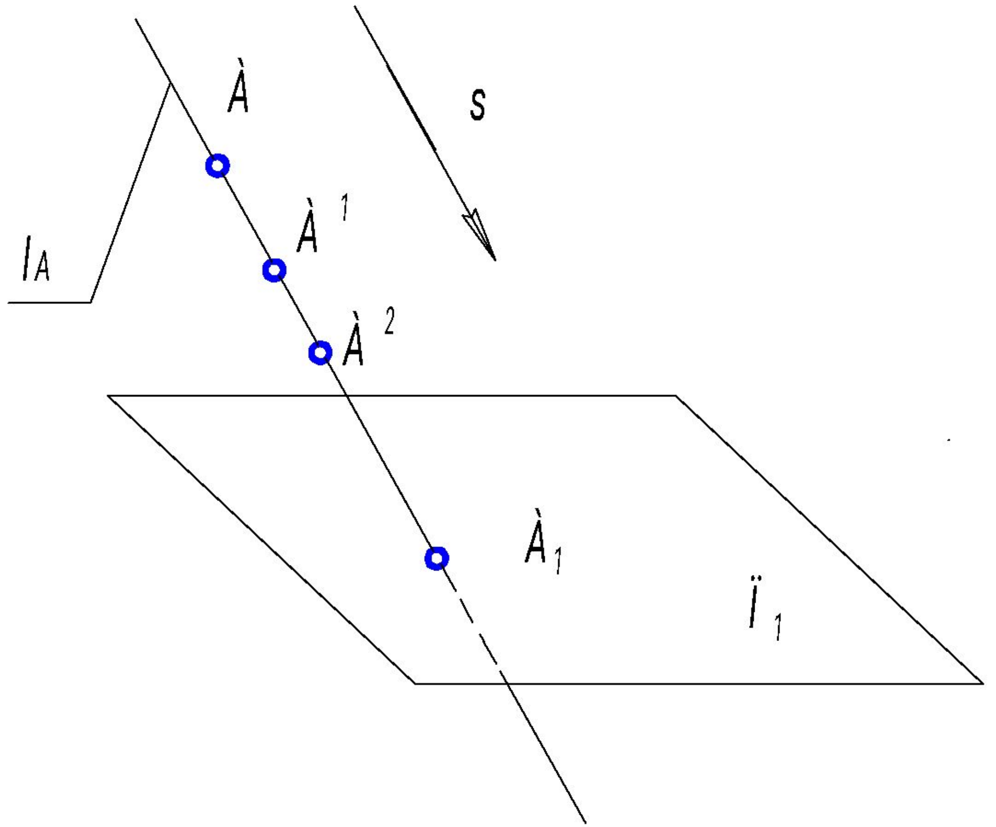
Через точку S (центр проецирования) и точку B проведем проецирующий луч lB, отметим точку пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью: $S \in lB$, $B \in lB$, $lB \cap П_1 = B_1$, на чертеже видно, что каждой точке пространства соответствует единственная проекция на плоскости. Аналогично точке B можно построить проекцию любой точки пространства, например точки C.

Описанным методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки геометрической фигуры, а, следовательно, и проекция самой фигуры. Например , центральную проекцию отрезка AM на плоскость $П_1$ можно построить как линию пересечения плоскости Σ, проведенной через центр S и прямую AB, с плоскостью проекций. Так как две плоскости пересекаются по единственной прямой, то проекция прямой есть прямая, и притом, единственная,
т. е. $\Sigma \supset S, AM; \Sigma \cap П_1 \Rightarrow A_1M_1$.

Параллельное проецирование

Проецирование называется параллельным, если центр проецирования удален в бесконечность, а все проецирующие лучи параллельны заданному направлению *s*.

s - направление проецирования



- Чтобы найти точку *A_1* - параллельную проекцию точки *A*, построенную по направлению *s* на плоскости проекций *$П_1$*, нужно через точку *A* провести проецирующий луч *lA*, параллельный прямой *s*, и определить точку его пересечения с плоскостью *$П_1$*:

$lA \supset A,\ lA \parallel s,\ lA \cap П_1 = A_1$

- Точка *A_1* является параллельной проекцией как для точки *A*, так и для точек *A_1* и *A_2*

Свойства параллельных проекций

- Геометрическая фигура в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением, но некоторые свойства оригинала сохраняются в проекциях при любом преобразовании и называются его инвариантами (остаются неизменными).

Первое свойство. Проекция точки на плоскость проекций есть точка.

Важно не само свойство, а следствие из него:

Каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций. Доказательством может служить то, что через точку А можно провести только одну прямую, параллельную заданному направлению проецирования, и эта прямая пересечется с плоскостью проекций только в одной точке.

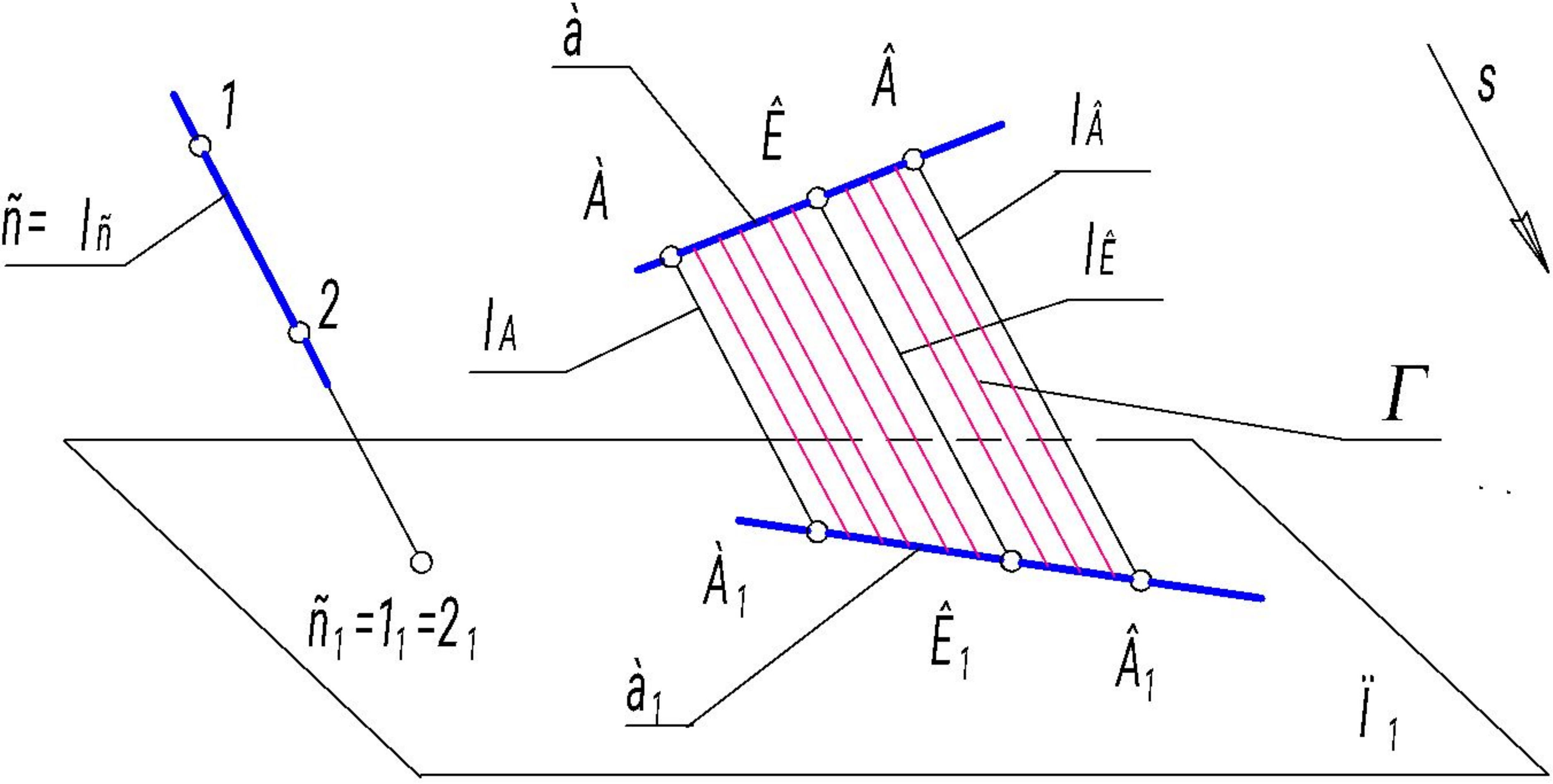
$lA \supset A, lA \parallel s, lA \cap П_1 = A_1$

Второе свойство. Проекция прямой линии в общем случае есть прямая.

$Г \cap a, Г \cap П1 \Rightarrow a_1$

- Если прямая параллельна направлению проецирования, то она вырождается в точку.

$lC \supset C, lC \parallel s, lC \cap П_1 = C_1; C_1$ - точка


à
Â
Ê
s
À
lÂ
ñ= lñ
1
lÊ
2
lA
Г
À1
ñ1 =11 =2 1
Ê1
Â1
à1
Ï 1

Третье свойство – принадлежности. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой, $K \in a \Rightarrow K_1 \in a_1$ Это свойство следует из определения проекции фигуры, как совокупности проекций всех ее точек (см. рис. выше)

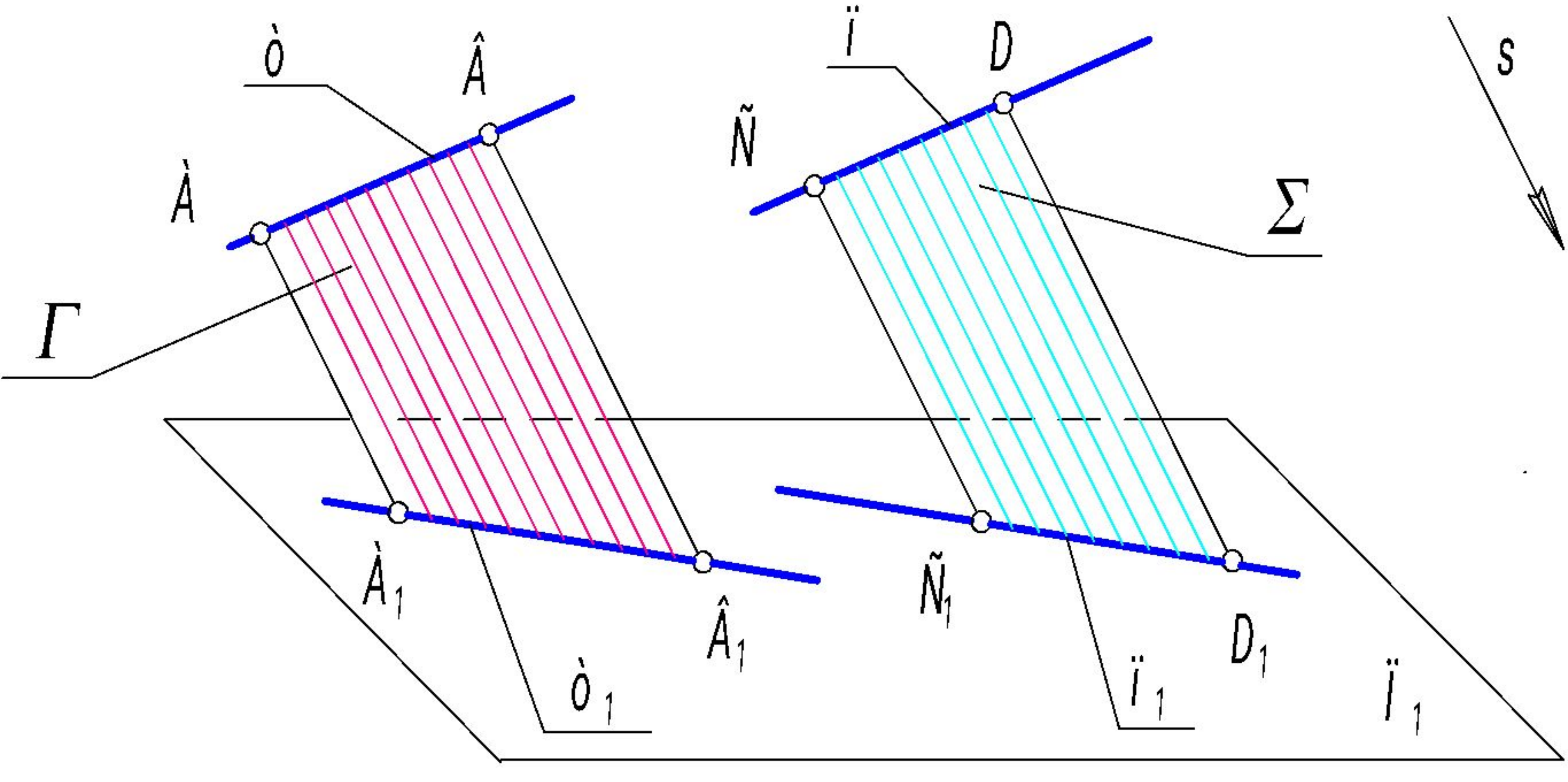
Четвертое свойство - свойство простого соотношения трех точек.

Если точка делит отрезок в некотором отношении, то и проекция этой точки делит отрезок в том же отношении (см. рис. выше).

$|AK| : |KB| = |A1K1| : |K_1B_1|$

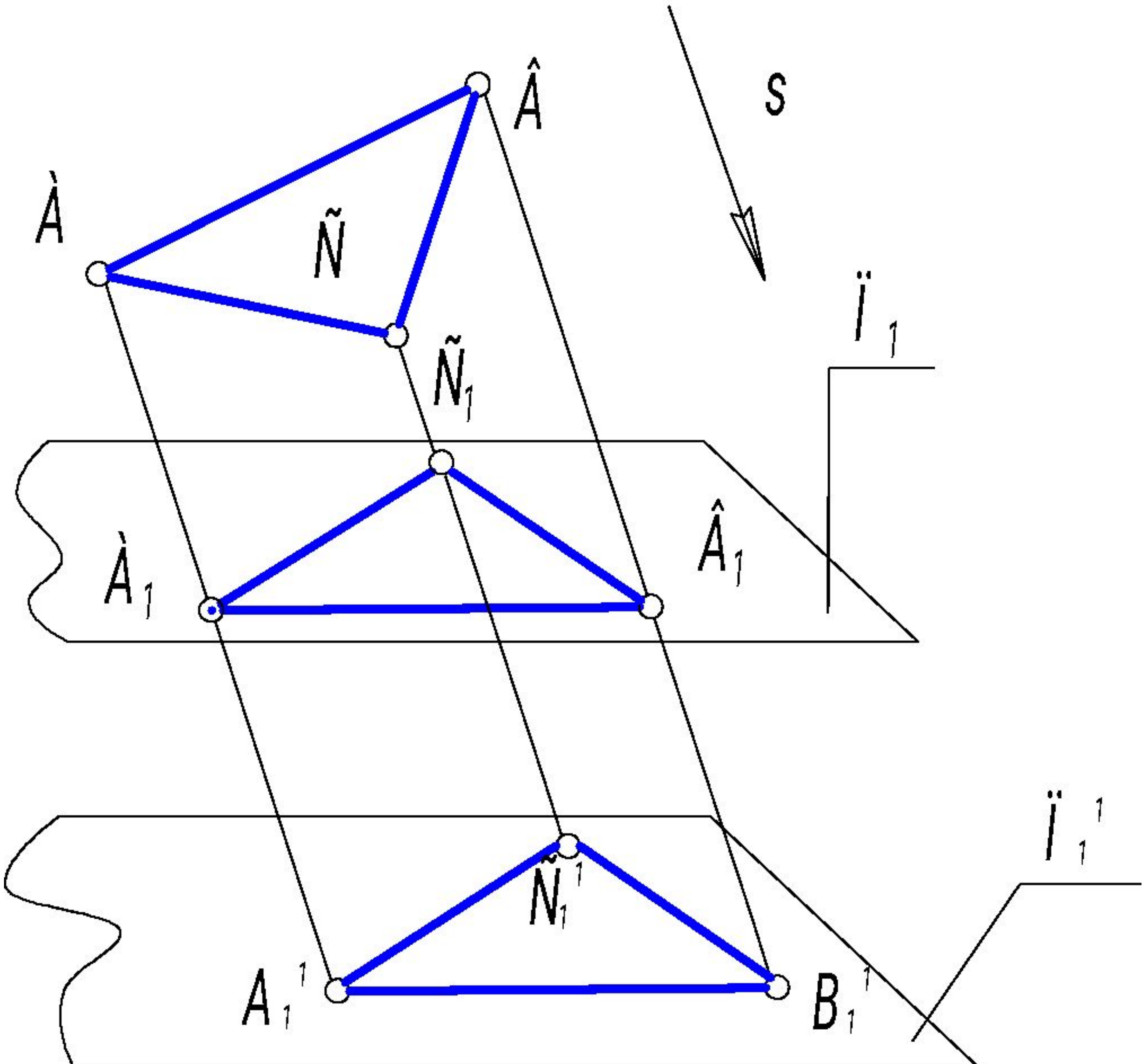
Пятое свойство. Если прямые в пространстве параллельны, то их проекции ||.

$m \parallel n \Rightarrow m1 \parallel n1$, т. к. $\Gamma \parallel \Sigma$



Шестое свойство. Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций, $AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (Рис. выше)

Седьмое свойство. Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскостей проекций: $A_1B_1C_1 = A^1B^1C^1$



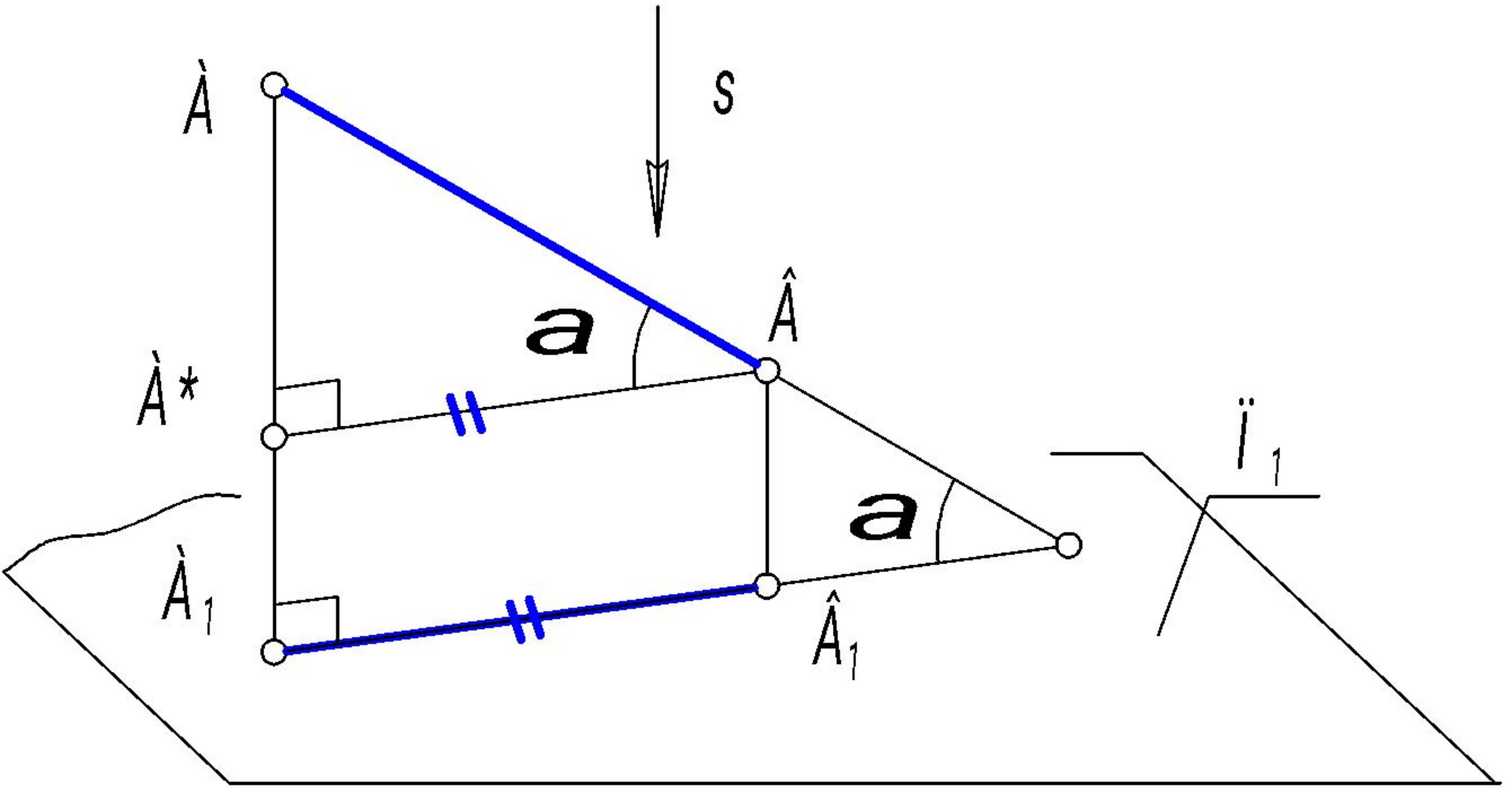
S
Â
À
Ñ
Ï1
Ñ1
À1
Â1
Ï1 1
Ñ1 1
A1 1
B1 1

- Если $\Pi_1 \parallel \Pi_1^1$, то $A_1A_1^1 = B_1B_1^1 = C_1C_1^1$ - как параллельные отрезки, заключенные между параллельными плоскостями, следовательно четырехугольники $A_1A_1^1B_1B_1^1$ *и* $B_1B_1^1C_1C_1^1$ и $C_1C_1^1A_1A_1^1$ являются параллелограммами, а у параллелограммов параллельные стороны равны. Поэтому $\Delta A_1B_1C_1 = A_1^1B_1^1C_1^1$

Ортогональное проецирование. Свойства ортогонального проецирования

- Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций ($s \perp \Pi_1$). В этом случае проекции геометрических фигур называются ортогональными.
- Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного проецирования, а также свойства, присущие только ортогональному проецированию.

