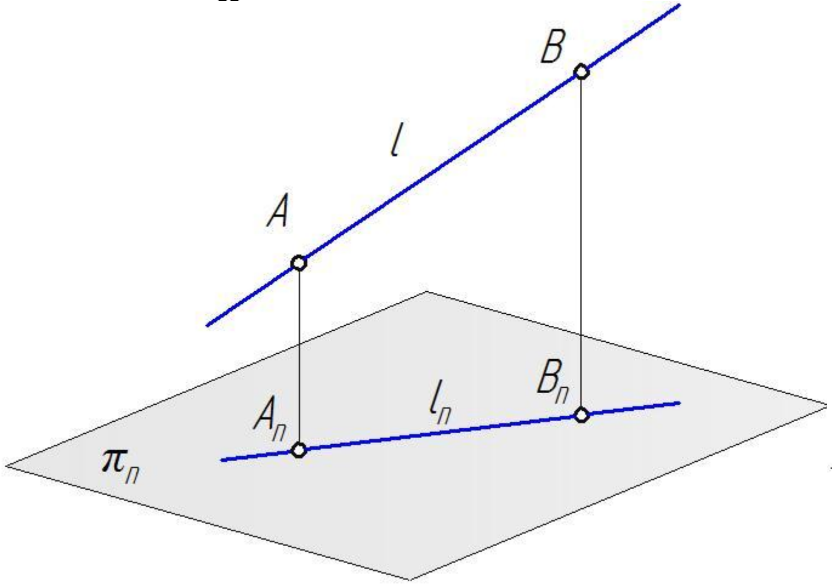
Начертательная геометрия

ЛЕКЦИЯ №2

Положение прямой относительно плоскости проекций

Прямая общего положения

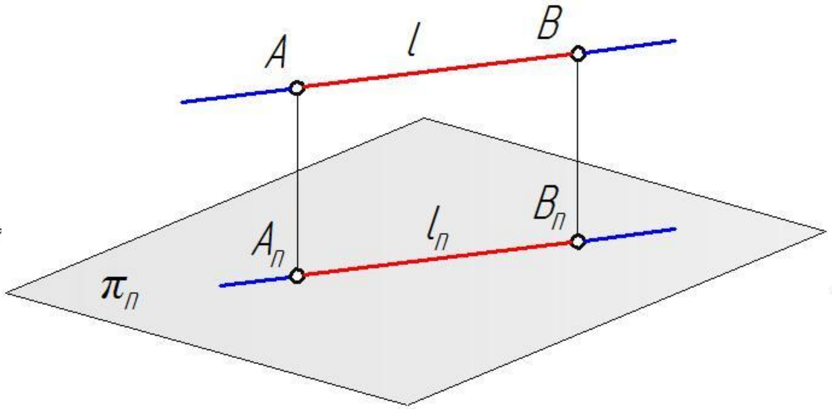
$l \nparallel \pi_n$ и $l \not\perp \pi_n$