Первое свойство. В общем случае ортогональная проекция отрезка всегда меньше его натуральной длины.



Если провести $A^*B \parallel A_1B_1$, то $\angle AA^*B = 90°$. Из прямоугольного треугольника следует, что AB - гипотенуза, A^*B - катет, а гипотенуза всегда больше катета ($A^*B = AB \times Cos\alpha$),

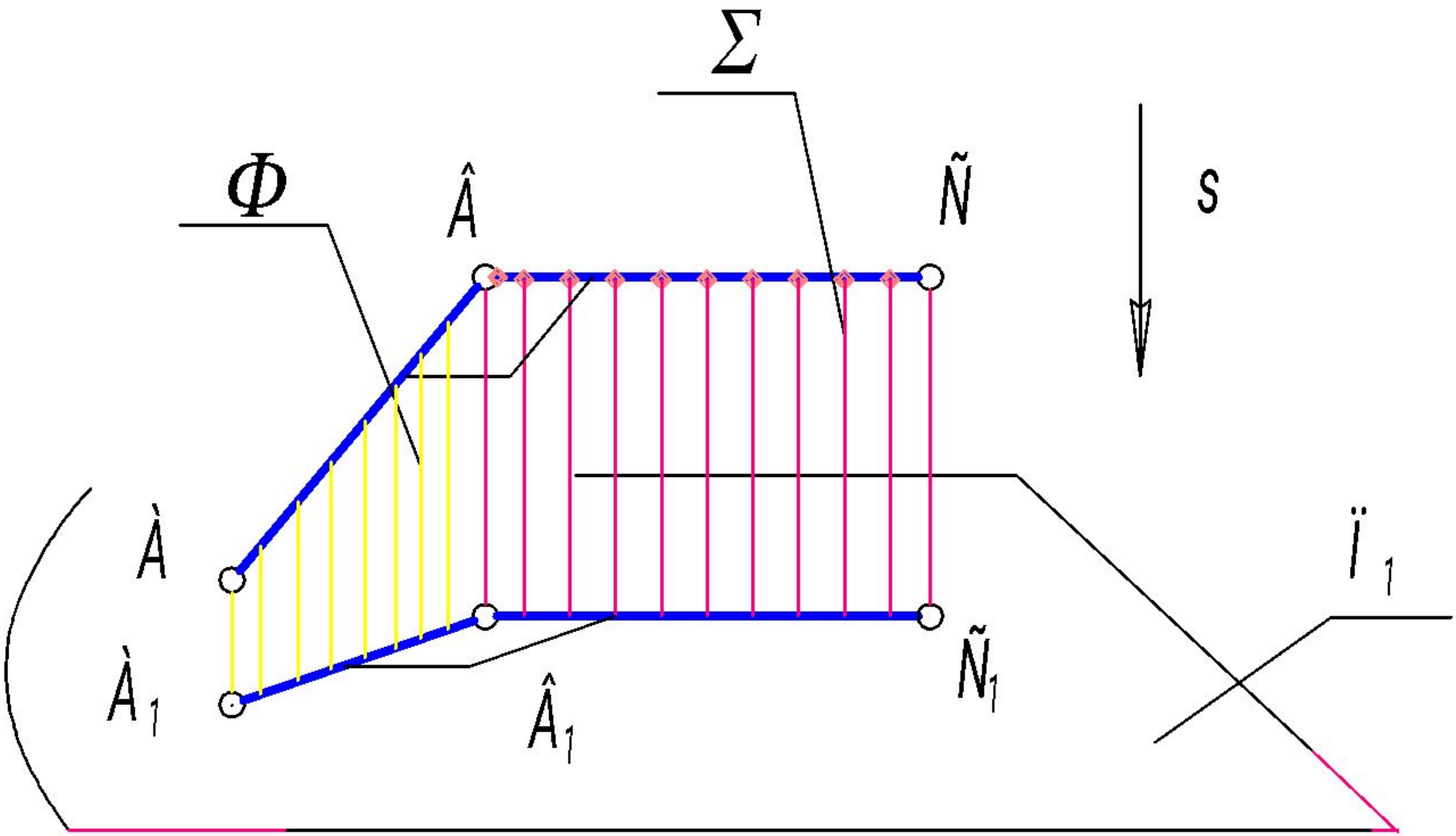
Рассмотрим частные случаи:

- Если $\alpha = 0 \Rightarrow |A_1B_1| = |AB|$, т.е. проекция равна самому отрезку.
- Если $\alpha = 90° \Rightarrow A_1 = B_1$, т.е. проекция отрезка - точка.

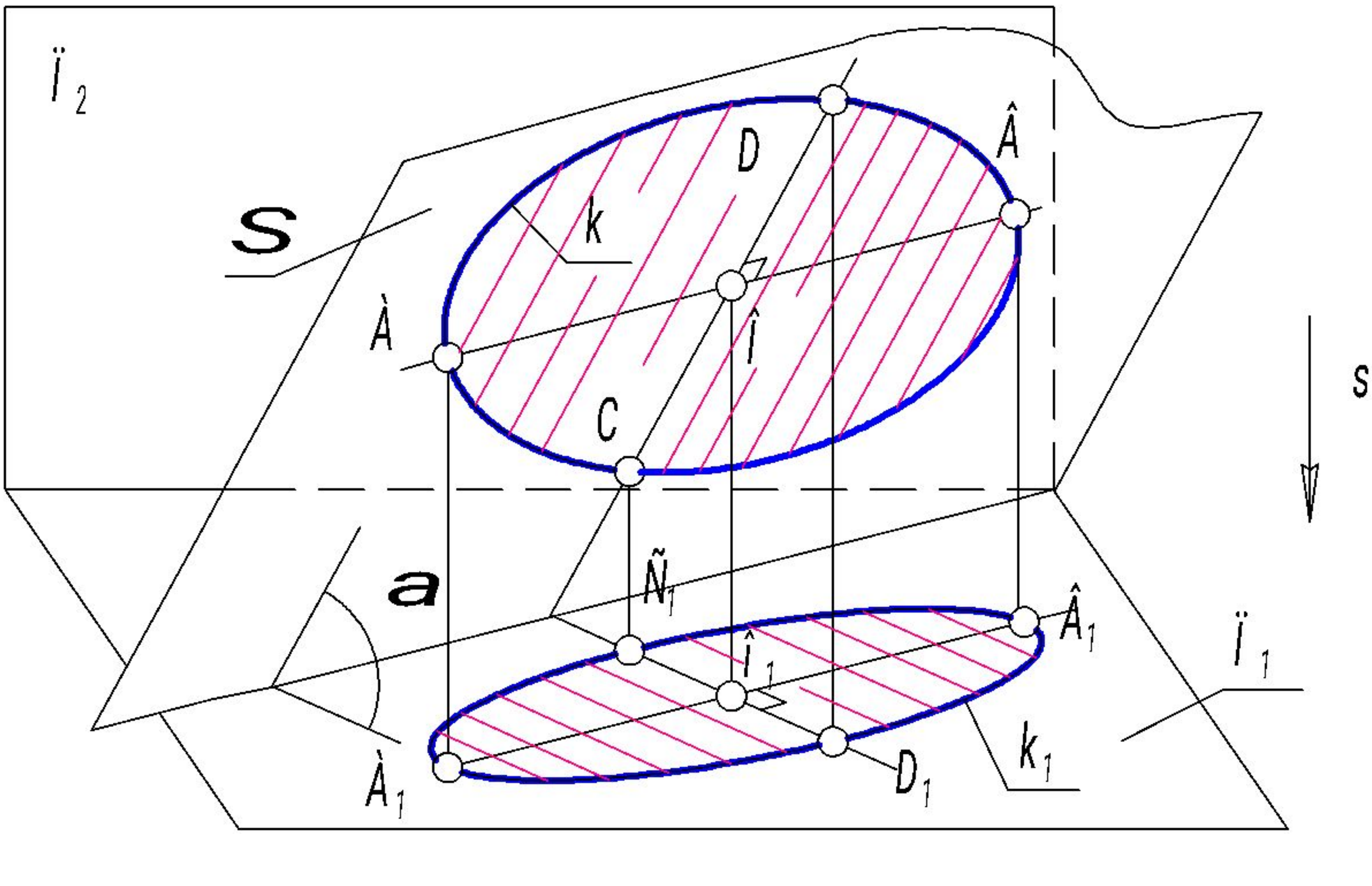
Второе свойство: теорема о проецировании прямого угла. Если одна сторона прямого угла параллельна какой-нибудь плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения.

Дано: $\angle ABC = 90°$, $BC \parallel П_1$,

- Доказательство:
- плоскость $Ф = AB \cap BB_1$
- плоскость $\Sigma = BC \cap BB_1$
- $BC \perp Ф$, *т.к.* $BC \perp AB$ *и* $BC \perp BB_1$, *но* $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow B_1C_1 \perp Ф \Rightarrow B_1C_1 \perp A_1B_1$,
- значит $\angle A_1B_1C_1$ - прямой


Σ
Φ
Â
Ñ
S
À
$\grave{A}_1$
$\hat{A}_1$
$\tilde{N}_1$
$\ddot{I}_1$

Третье свойство: ортогональная проекция окружности в общем случае есть эллипс.



Заключим окружность в плоскость Σ, $\Sigma \wedge \Pi_1 = \alpha$,
если $0 < \alpha < 90°$, то окружность (k) -эллипс (k_1)
$AB \perp CD$ - сопряженные диаметры, пусть $AB \parallel \Pi_1$
$A_1B_1 = AB$ - большая ось эллипса
$C_1D_1 = CD \times \cos\alpha$ - малая ось эллипса.
Все хорды окружности параллельные CD проецируются с коэффициентом сжатия $\cos\alpha$ и делятся осью A_1B_1 пополам, т.е. ортогональная проекция окружности, в общем случае, есть замкнутая центрально симметричная кривая второго порядка, имеющая две взаимно перпендикулярные оси.

Частные случаи:

1. Если $\Sigma \parallel \Pi_1$, то окружность (k) - проецируется без искажения.
2. Если $\Sigma \perp \Pi_1$, т.е. $\angle\alpha = 90°$, то окружность (k) - прямая линия, равная диаметру.

Чтобы однозначно решить две основные задачи курса начертательной геометрии, чертежи должны удовлетворять следующим требованиям:

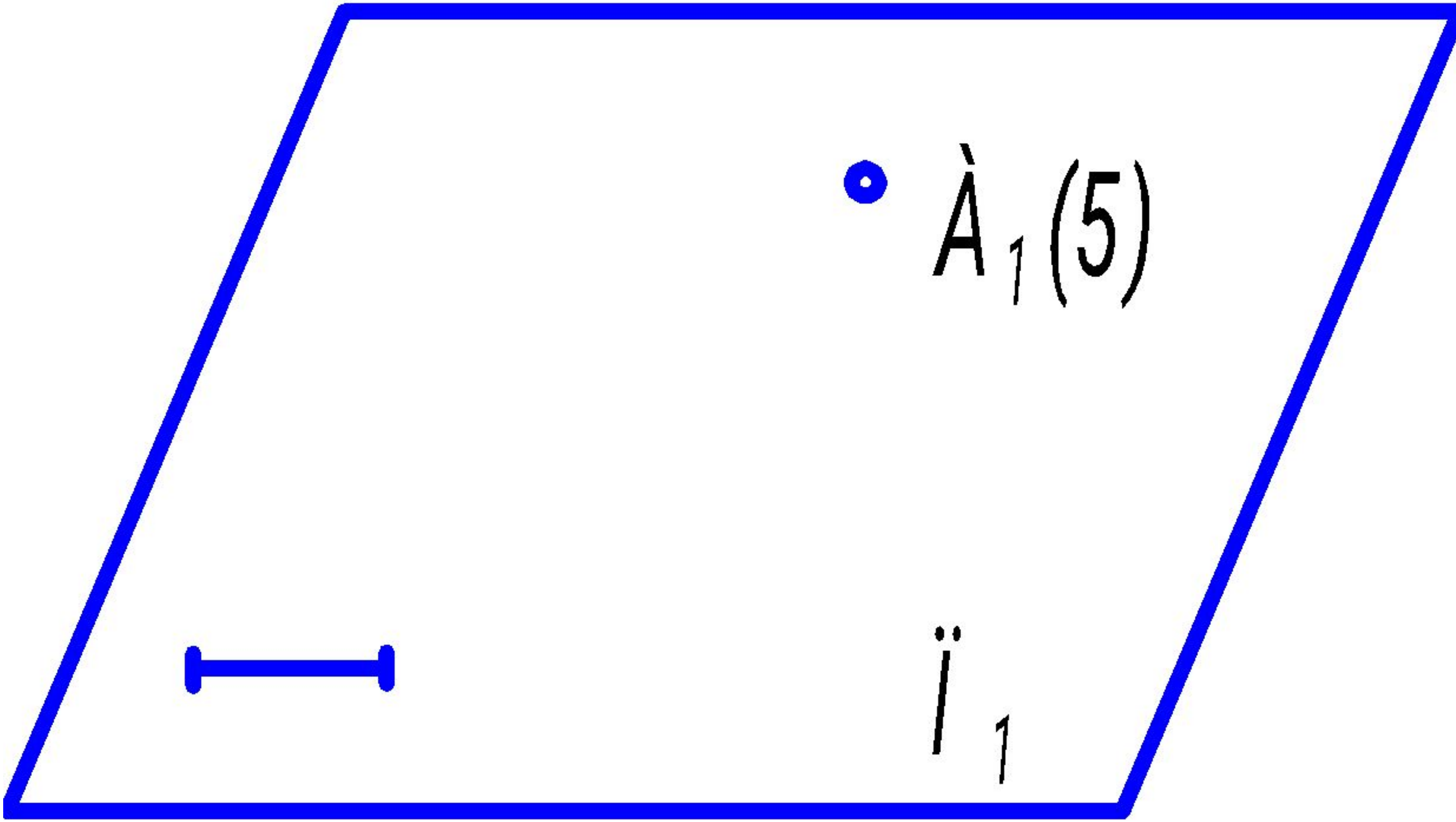
1. Простота и наглядность;
2. Обратимость чертежа.

- Рассмотренные методы проецирования с использованием однокартинных чертежей позволяют решать прямую задачу (т.е. по данному оригиналу построить его проекцию). Однако, обратную задачу (т.е. по проекции воспроизвести оригинал) решить однозначно невозможно. Эта задача допускает бесчисленное множество решений, т.к. каждую точку *A1* плоскости проекций *П1* можно считать проекцией любой точки проецирующего луча *lA*, проходящего через *A1*. Таким образом, рассмотренные однокартинные чертежи не обладают свойством **обратимости**.

Для получения обратимых однокартинных чертежей их дополняют необходимыми данными. Существуют различные способы такого дополнения. Например, **чертежи с числовыми отметками.**

- Способ заключается в том, что наряду с проекцией точки A_1 задаётся высота точки, т.е. её расстояние от плоскости проекций. Задают, также, масштаб.
- Такой способ используется в строительстве, архитектуре, геодезии и т. д. Однако, он не является универсальным для создания чертежей сложных пространственных форм.

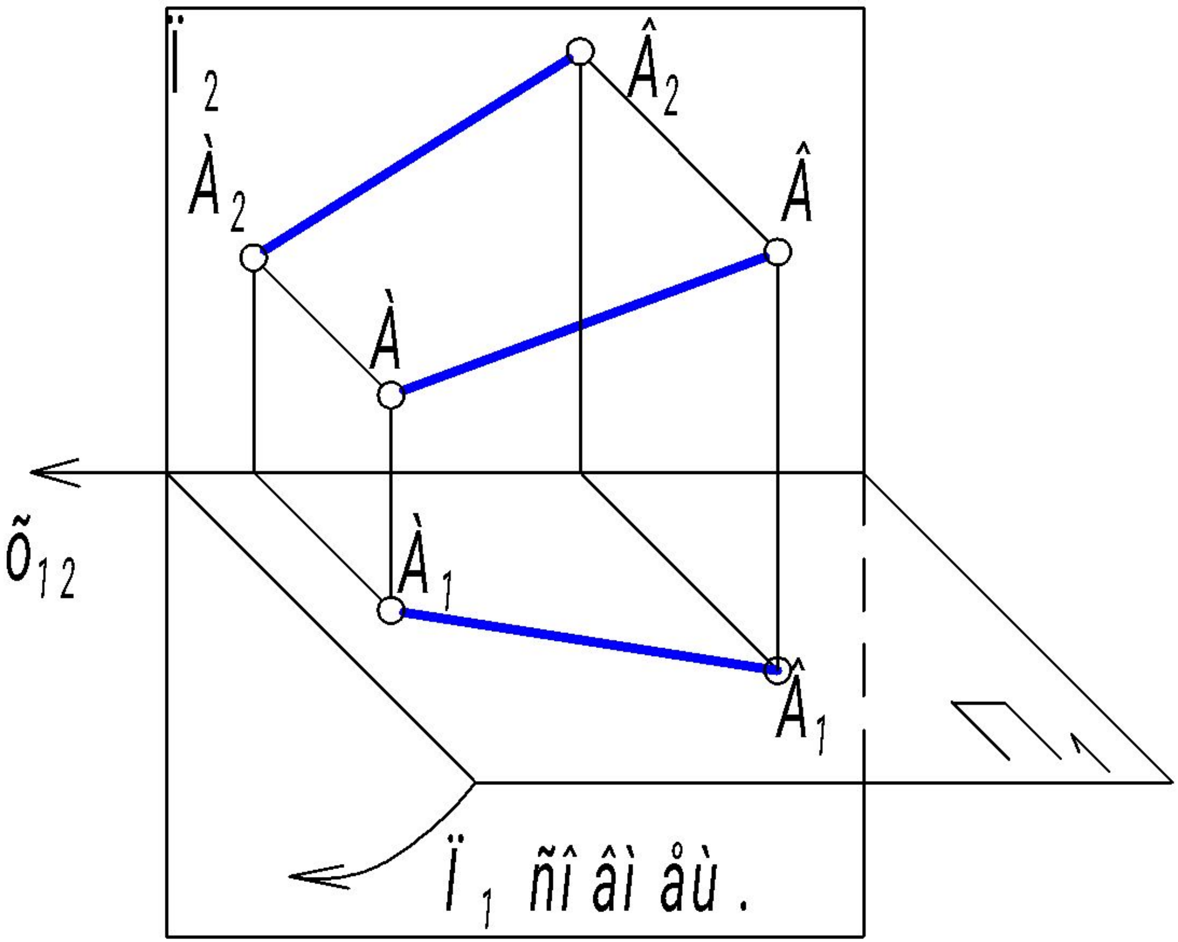
Чертеж с числовой отметкой



Метод Монжа

- В 1798 году французский геометр-инженер Гаспар Монж обобщил накопленные к этому времени теоретические знания и опыт и впервые дал научное обоснование общего метода построения изображений, предложив рассматривать плоский чертёж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Отсюда ведёт начало принцип построения чертежей, которым мы пользуемся и поныне.

1. Пространственная модель.

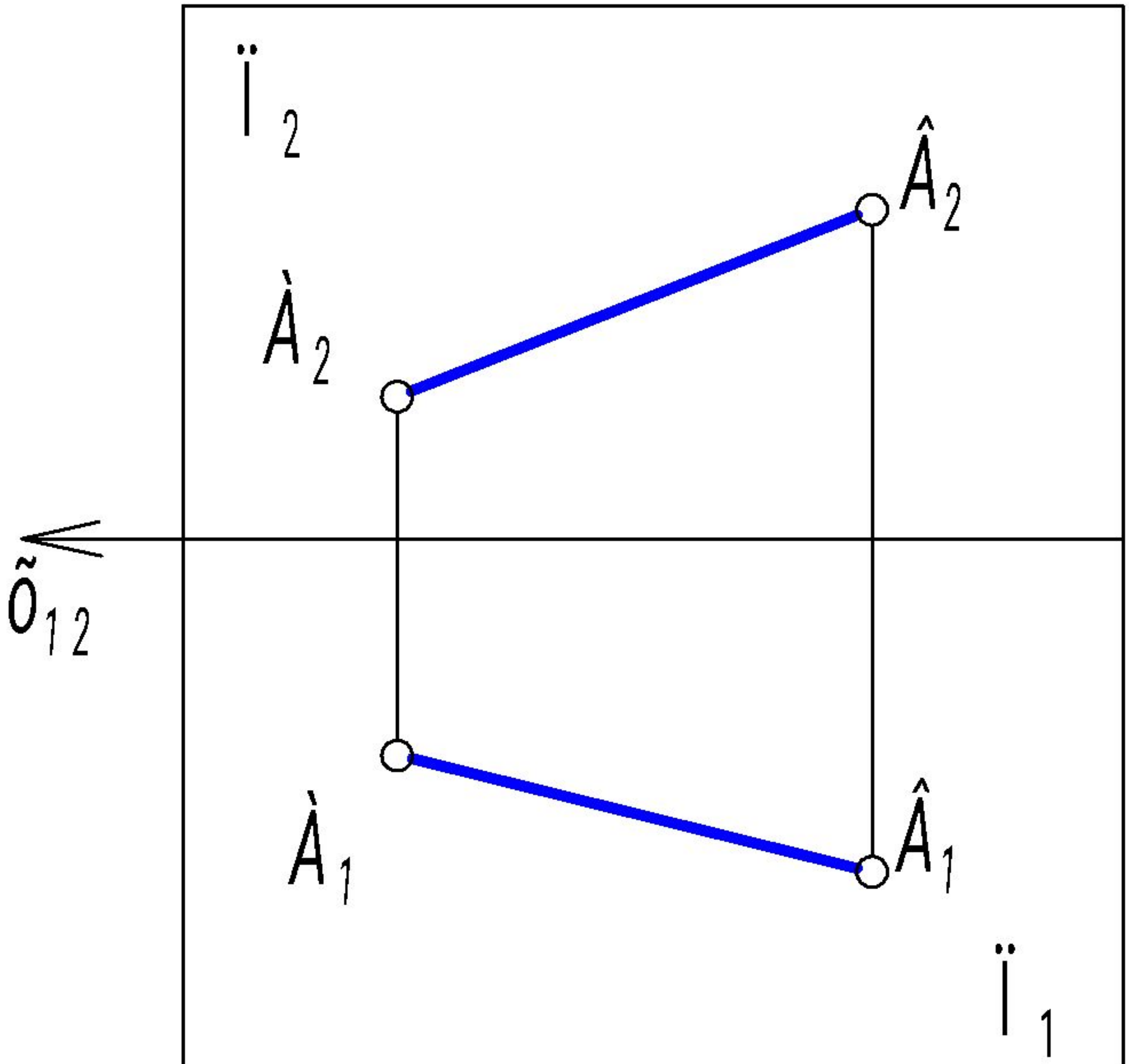


Проекции отрезка *[AB]* на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2.

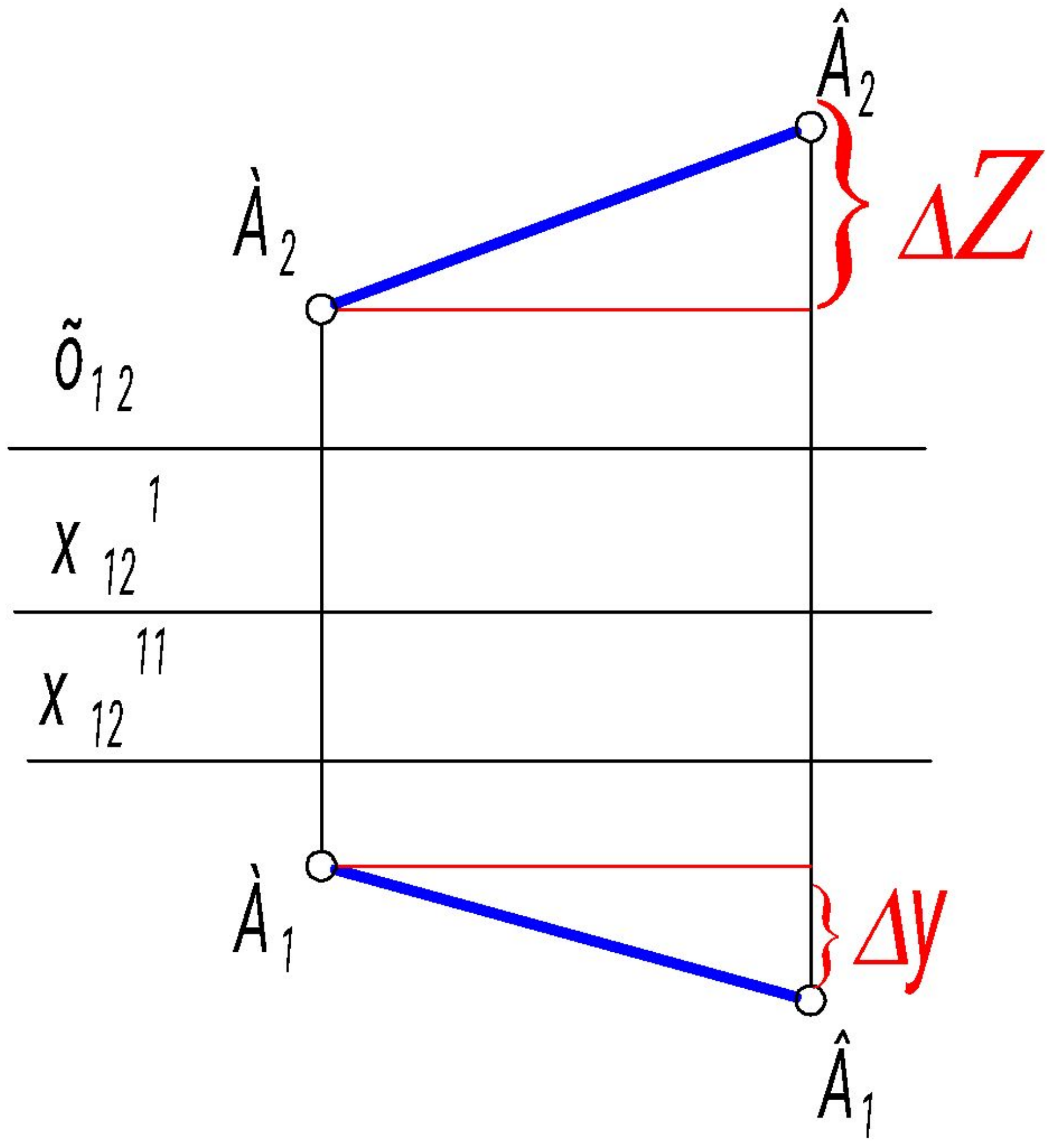
- $\Pi_1 \perp \Pi_2$. $AA_1 \perp \Pi_1$; $|AA_1|$ - расстояние от A до Π_1.
- $AA_2 \perp \Pi_2$; $|AA_2|$- расстояние от *A* до Π_2.
- Π_1 - горизонтальная плоскость проекций;
- Π_2 - фронтальная плоскость проекций.
- A_1B_1 - горизонтальная проекция отрезка;
- A_2B_2 - фронтальная проекция отрезка.
- x_{12} - линия пересечения плоскостей проекций.

2. Плоская модель.

- Рассмотрим совмещение плоскостей проекций со всем их содержимым на плоском чертеже. Совокупность проекций множества точек пространства на $П_1$ называется горизонтальным полем проекций, а на $П_2$ - фронтальным полем проекций.
- x_{12} - ось проекций, база отсчёта.
- A_1A_2, B_1B_2 $\Rightarrow$ линия связи - это прямая, соединяющая две проекции точки на комплексном чертеже. Линия связи перпендикулярна оси проекций.


Ï 2
Â2
À2
õ1 2
À1
Â1
Ï 1

3. Безосный чертёж.



- Если совмещённые плоскости $П_1$ и $П_2$ перемещать параллельно самим себе на произвольные расстояния (см. положение осей x_{12}, x_{12}^{1}, x_{12}^{11}), то будут меняться расстояния от фигуры до плоскостей проекций. Однако, сами проекции фигуры (в данном случае - отрезка *АВ*) при параллельном перемещении плоскостей проекций не меняются (согласно 7 свойству параллельного проецирования).
- *И*з рис. видно. что при любом положении оси *х*, величины *ΔZ*- разность расстояний от концов отрезка до $П_1$, и *Δy* -разность расстояний от концов отрезка до $П_2$, остаются неизменными. Поэтому нет необходимости указывать положение оси x_{12} на комплексном чертеже и тем самым предопределять положение плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ в пространстве.
- Это обстоятельство имеет место в чертежах, применяющихся в технике, и такой чертёж называется **безосным**.

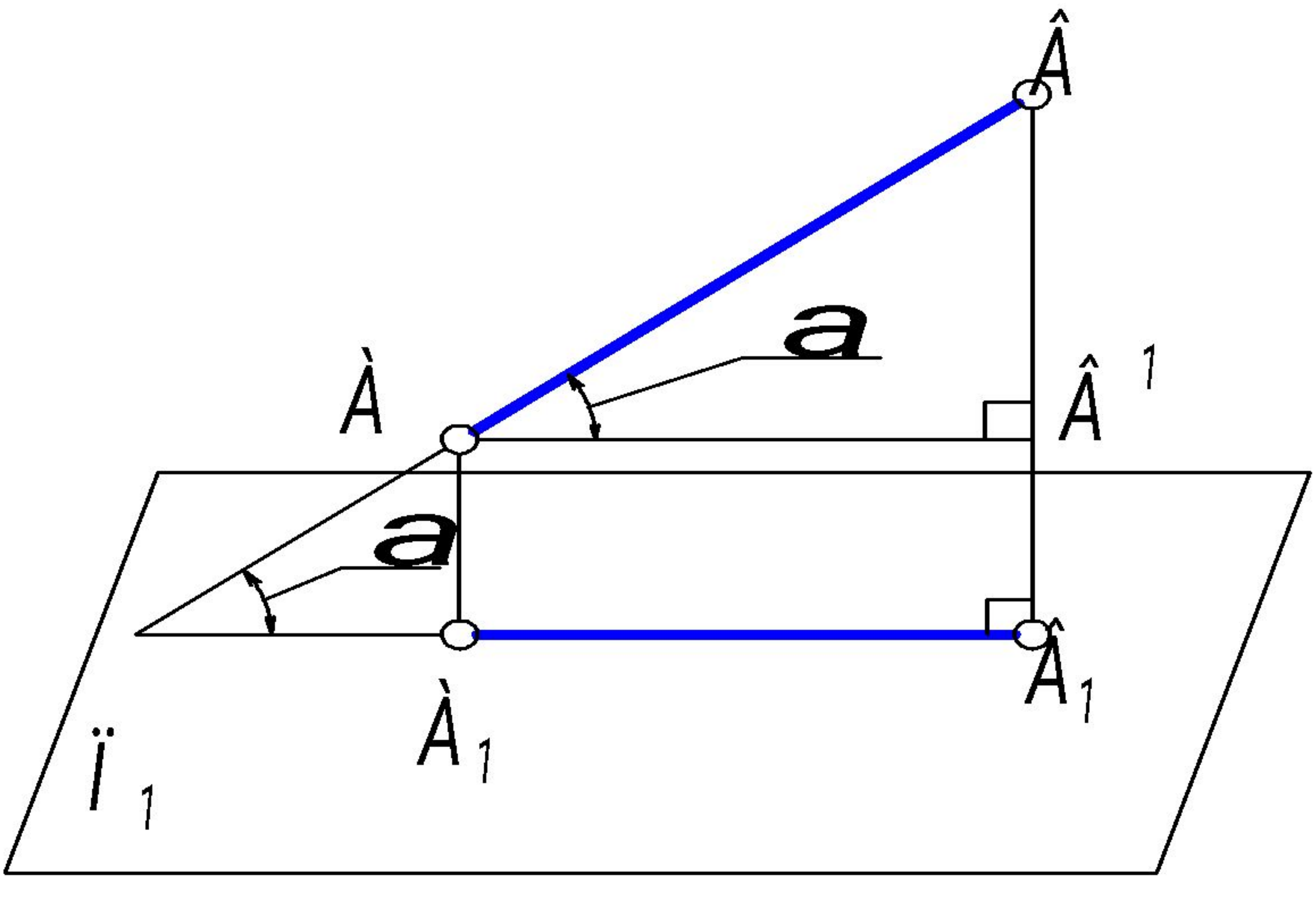
Свойства двухкартинного комплексного чертежа Монжа:

1. Две проекции точки всегда лежат на одной линии связи установленного направления.
2. Все линии связи одного установленного направления параллельны между собой.

Доказательство обратимости чертежа Монжа

- Если по плоскому изображению можно определить натуральную длину отрезка и его ориентацию в пространстве, значит реконструирование пространства возможно, то есть однозначно решается вторая (обратная) задача курса начертательной геометрии.

1. Пространственный чертёж.



1. AB - отрезок прямой в пространстве. A_1B_1 - горизонтальная проекция отрезка.

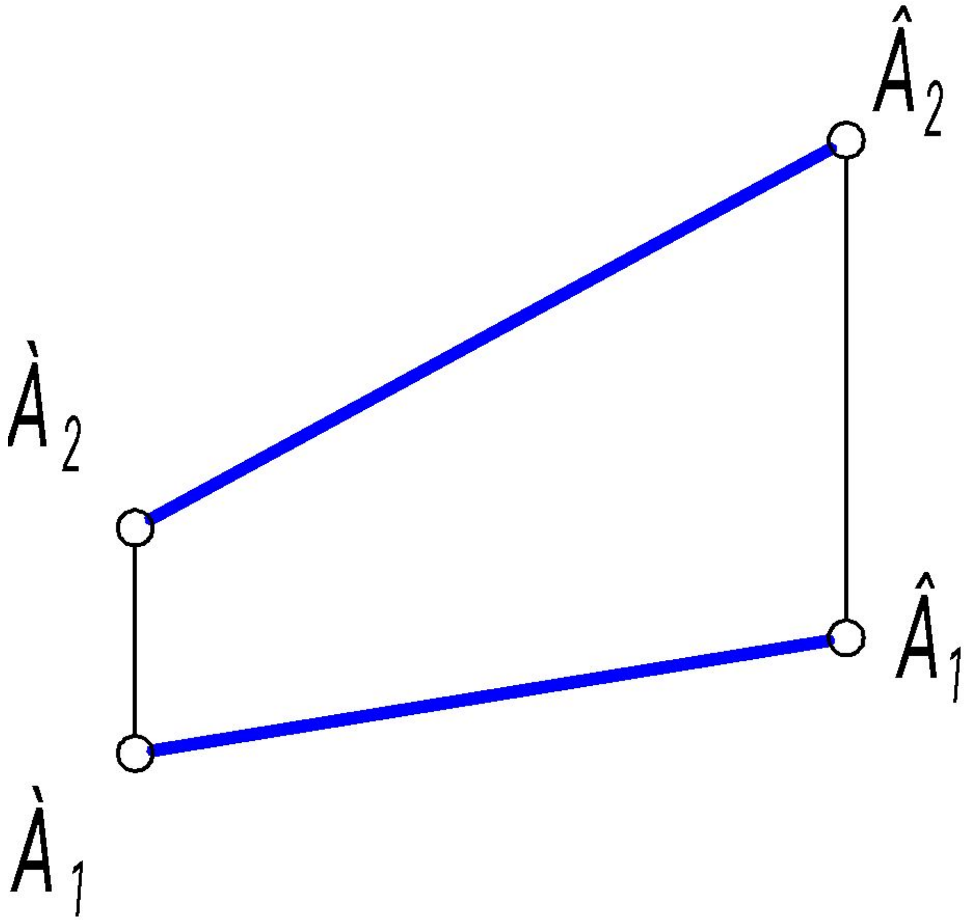
Через точку A проведём $AB_1 \parallel A_1B_1$. Тогда получим:

1. ΔABB_1 - прямоугольный;
2. AB - гипотенуза треугольника - натуральная величина отрезка;
3. $AB_1 = A_1B_1$ - один из катетов равен проекции отрезка AB на плоскость проекций $П_1$.
4. Второй катет BB_1 есть разность удалений концов отрезка от плоскости проекций $П_1$.

- Проведя аналогичные рассуждения для плоскости проекций $П_2$, можно сделать вывод, что натуральная величина отрезка есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является одна из проекций отрезка. Другой катет есть разность удалений концов отрезка от той плоскости, проекцию на которую взяли за первый катет.
- Такой метод нахождения натуральной величины отрезка общего положения называют **методом прямоугольного треугольника.**

2. Плоский чертёж.

Дано: две проекции отрезка *AB* – *A_2B_2 и A_1B_1*.
Требуется определить натуральную величину этого отрезка.

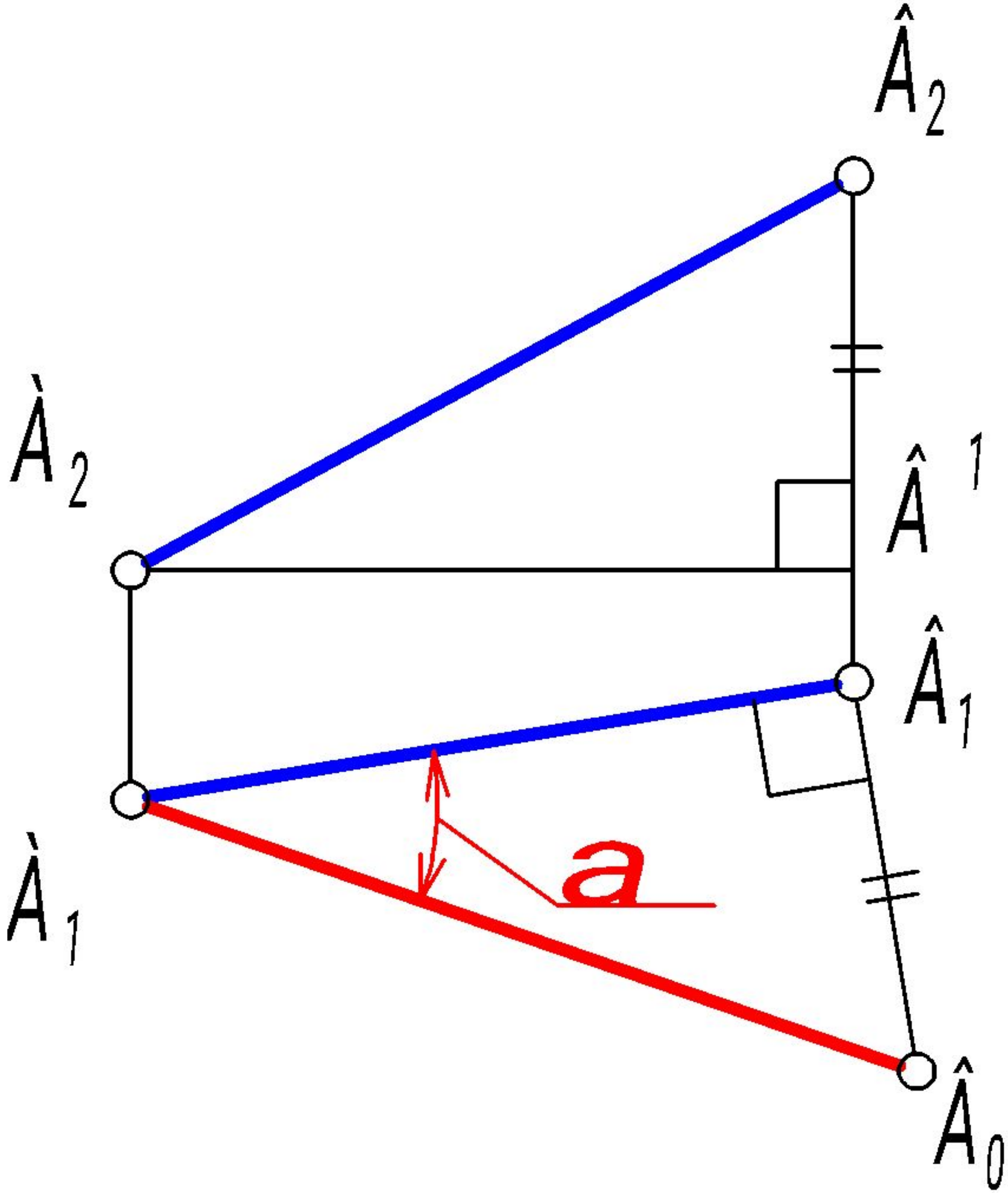


1. Исходя из вышесказанного, A_1B_1 является одним из катетов прямоугольного треугольника.
2. Чтобы найти второй катет, проведём $A_2B_1 \perp$ линиям связи.

B_2B^1 - это разность удалений концов отрезка от $П_1$.

3. Откладываем расстояние $|B_2B^1|$ на перпендикуляре к A_1B_1 с любой стороны.
4. Отрезок A_1B_0 - это натуральная величина $|AB|$, а угол α - есть угол наклона AB к $П_1$.