Прямые частного положения

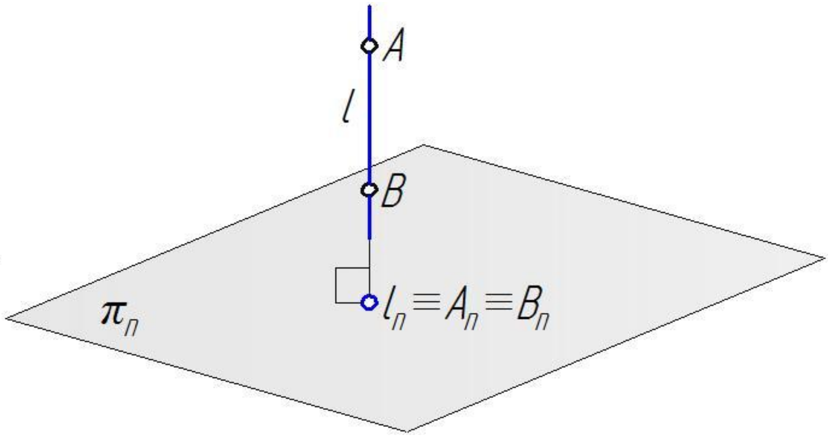
Прямая уровня

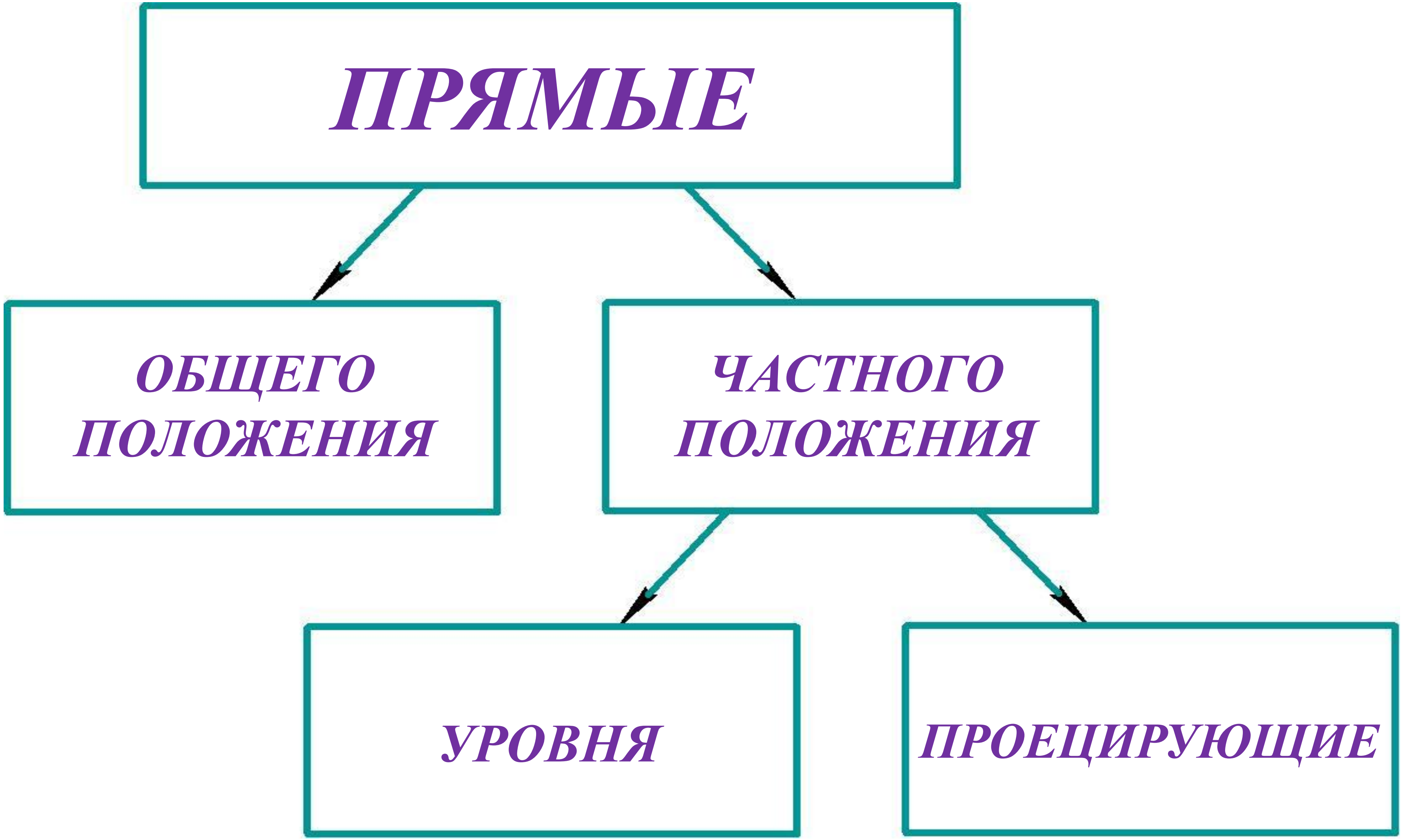
$l \parallel \pi_n$



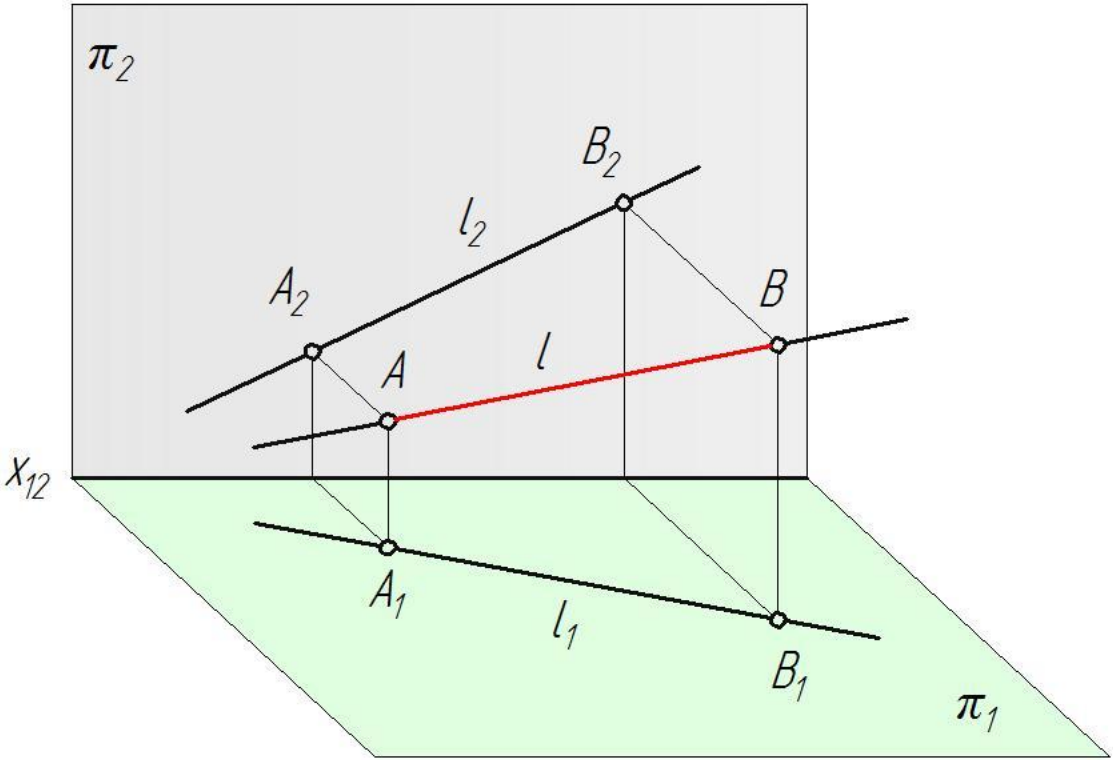
Проецирующая прямая