- Аналогично, можно найти угол наклона данного отрезка к $П_2$, построив прямоугольный треугольник на $П_2$.
- Вывод: **Двухкартинный чертёж Монжа обратим.**

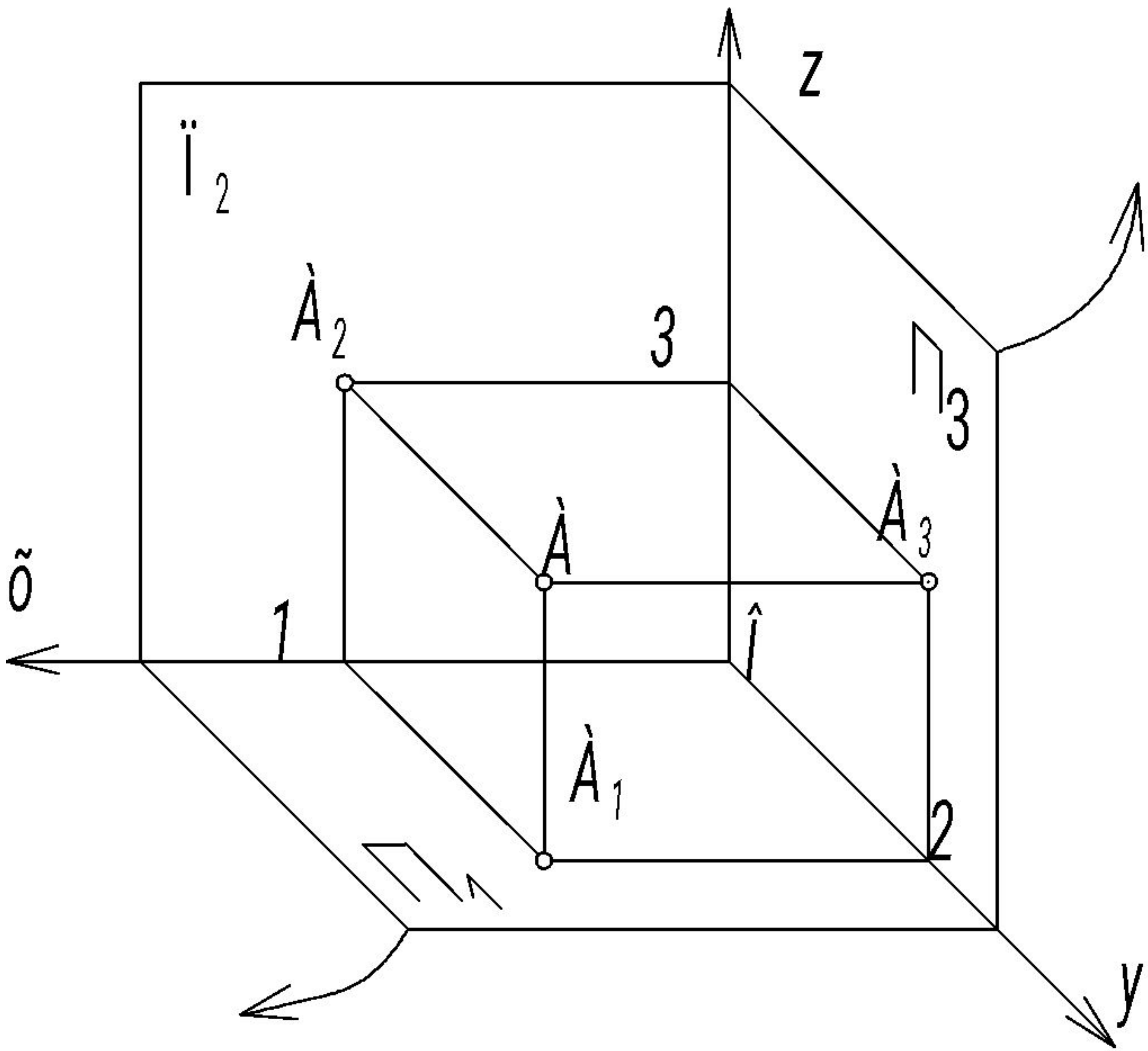


Â2
À2
Â 1
Â1
À1
a
Â0

Трёхкартинный комплексный чертёж точки

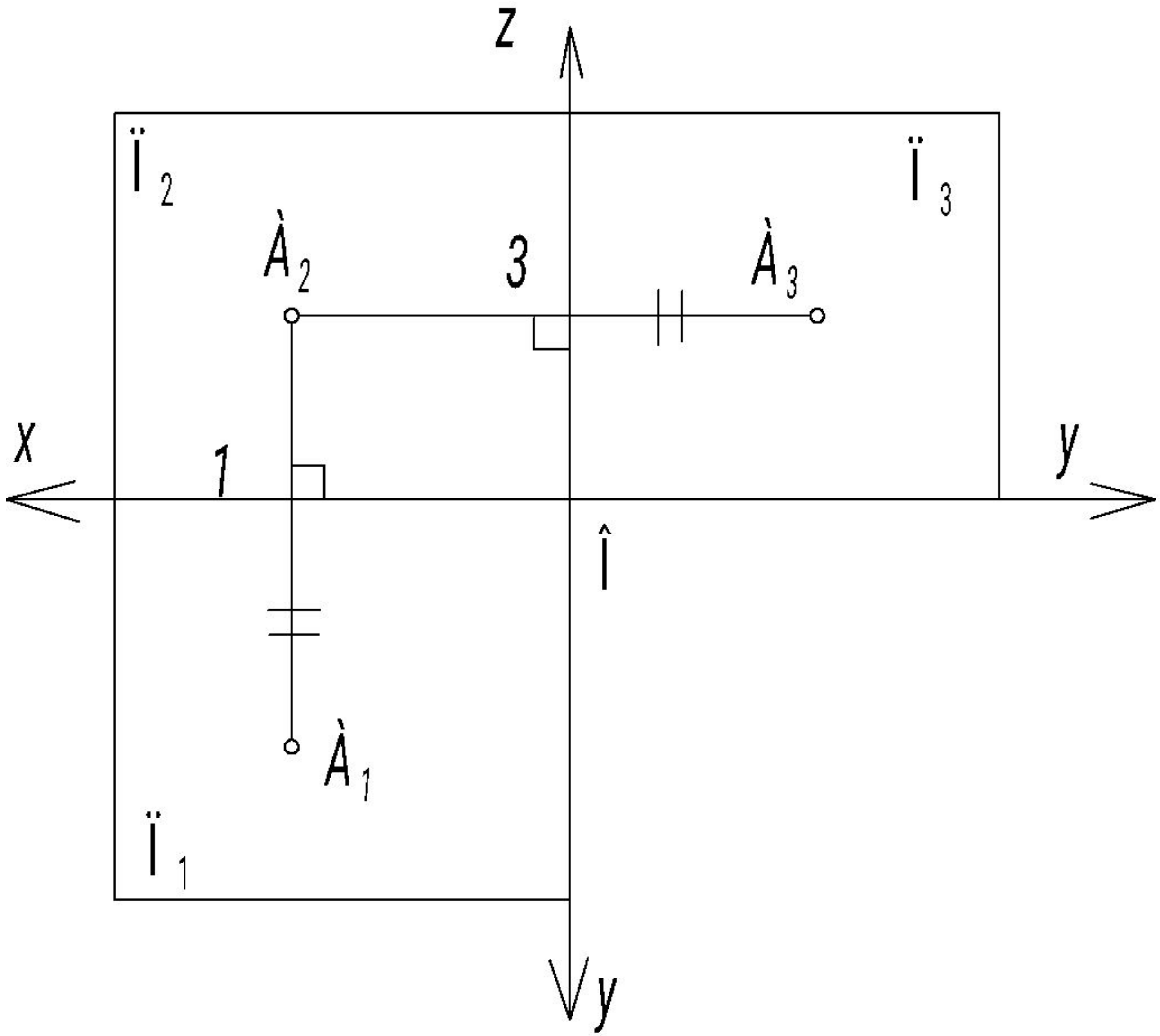
- Двухкартинный чертёж является метрически определённым чертежом, то есть он вполне определяет форму и размеры фигуры и её ориентацию в пространстве. Однако, часто комплексный чертёж становится более ясным, если помимо двух основных проекций дана ещё одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости применяют профильную плоскость проекций Π_3.

1. Пространственный чертёж.



- $\Pi_3 \perp x$, поэтому $\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$.
- Три плоскости проекций образуют в пространстве прямоугольный трёхгранник, то есть систему трёх взаимно перпендикулярных плоскостей. Рёбра этого трёхгранника будем обозначать *x, y, z.*
- Π_3 - профильная плоскость проекций.
- A_3 - профильная проекция точки *A*.
- $|AA_3| = |3A_2| = |2A_1|$ - удаление точки *A* от Π_3.

2. Плоский чертёж.



A_1A_2 - линия связи в системе $П_1 – П_2$.

$|3A_3| = |1A_1|$.

A_2A_3 - линия связи в системе $П_2 – П_3$.

$1A_2$ - высота расположения точки,

$1A_1$ - глубина расположения точки,

$3A_2$ - ширина расположения точки.

x - абсцисса; y - ордината; z - аппликата.

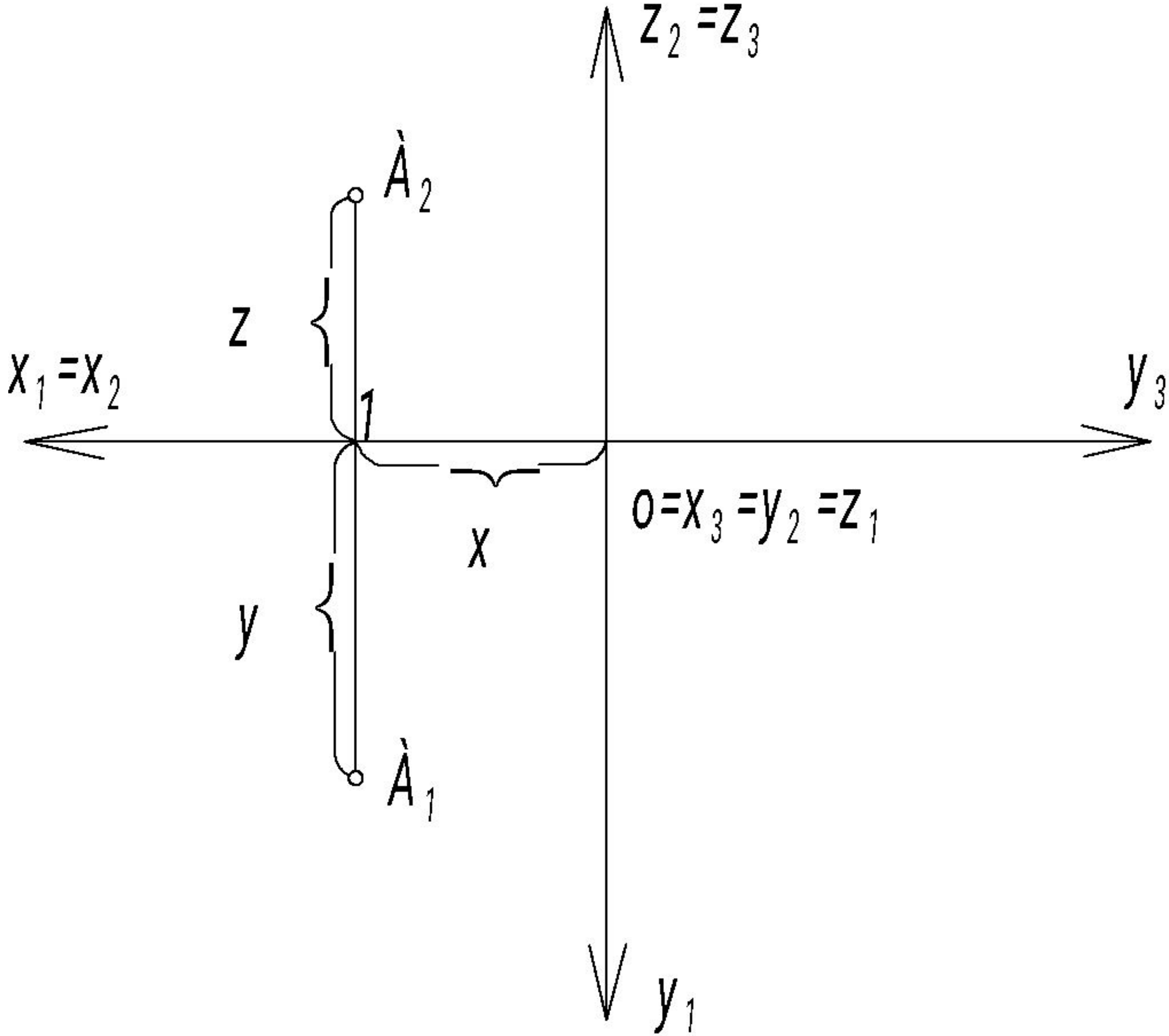
Связь ортогональных проекций точки с её прямоугольными координатами

Если в точку *O* поместить начало декартовой прямоугольной системы координат, то линии пересечения плоскостей проекций совпадут с соответствующими осями координат, и задание точки **двумя ортогональными проекциями** будет равносильно заданию её **тремя прямоугольными координатами**.

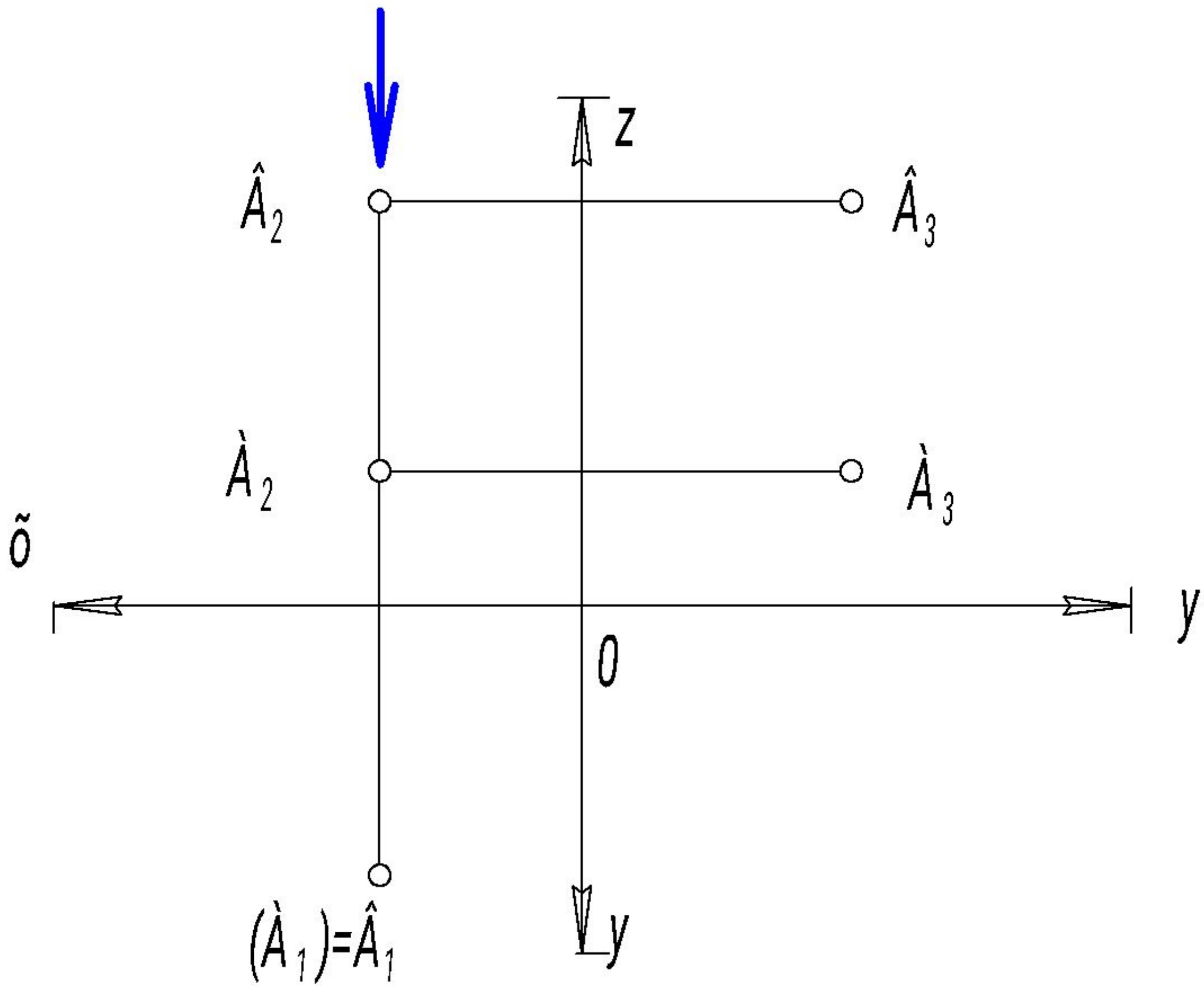
Так, по заданным: A_1 - определяем (x,y); A_2 - определяем (x,z). И наоборот.

Например: Даны координаты точки A(18, 24, 18), построить ортогональные проекции точки $A(A_1, A_2)$. По заданным координатам задаём две проекции точки *A*.

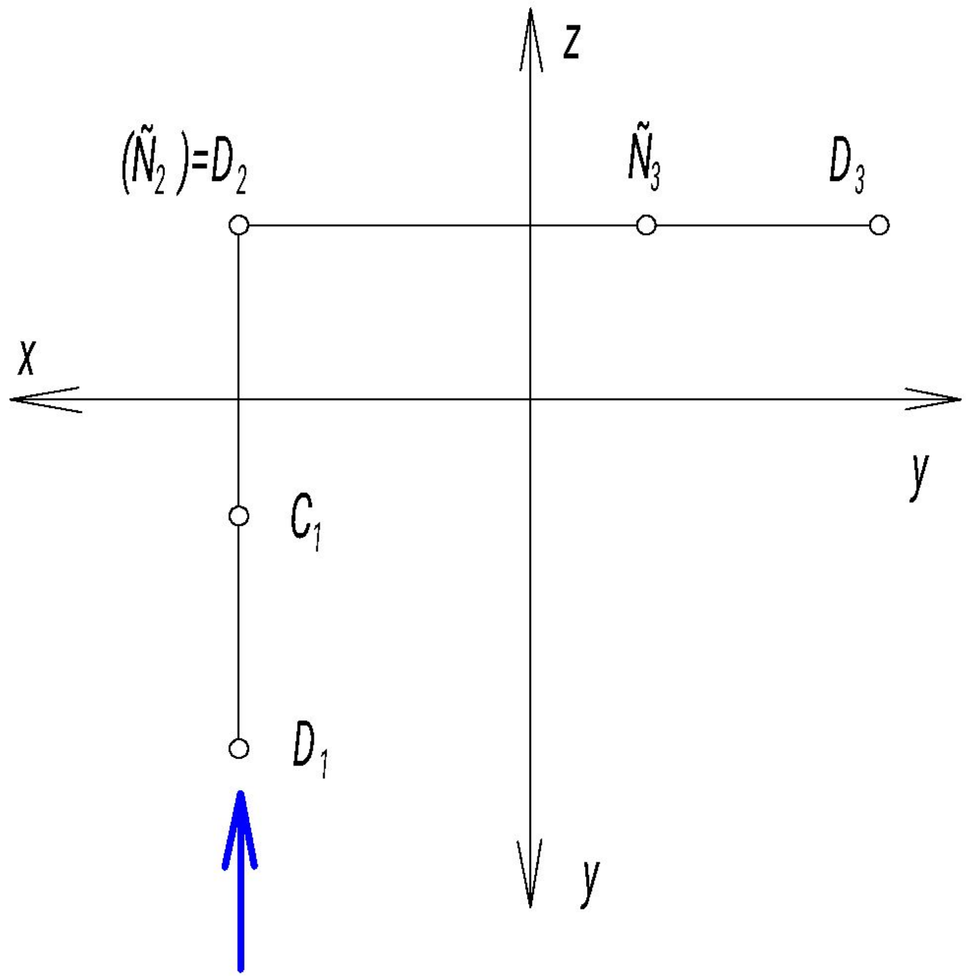
При необходимости можно построить A_3.


$z_2 = z_3$
$\grave{A}_2$
z
$x_1 = x_2$
1
y_3
$o = x_3 = y_2 = z_1$
x
y
$\grave{A}_1$
y_1

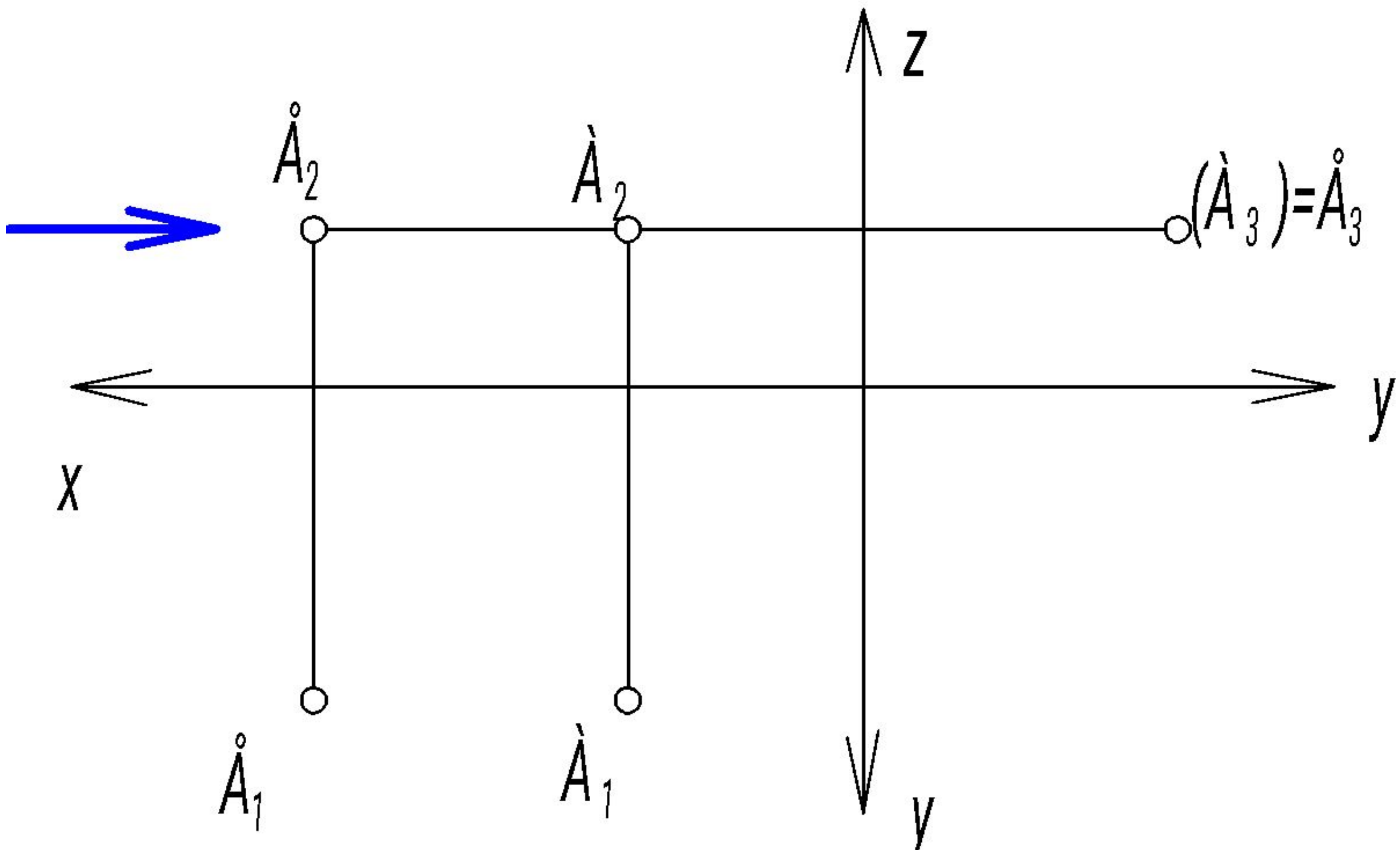
Точки *A* и *B*, у которых совпадают горизонтальные проекции, **называются горизонтально конкурирующими.** Из двух точек на Π_1 видна та, что выше. Расположение точек "выше - ниже" определяют по фронтальной проекции.



Точки C и D, у которых совпадают фронтальные проекции, называются **фронтально конкурирующими**. Из двух точек на $П_2$ видна та, что ближе к наблюдателю. Расположение точек ближе - дальше определяют по горизонтальной проекции.

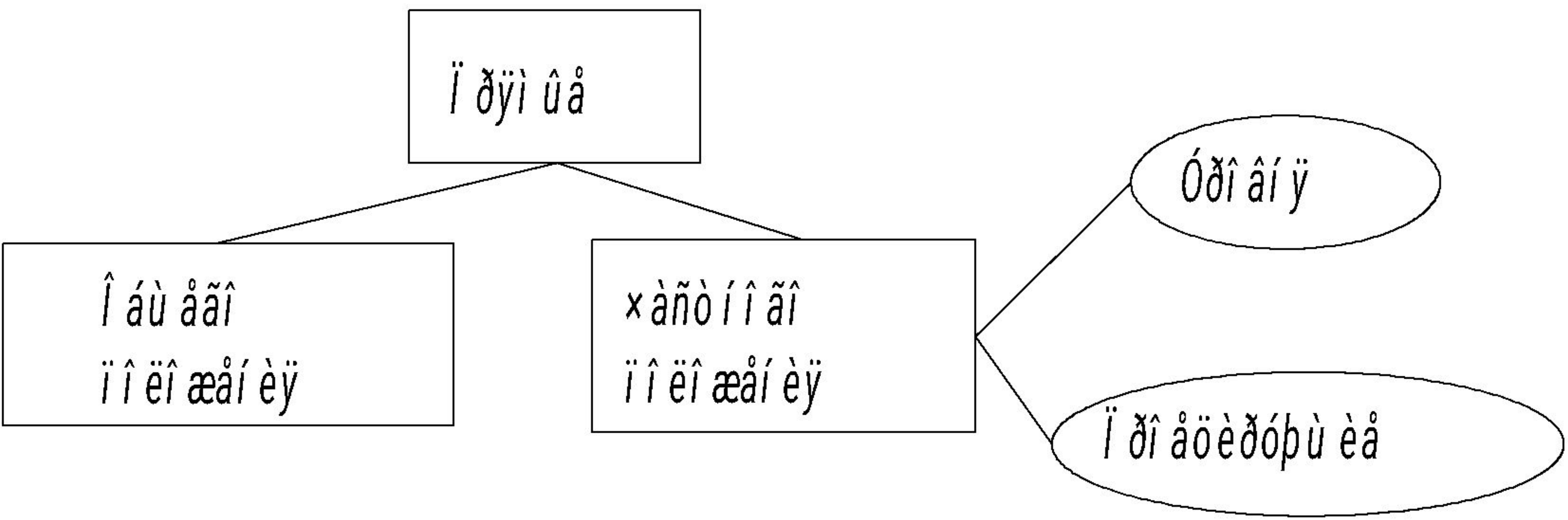


Точки *А* и *Е*, у которых совпадают профильные проекции, называются **профильно конкурирующими**. Из двух точек на $П_3$ видна та, что левее. Расположение точек левее - правее определяют по фронтальной проекции.



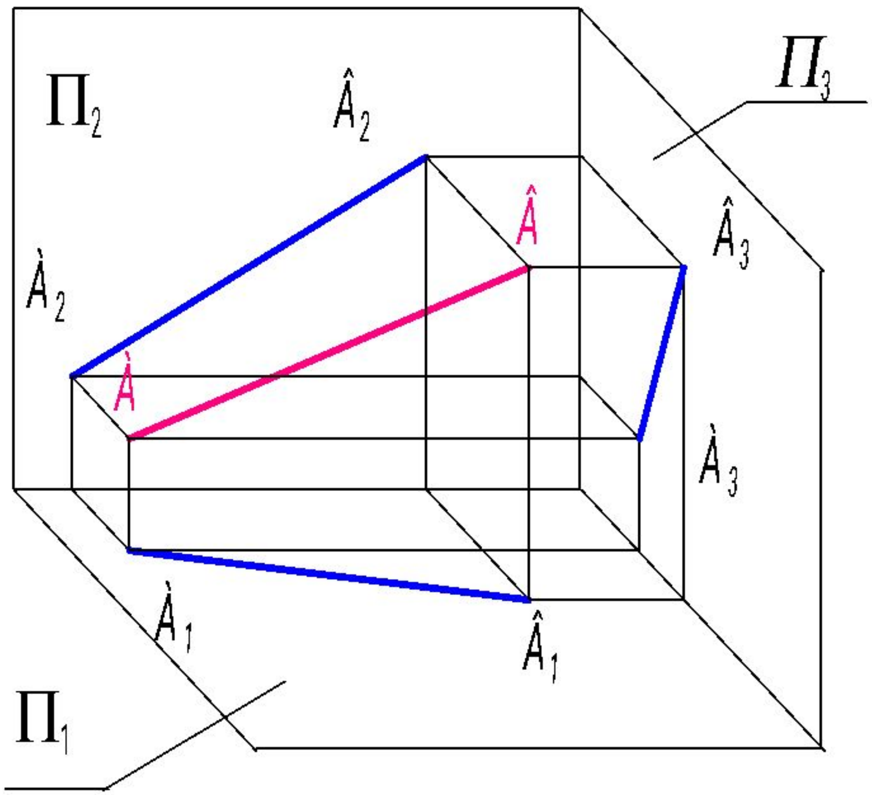
Задание прямой на комплексном чертеже

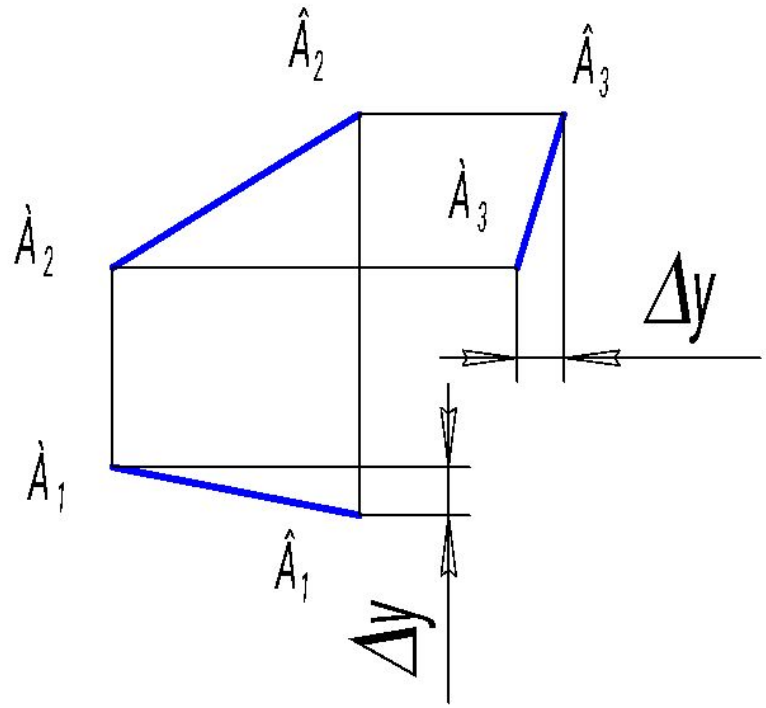
Прямая в пространстве может занимать общее и частное положение.



Прямые общего положения

Прямая (отрезок), не параллельная и не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения



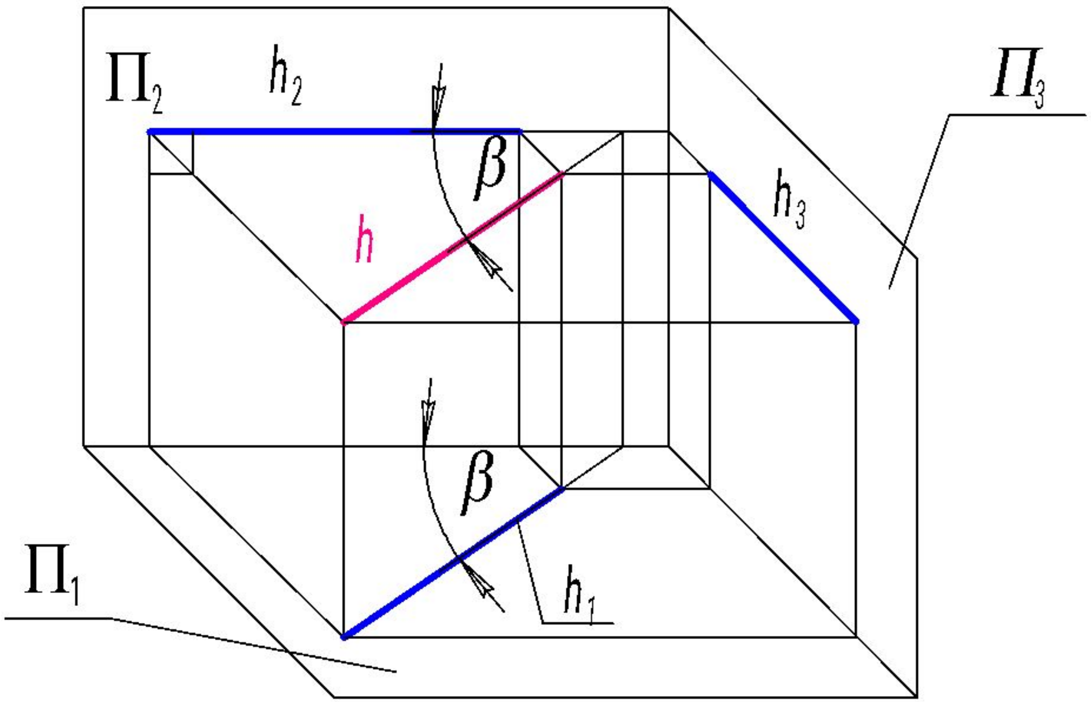


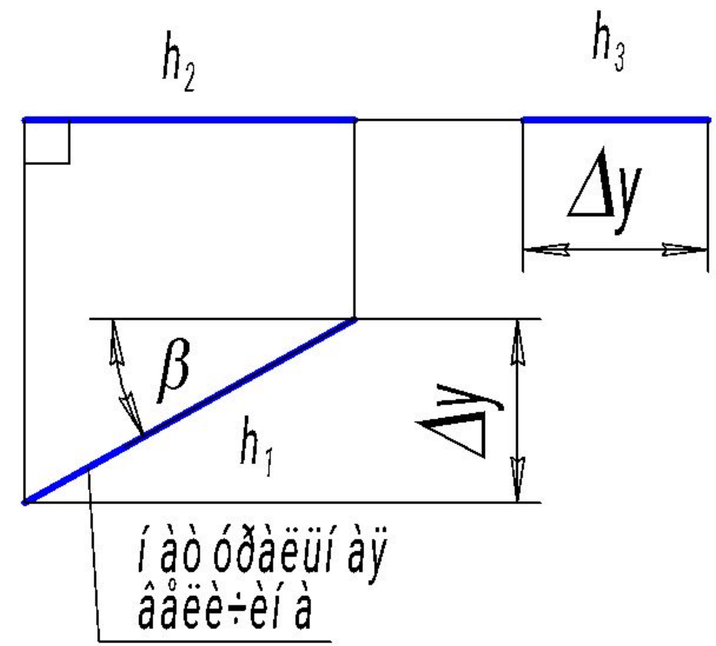
Прямые уровня

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются прямыми уровня.

Существует три линии уровня: *h, f, p*

Горизонталь: h (h_1, h_2, h_3) || $П_3$

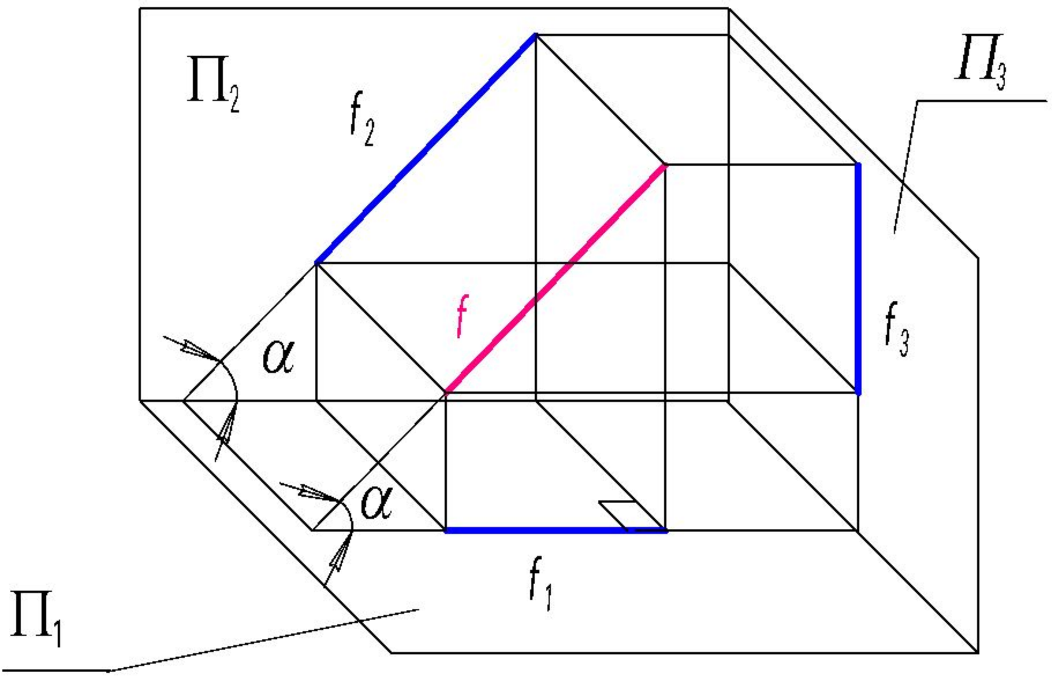


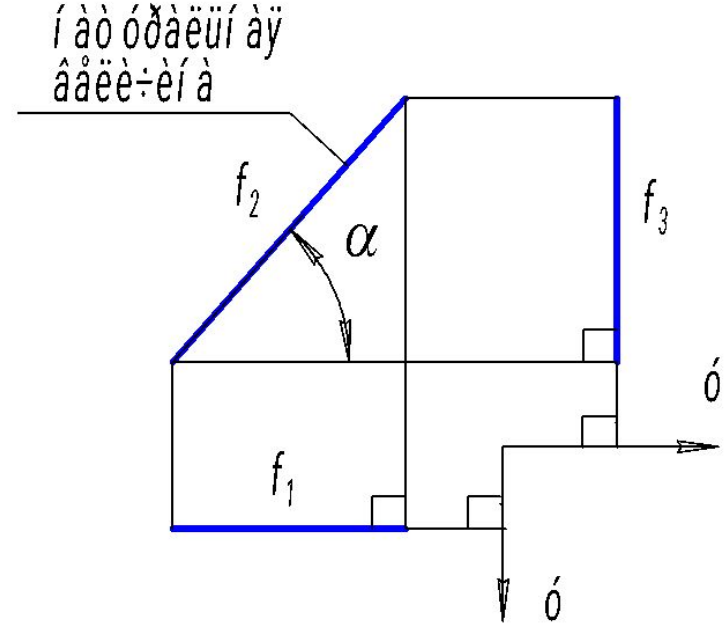


У горизонтали | *h* | = | h_1 |, а угол наклона к $П_2$ -β проецируется без искажения..

Фронталь

$f\ (f_1,\ f_2,\ f_3)\ \|\ П_2$

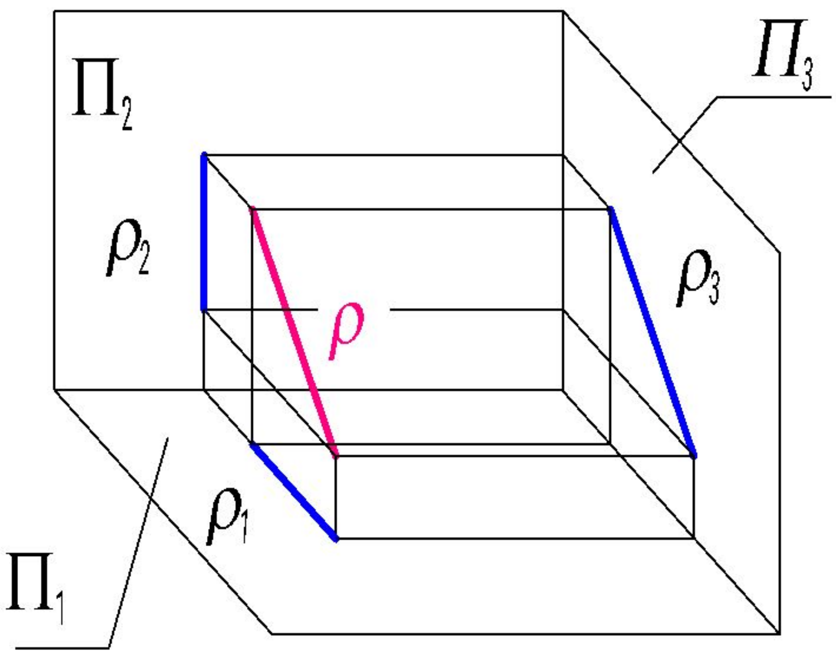


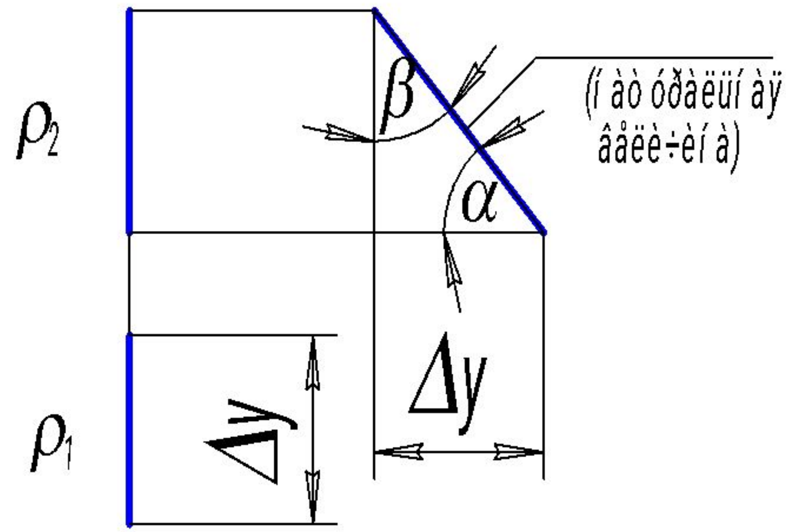


У фронтали | f | = | f_2 |, а угол наклона к $П_1$ - α проецируется без искажения.

Профильная прямая

p (p₁, p₂, p₃) || П₃





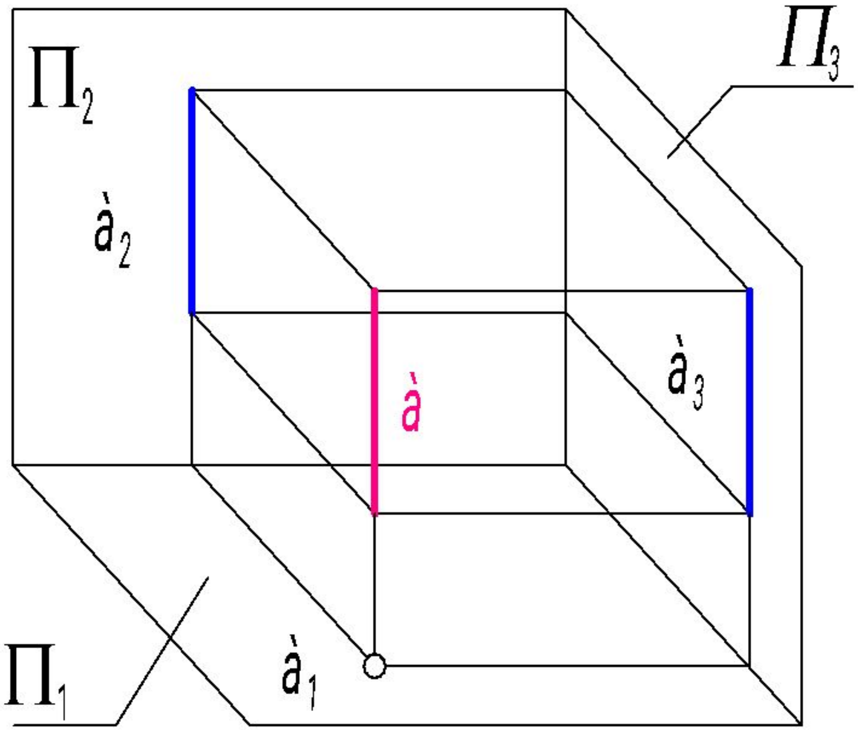
| p | = | p_3 | - натуральная (истинная) величина

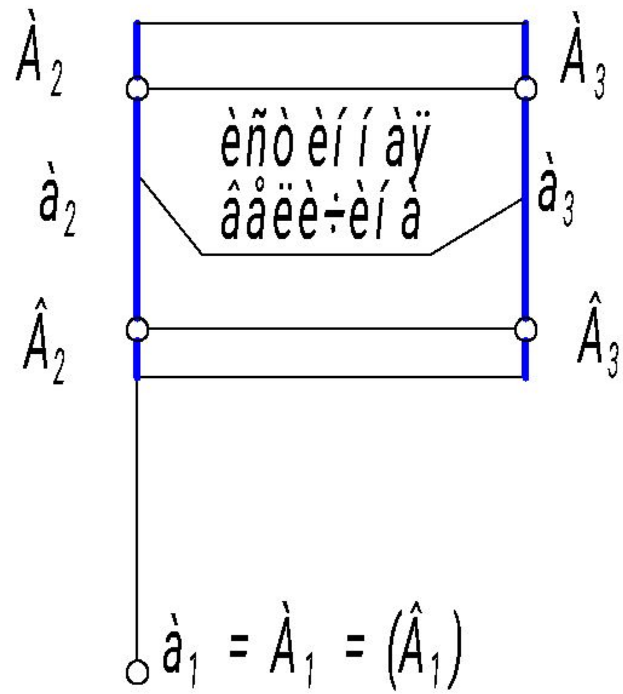
Углы наклона профильной прямой к $П_1$ и $П_2$ проецируются на $П_3$

без искажения.

Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные какой - либо плоскости проекций, называются проецирующими прямыми.