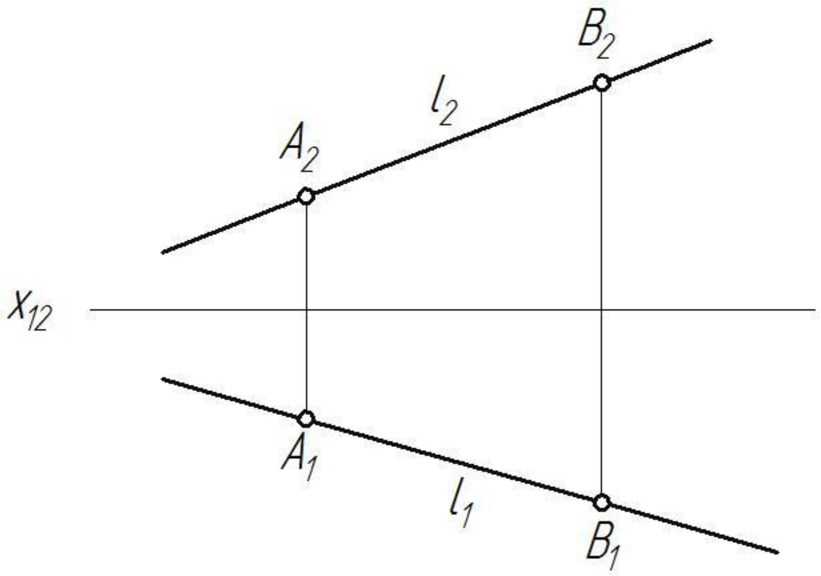
$l \perp \pi_n$




ПРЯМЫЕ
ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ
ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
УРОВНЯ
ПРОЕЦИРУЮЩИЕ