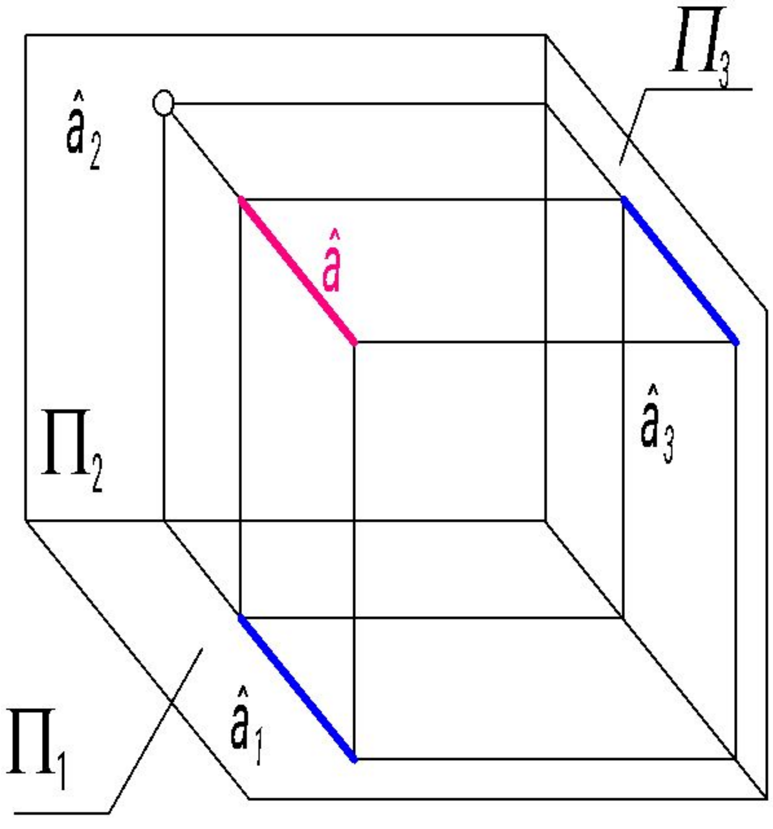
Графический признак горизонтально проецирующей прямой - ее горизонтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией

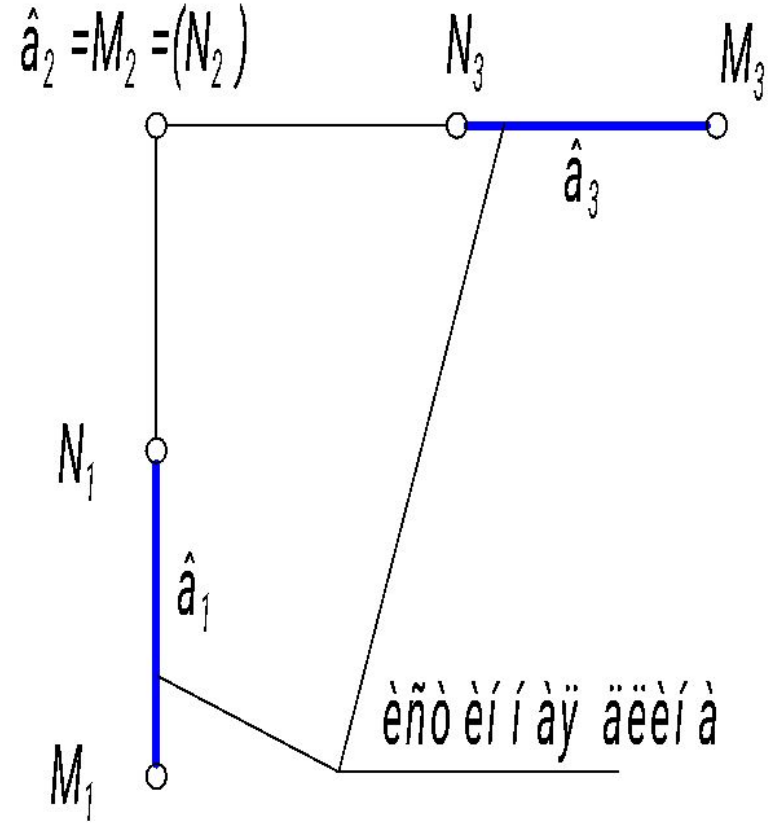
Геометрическая фигура называется проецирующей, если одна из ее проекций есть геометрическая фигура на единицу меньшего измерения, она называется главной проекцией и обладает собирательными свойствами.

- a_1 - главная проекция, которая обладает "собирательными" свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой совпадет с ее горизонтальной проекцией $\Rightarrow a_1 = A_1 = B_1$
- Точки A и B - горизонтально конкурирующие.

Фронтально проецирующая прямая

в(в$_1$, в$_2$, в$_3$) $\perp$ П$_2$ (в || П$_1$ и П$_3$)



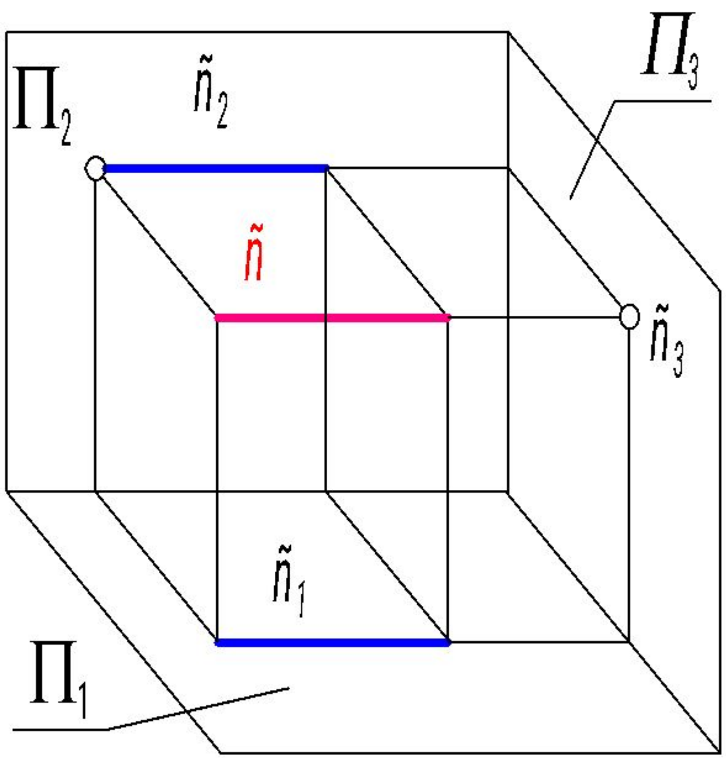


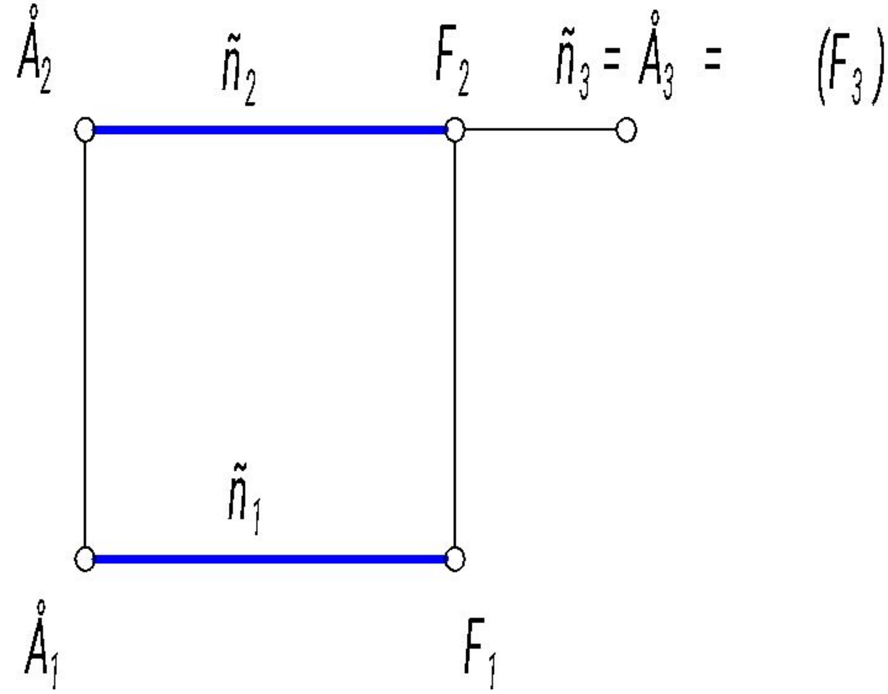
Графический признак фронтально проецирующей прямой, ее фронтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией

- $в_2$ - главная проекция, которая обладает "собирательными" свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой совпадет с ее фронтальной проекцией $\Rightarrow в_2 = M_2 = N_2$
- Точки *M* и *N* - фронтально конкурирующие.

Профильно проецирующая прямая

$c(c_1, c_2, c_3) \perp П_3$ ($c \parallel П_1$ и $П_2$)

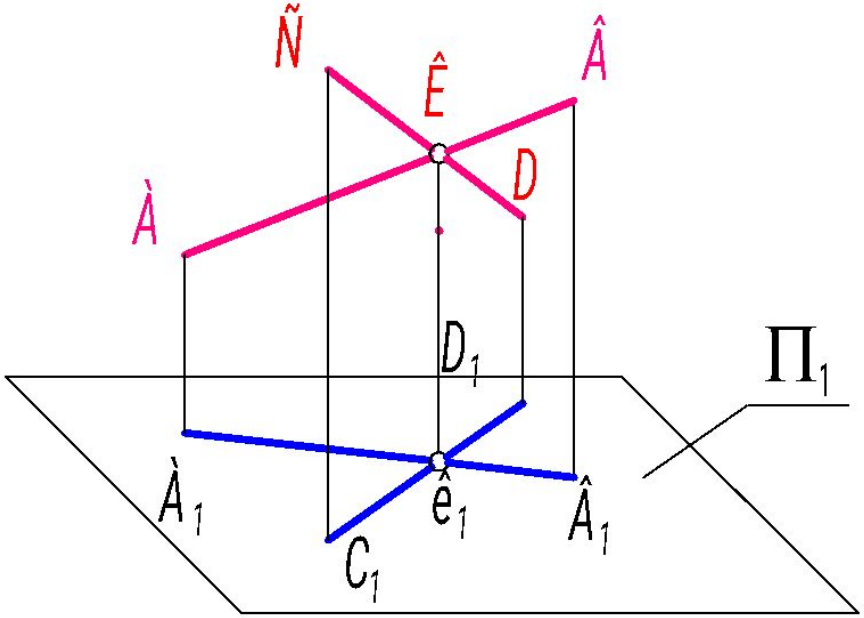


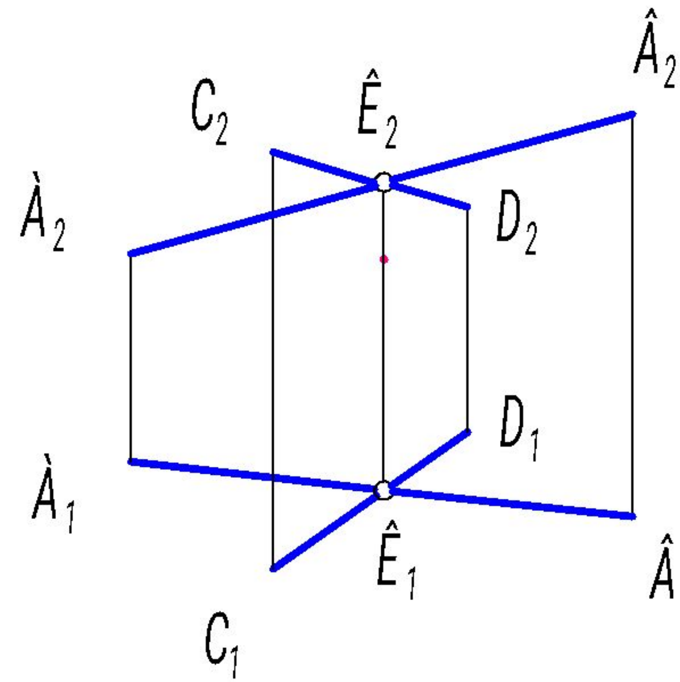


Графический признак профильно проецирующей прямой: ее профильная проекция есть точка, она называется главной проекцией.

- c_3 - главная проекция, которая обладает "собирательными" свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой совпадет с ее профильной проекцией $\Rightarrow c_3 = E_3 = F_3$
- Отличительным признаком проецирующих прямых на комплексном чертеже является то, что одна из проекций прямой вырождается в точку.

Пресекающиеся прямые





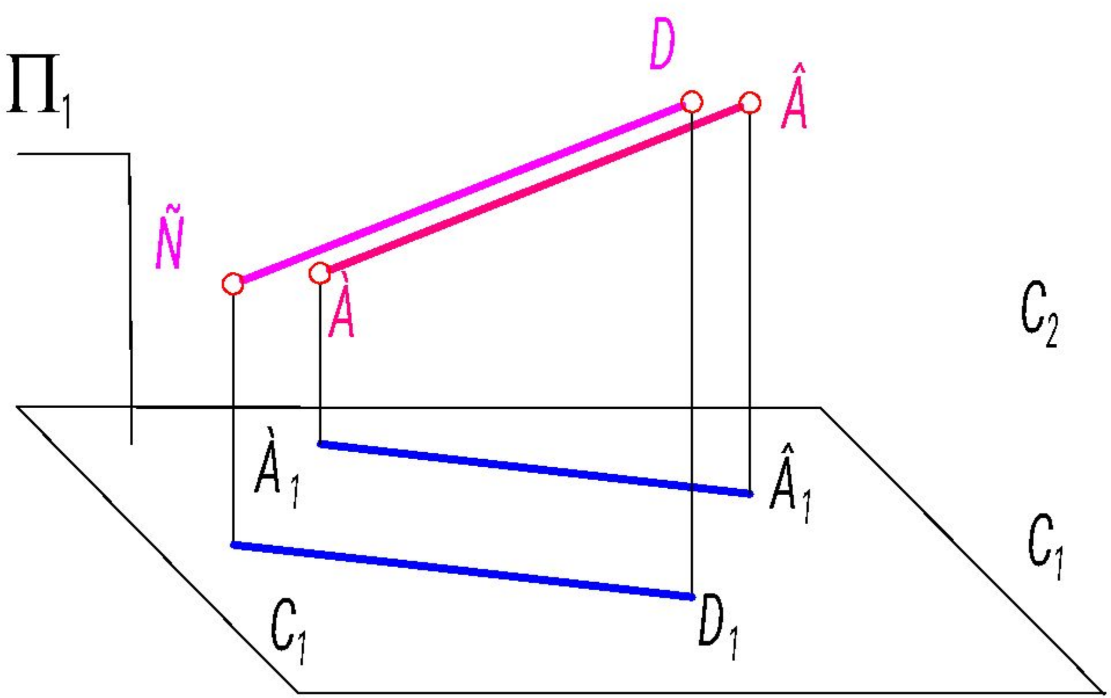
Прямые называются пересекающимися, если они имеют единственную общую точку. Они всегда лежат в одной плоскости.

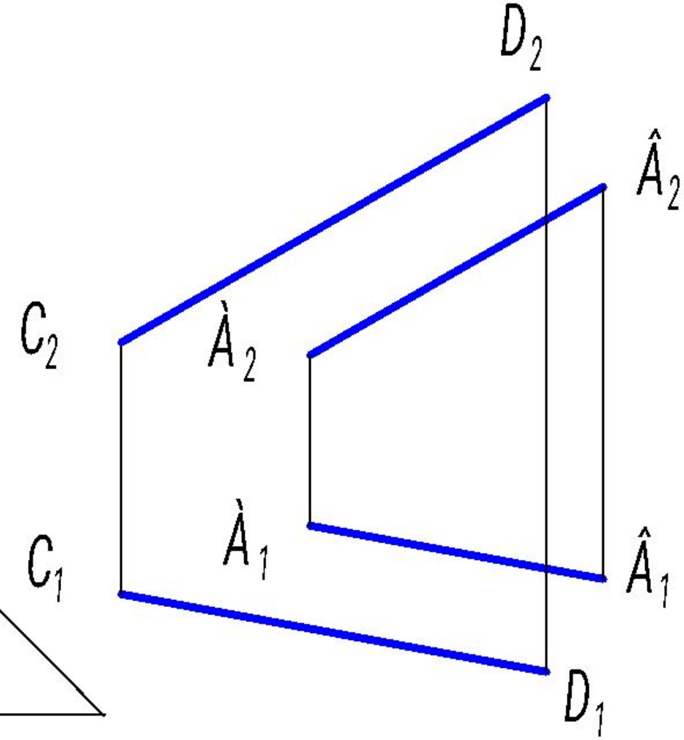
- Если прямые пересекаются, то существует единственная точка пересечения: $a \cap в = K$.
- На основании свойства принадлежности: $a \cap в = K \Rightarrow a_1 \cap в_1 = K_1$, $a_2 \cap в_2 = K_2$
- Согласно свойству чертежа Монжа, обе проекции (K_1 и K_2) точки К лежат на одной линии связи данного установленного направления.
- **Графический признак $a \cap в$: точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи, установленного направления.**

Параллельные прямые

На основании свойства параллельности прямых (*а* || *в*) - одноименные проекции параллельных прямых параллельны:

$$a \parallel в \Rightarrow a_1 \parallel в_1,\ a_2 \parallel в_2$$

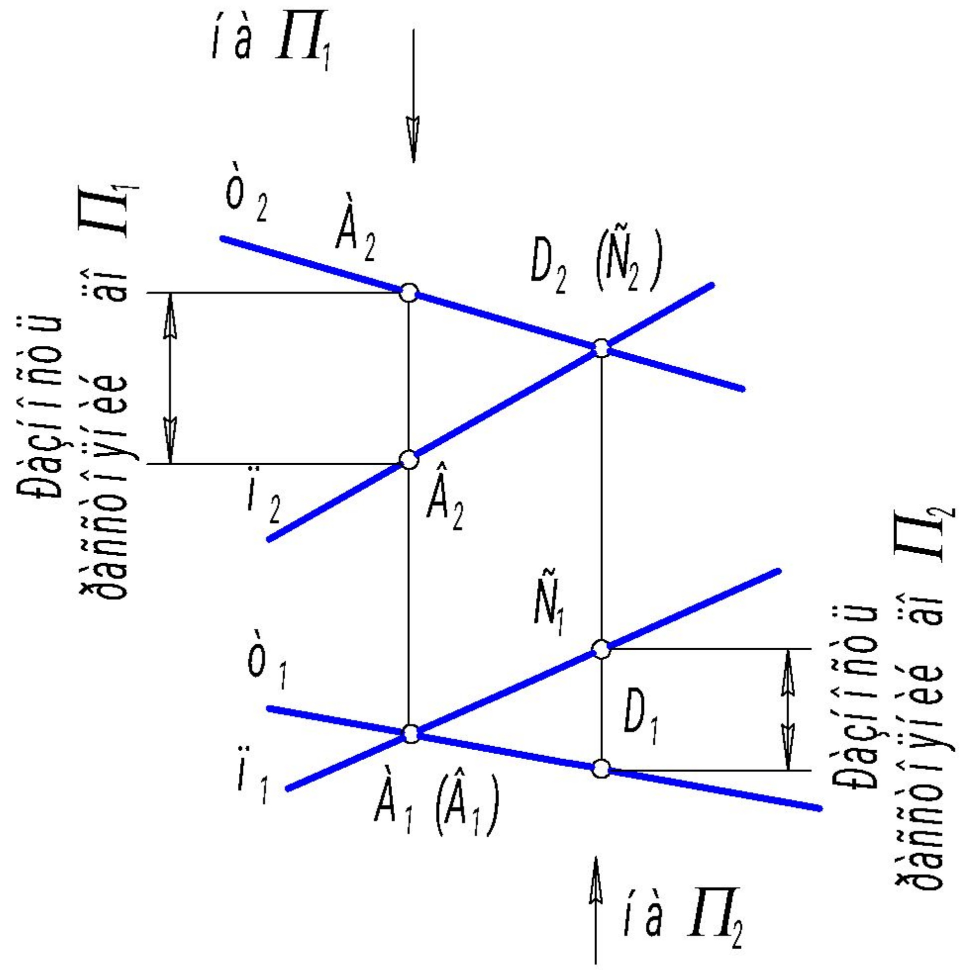




Скрещивающиеся прямые

- Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми. Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, т.к. если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость.

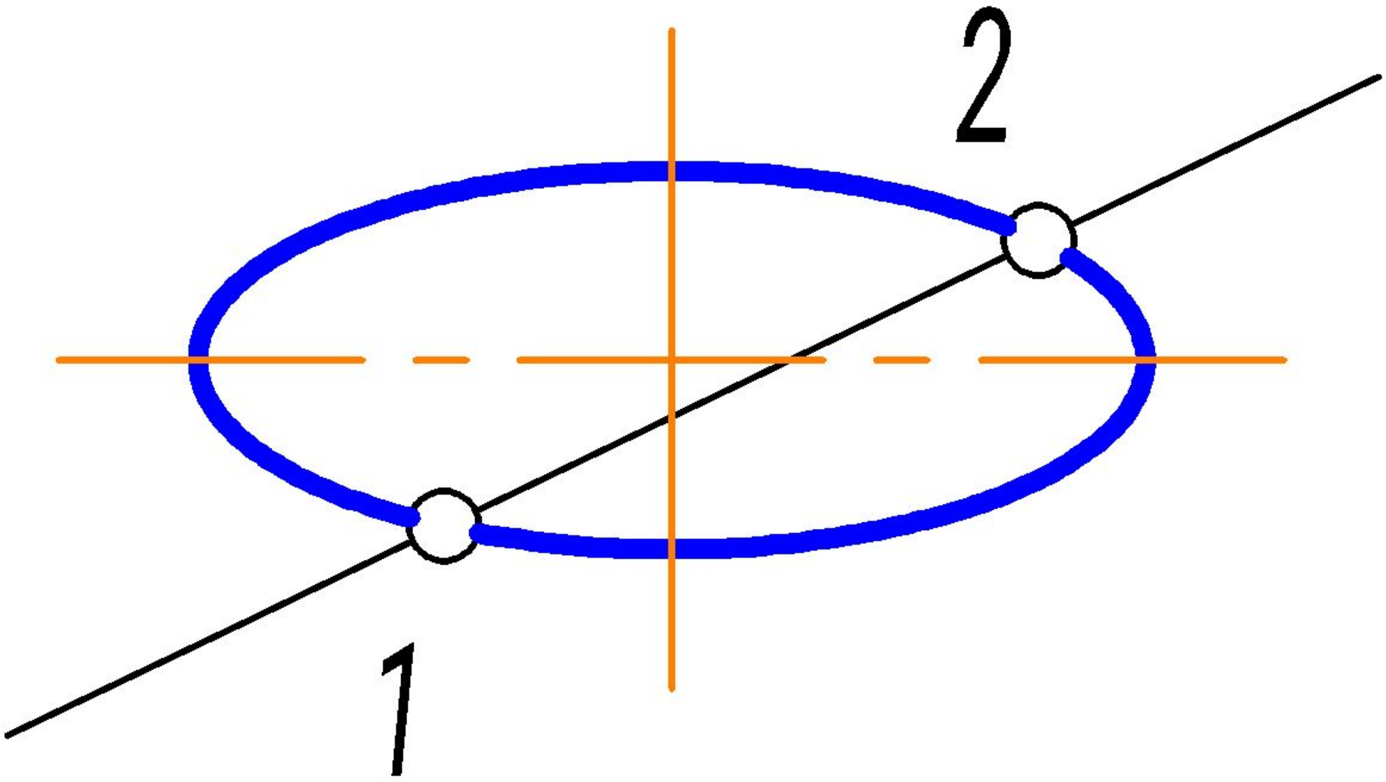
Графический признак скрещивающихся прямых: точки пересечения одноименных проекций прямых никогда не находятся на одной линии связи.



Комплексный чертеж кривых линий

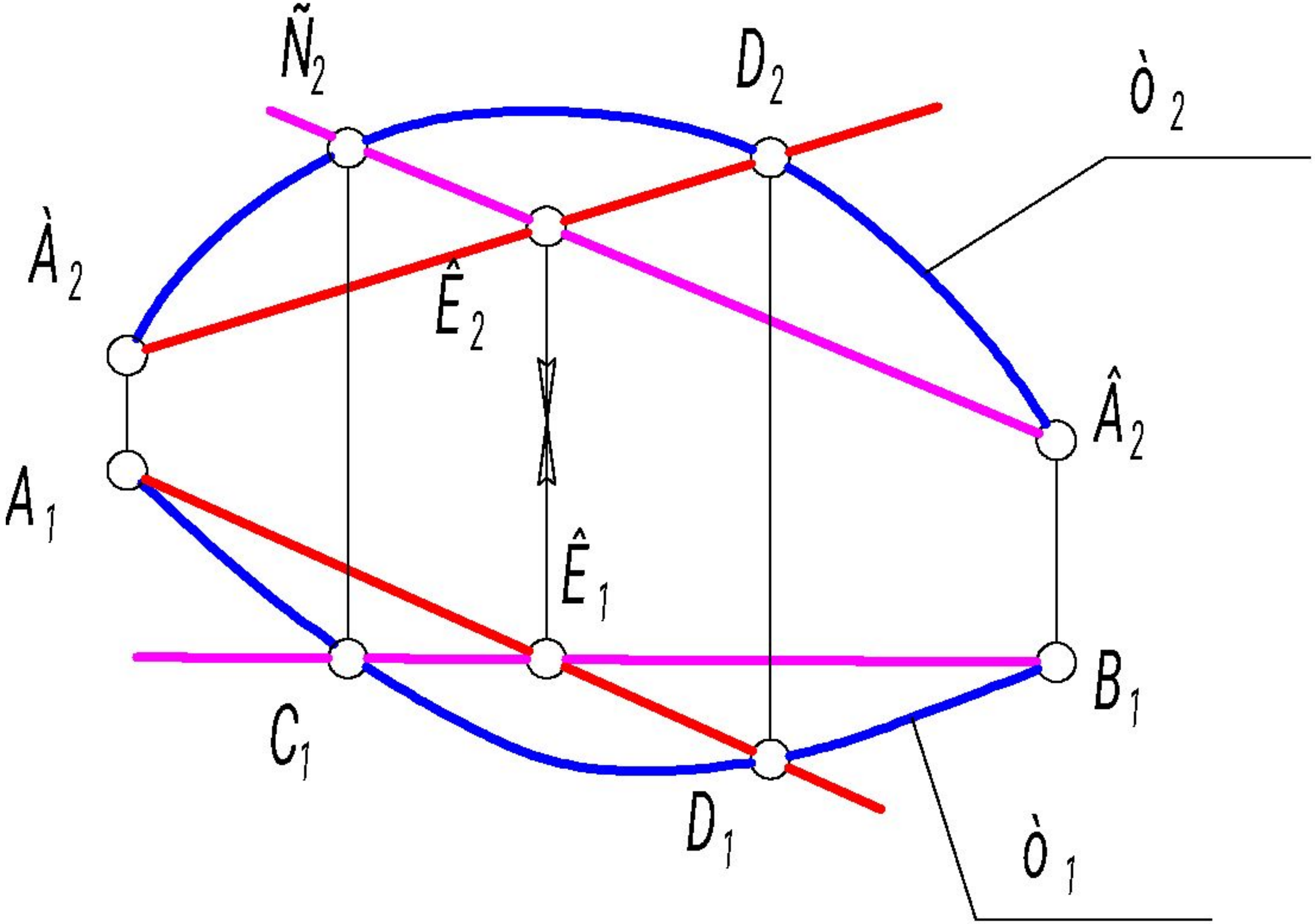
- Если все точки кривой расположены в одной плоскости, то такую кривую называют плоской кривой линией (например эллипс, окружность).
- Если все точки кривой невозможно совместить с одной плоскостью, то такую кривую называют **пространственной** (винтовая линия).
- Если существует математическое уравнение, описывающее движение точки, то кривую называют **закономерной**. Аналитически закономерные линии подразделяются на алгебраические и трансцендентные. Примером алгебраических кривых служат кривые второго порядка (эллипс, парабола, гипербола). К трансцендентным линиям относят графики тригонометрических функций (синусоида, косинусоида), эвольвента, циклоида.

Порядок алгебраической кривой равен степени ее уравнения или определяется графически, т.е. числом точек ее возможного пересечения с произвольной прямой.



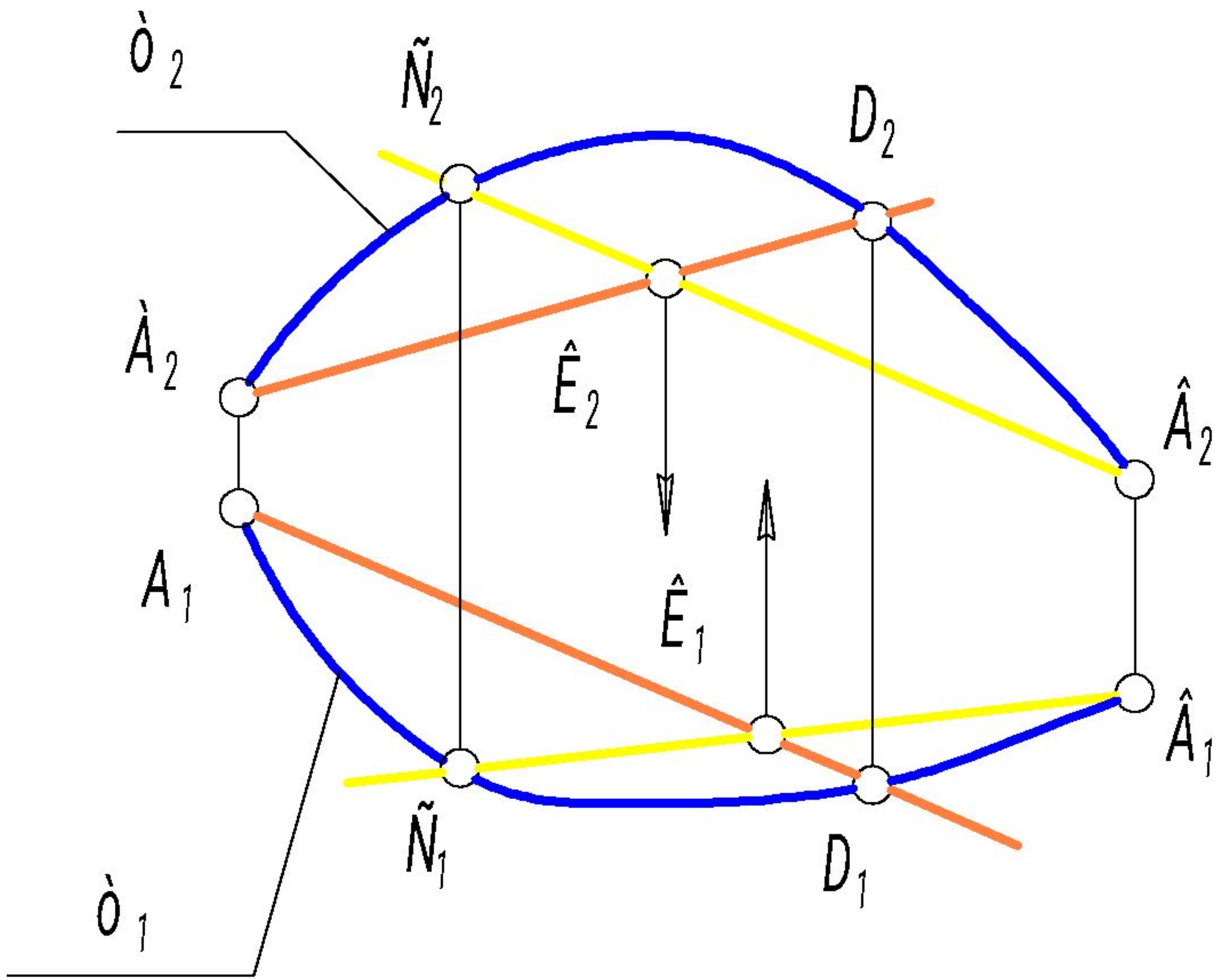
Метод хорд

- 1. Если хорды пересекаются (графически это видно на рис. 1-47, когда *К1, К2* - точки пересечения проекций хорд лежат на одной линии связи), то через пересекающиеся прямые можно провести плоскость, а это значит, что они образуют плоскость, в которой лежит заданная кривая. Значит, кривая линия - плоская.



Ñ2
D2
ò 2
À2
Ê2
Â2
A1
Ê1
B1
C1
D1
ò 1

2. Хорды не пересекаются, а скрещиваются (графически это видно на рис. 1-48, когда *К1, К2* - точки пересечения проекций хорд не лежат на одной линии связи), значит кривая линия - пространственная.

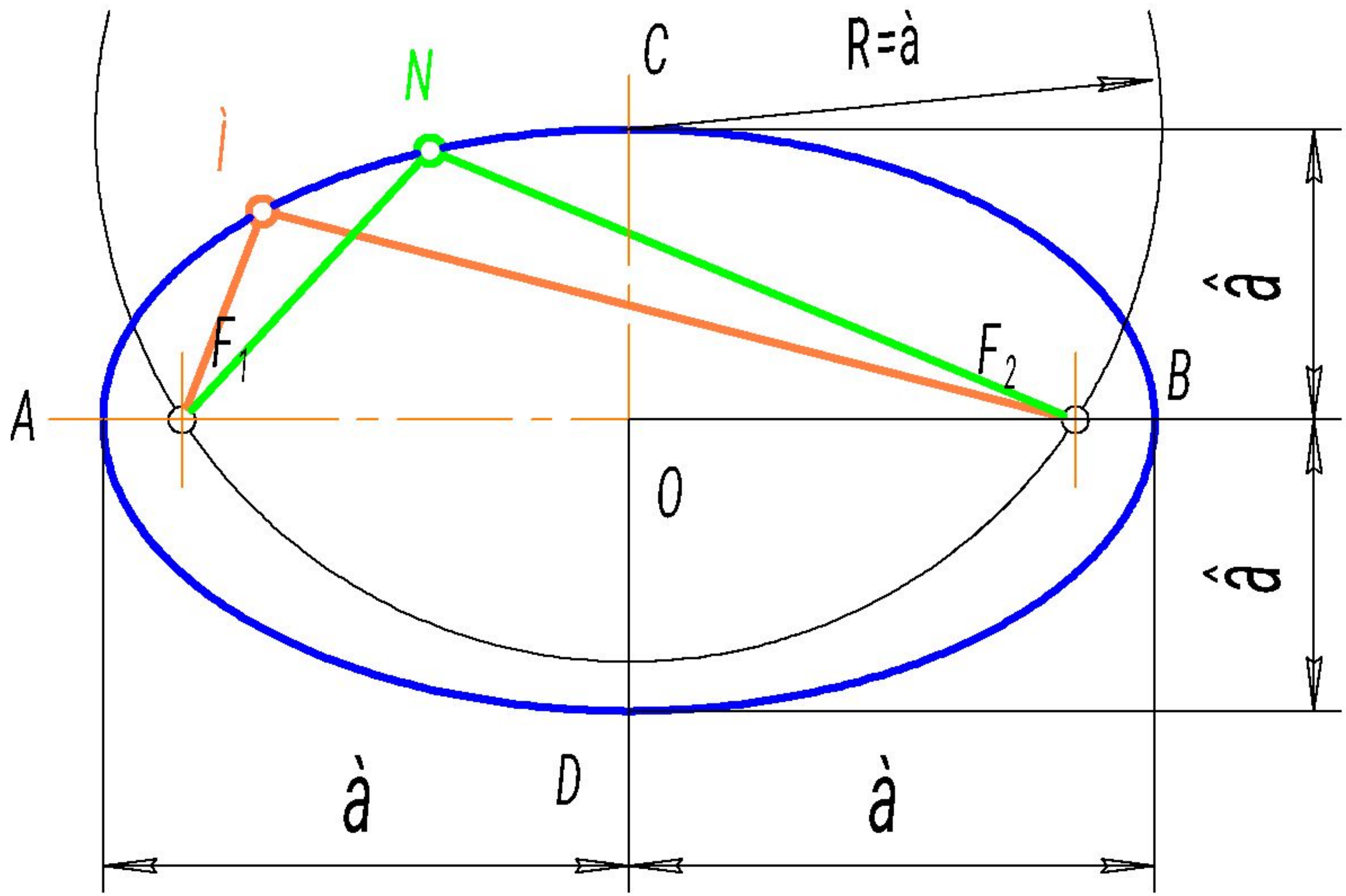


Свойства проекций кривых линий

1. Проекцией кривой линии является кривая линия (в общем случае).
2. Касательная к кривой проецируется в касательную к ее проекции.
3. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку ее проекции.
4. Порядок кривой (только для алгебраических кривых) в проекциях не изменяется.
5. Число точек пересечения кривой сохраняется при проецировании.

Эллипс

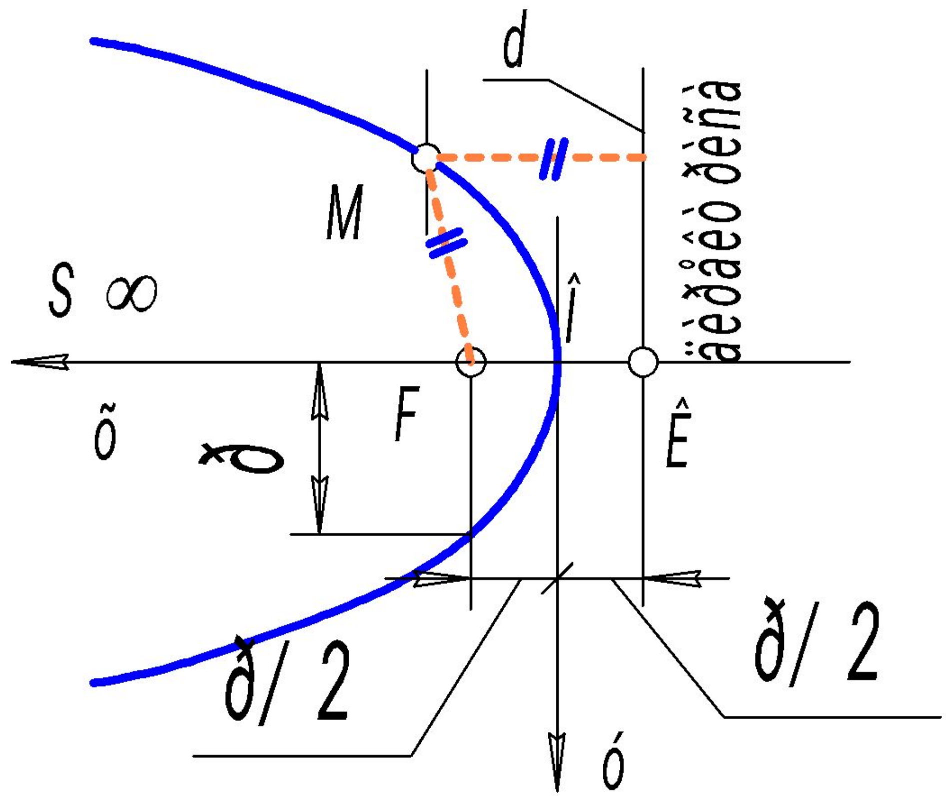
Эллипс - это все множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная 2*a*.



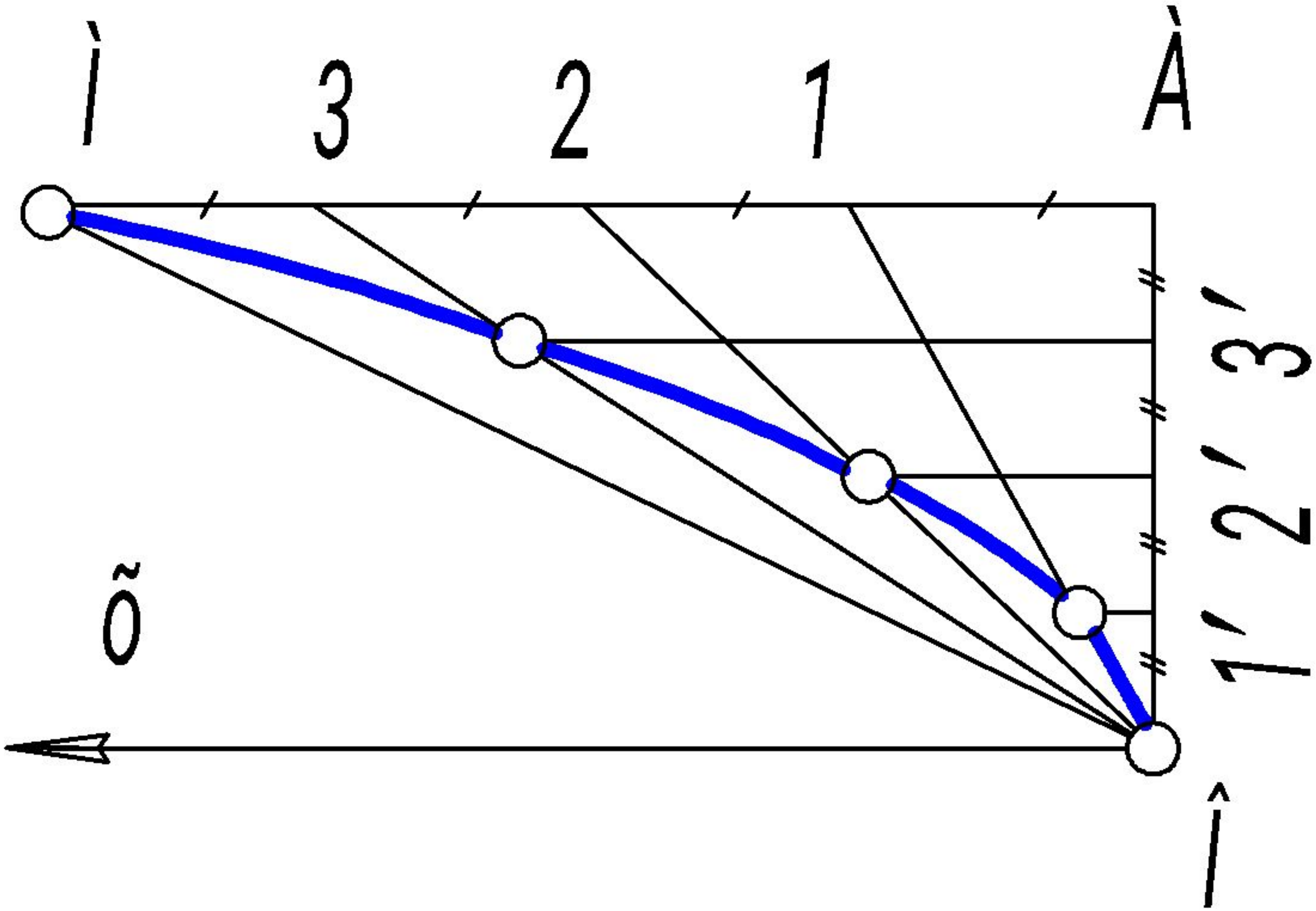
Парабола

Парабола обладает одной осью и имеет две вершины: *O* - собственная точка и *S ∞* - несобственная точка (парабола имеет одну несобственную точку), *F* - фокус и *P* - параметр параболы

Парабола - это все множество точек, равноудаленных от прямой *d* (директрисы) и данной точки *F* (фокуса)