Прямая общего положения





$l_1 \nparallel \pi_1$ и $l_1 \not\perp \pi_1$

$l_2 \nparallel \pi_2$ и $l_2 \not\perp \pi_2$

$l_1 \nparallel x_{12}$ и $l_2 \nparallel x_{12}$

$l_1 \not\perp x_{12}$ и $l_2 \not\perp x_{12}$

Прямые частного положения

Это прямые параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций

$$l \parallel \pi_n \quad \text{или} \quad l \perp \pi_n$$

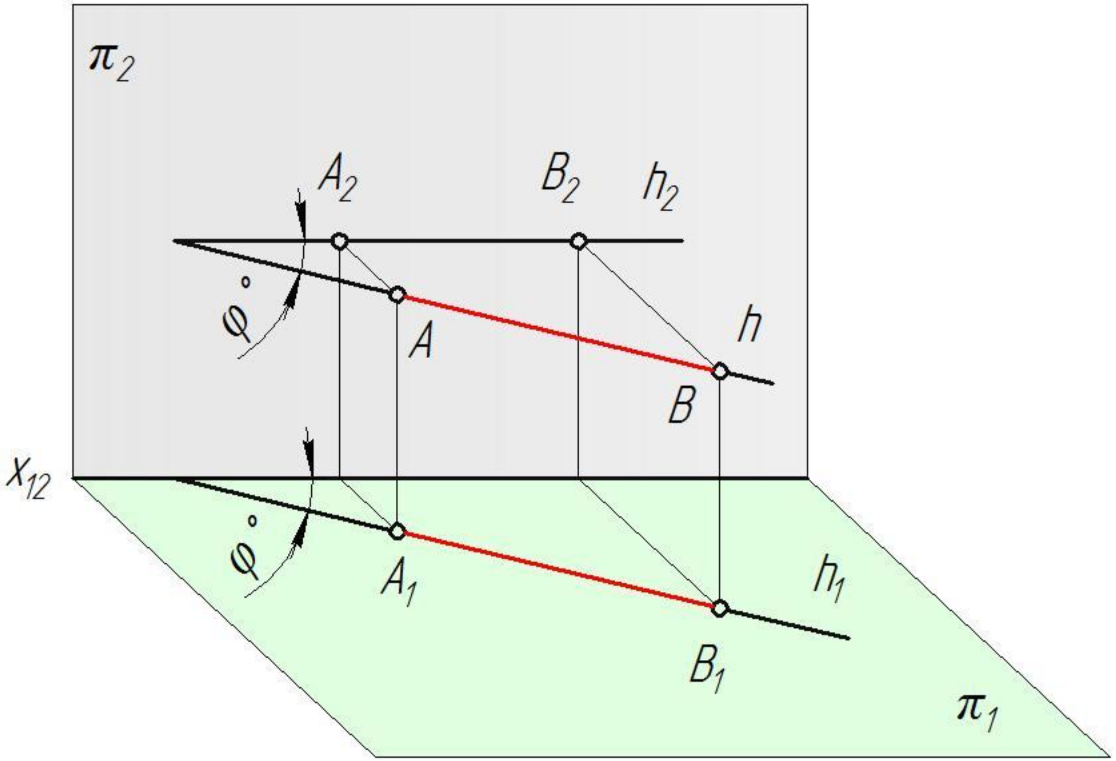
Прямая уровня

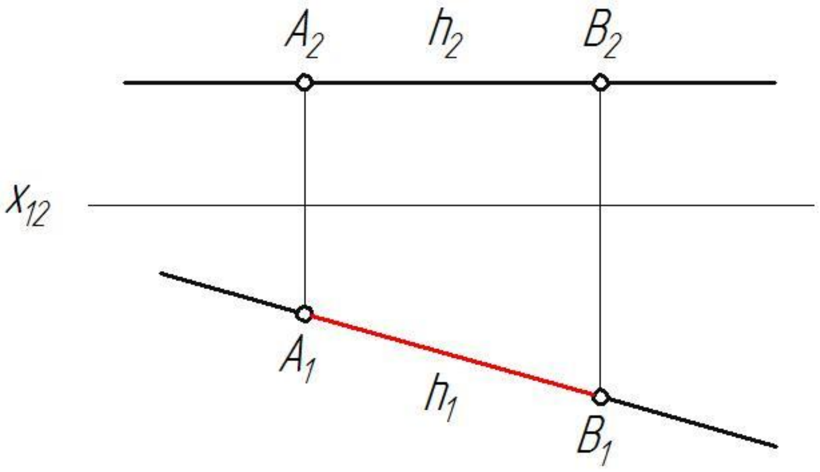
Это прямая параллельная одной из плоскостей проекций