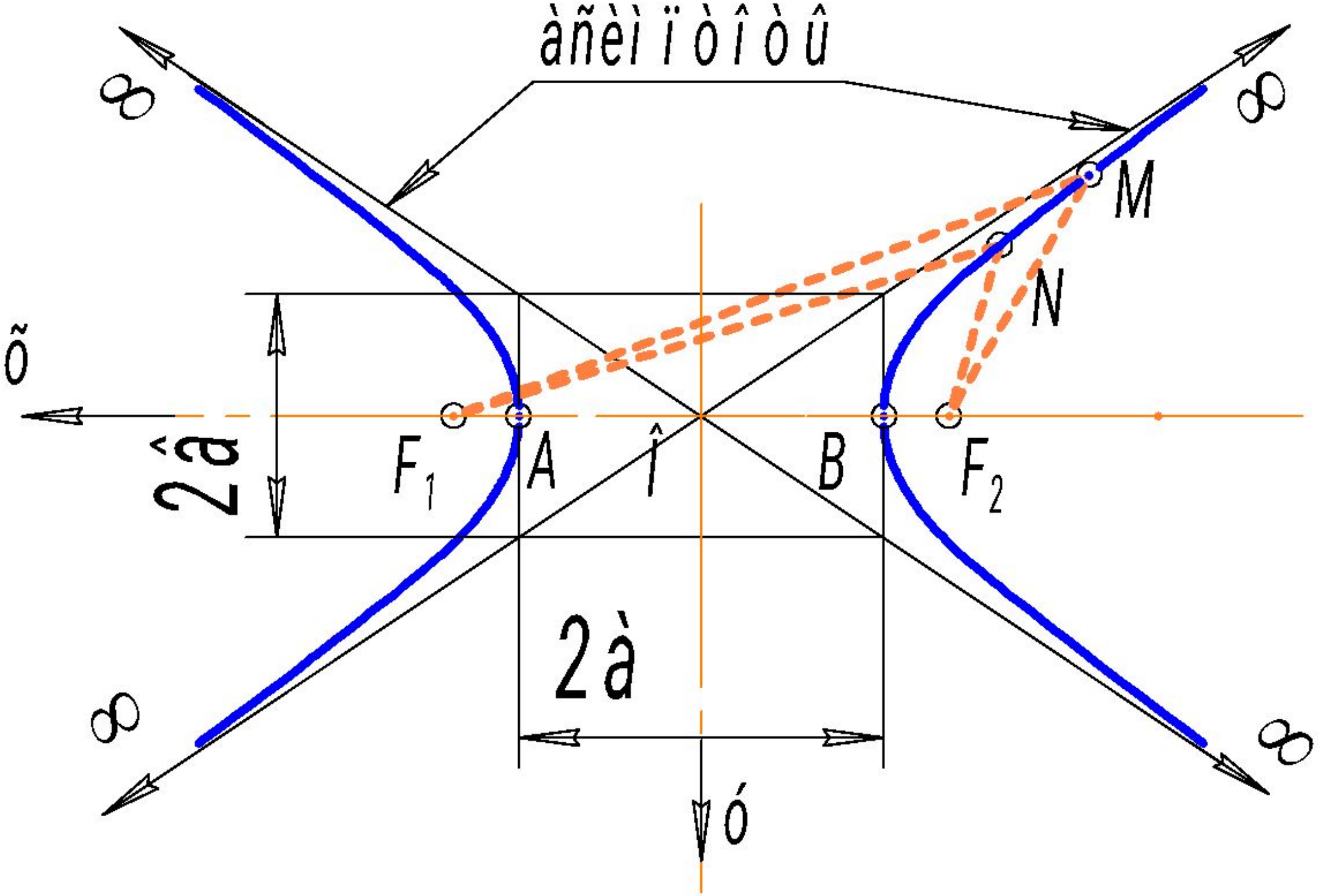


Если требуется построить параболу по заданной вершине *O*, оси *X* и точки *M*, то строится прямоугольный треугольник - *OAM*



Гипербола

Гипербола - это все множество точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная 2*а*.

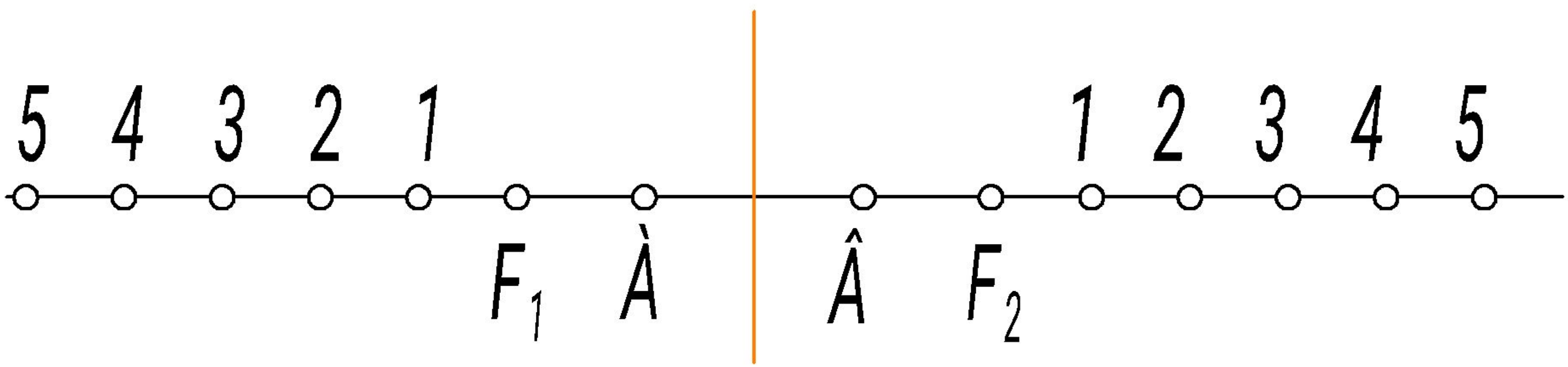


Гипербола - разомкнутая кривая, состоящая из двух симметричных ветвей; она имеет две оси симметрии - действительную (ось - *x*) и мнимую (ось - *y*). Асимптоты - это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно

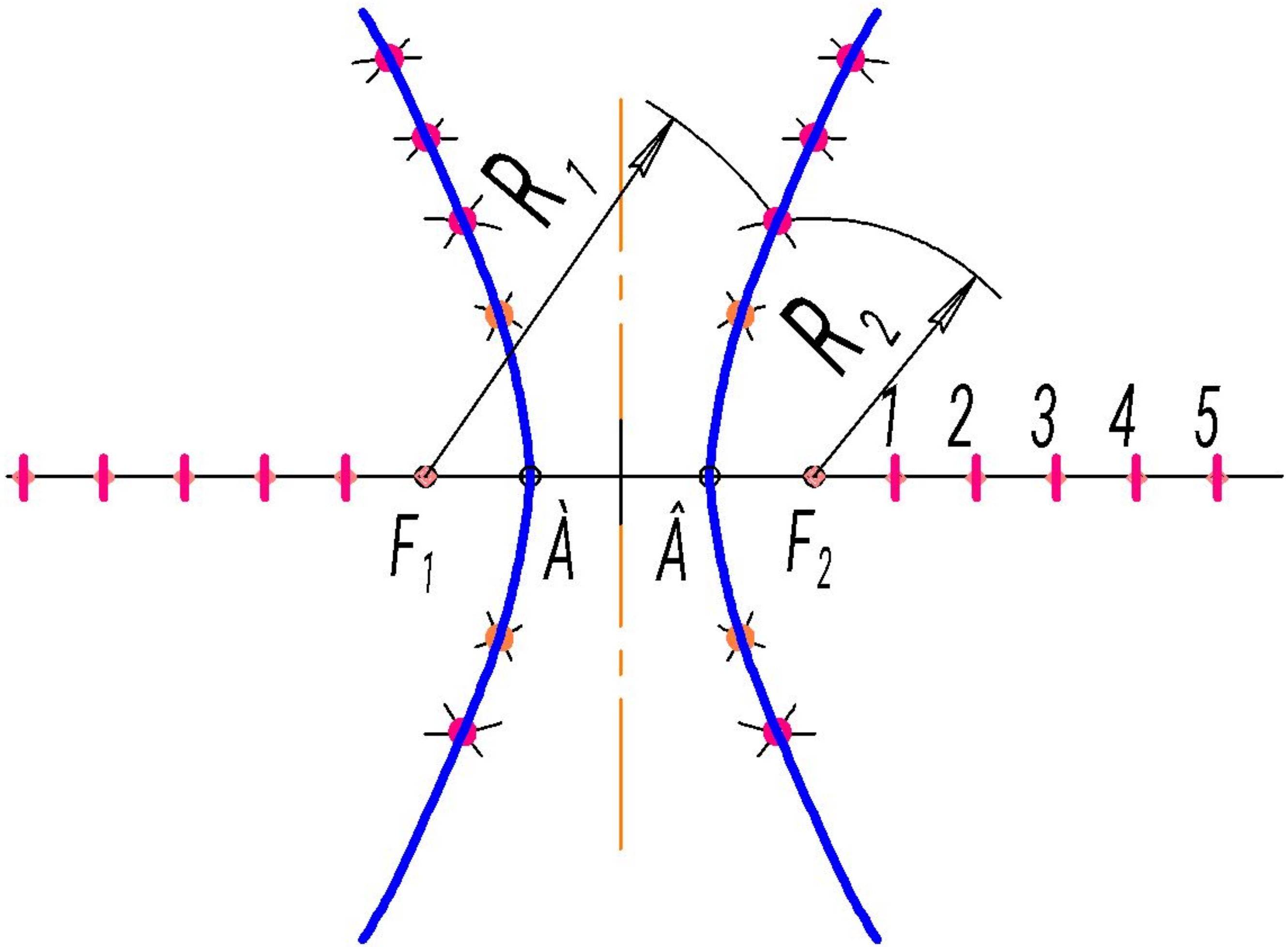
приближаются при удалении в бесконечность

- Точки *A* и *B* - вершины гиперболы.
- F_1 и F_2 - фокусы гиперболы
- $|MF_1| - |MF| = |NF_1| - |NF_2| = const = 2a$
- Расстояние между F_1 и F_2 равняется сумме $(a_2 + в_2)$

Построение гиперболы, если заданы вершины *A* и *B* и фокусы F_1 и F_2



Точки - *1, 2, 3, 4, 5* - ряд произвольно взятых точек. Из фокусов F_1 и F_2, как из центров, проводят дуги, радиусами которых служат расстояния от вершин *A* и *B* до точек *1, 2, 3, 4, 5* и т.д.. R_2 = *B1, B2, B3, B4, B5* R_1 = *A1, A2, A3, A4, A5*

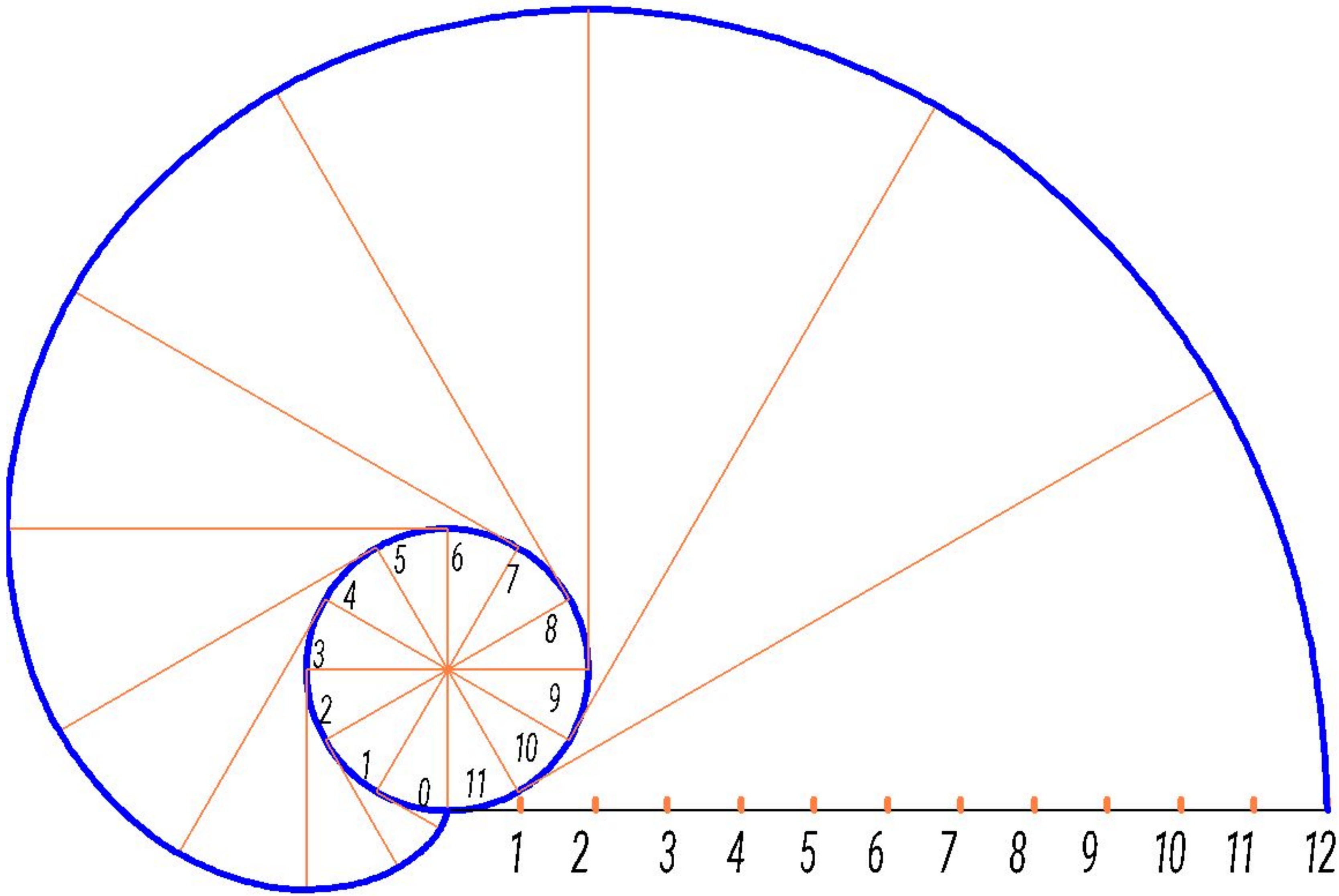


Эвольвента

- Эвольвента (развертка окружности)- эта лекальная кривая широко применяется в технике. Например, форма боковой поверхности зуба зубчатых передач, называемая профилем зуба, очерчивается по эвольвенте.

Алгоритм построения

1. Окружность разделить на 12 частей.
2. В точках деления провести касательные к окружности направленные в одну сторону
3. На касательной, проведенной через последнюю точку, откладывают отрезок равный, $2\pi R$, и делят на 12 частей.
5. На первой касательной откладывают 1/12 отрезка на второй 2/12 и т.д.



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

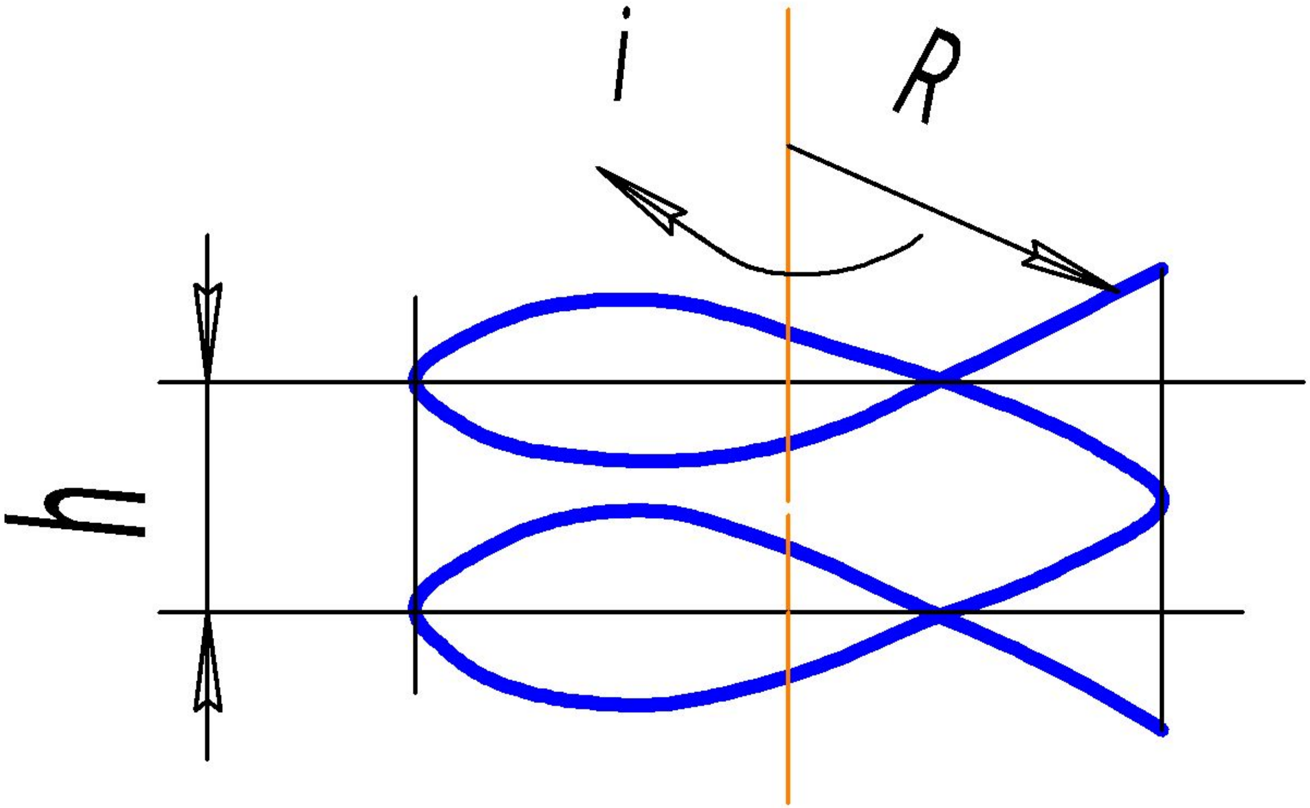
Цилиндрическая винтовая линия

- **Цилиндрическая винтовая линия образуется вращением точки вокруг некоторой оси с одновременным поступательным движением вдоль этой же оси.**

i - ось винтовой линии

R - радиус вращения

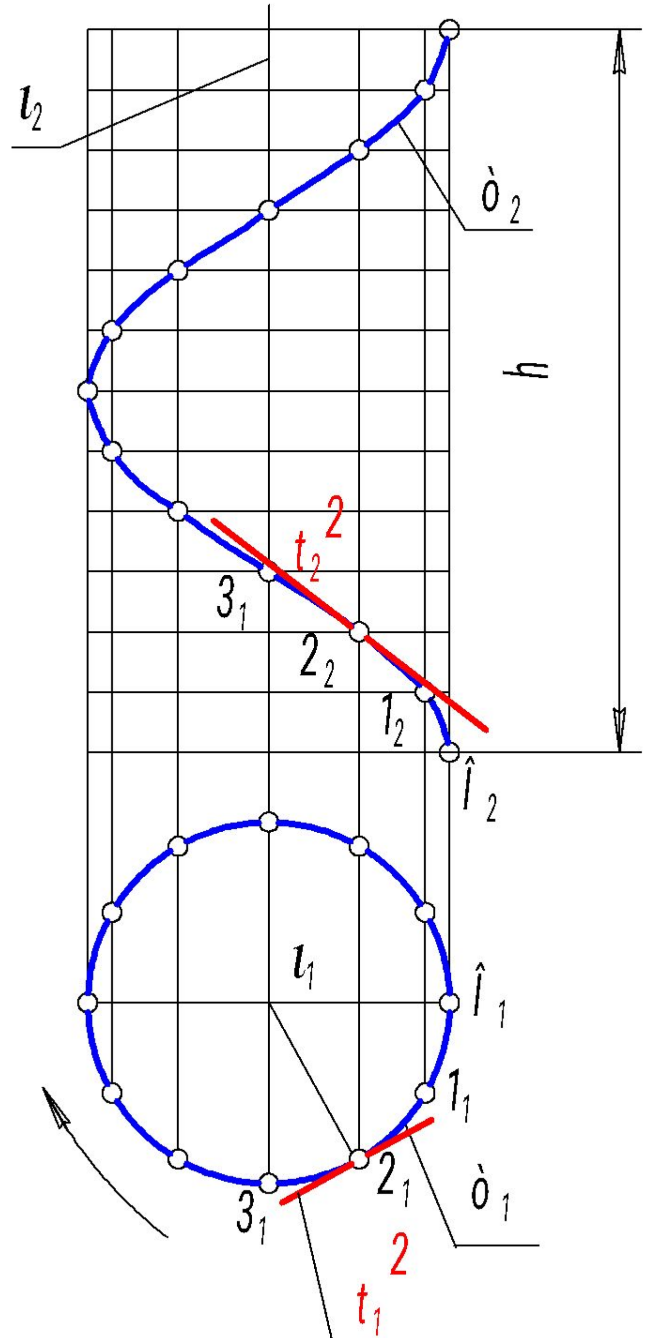
h - шаг, определяет расстояние между двумя смежными витками.



Алгоритм построения

1. Горизонтальную проекцию (окружность) делить на 12 частей.
2. Делить принятое значение шага (*h*) на 12 частей.
3. Определить нулевое положение точки $O(O_1$ *и* $O_2)$
4. Фронтальные проекции точек находятся как точки пересечения одноименных горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через точки деления.

- m_1 - окружность
- m_2 - синусоида
- Винтовую линию называют правой, если точка поднимается вверх и вправо по мере удаления от наблюдателя и левой, если точка поднимается вверх и влево по мере удаления от наблюдателя.
- $\boldsymbol{t^2}$ - касательная к винтовой линии в точке $2\ (2_1,\ 2_2)$



l_2
$\grave{o}_2$
h
$t_2^{\,2}$
3_1
2_2
1_2
$\hat{I}_2$
l_1
$\hat{I}_1$
1_1
2_1
$\grave{o}_1$
3_1
$t_1^{\,2}$