$$\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{n}}$$

ГОРИЗОНТАЛЬ

$h \parallel \pi_1$





$\angle\phi = h(AB) \wedge \pi_2$

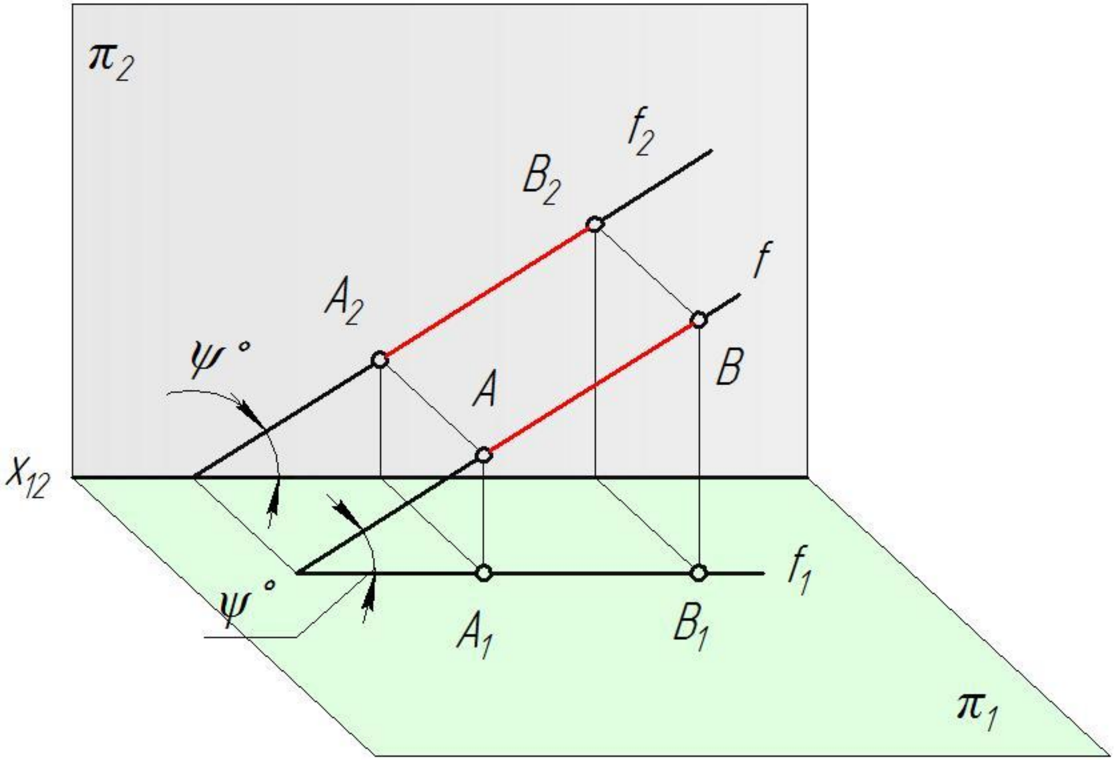
$\angle\phi = h_1(A_1B_1) \wedge x_{12}$

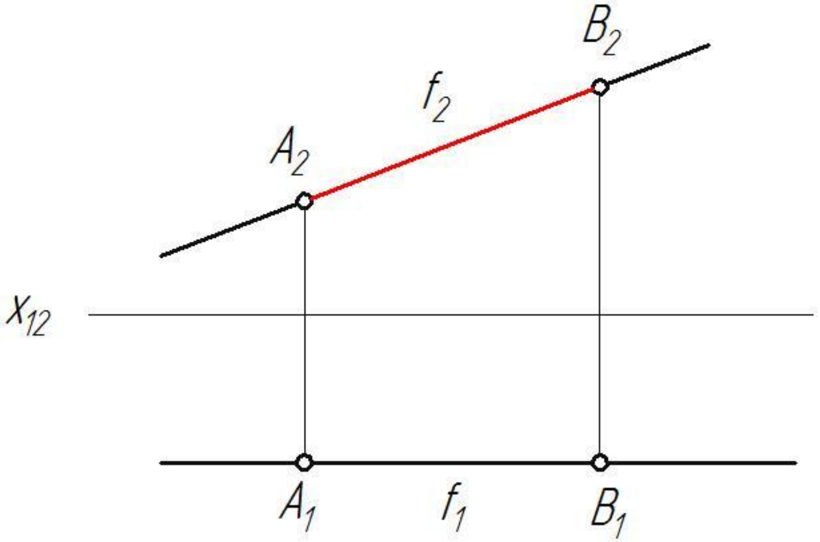
$h \parallel \pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{12}$

$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

ФРОНТАЛЬ

$f \parallel \pi_2$





$\angle\psi = f(AB) \wedge \pi_1$

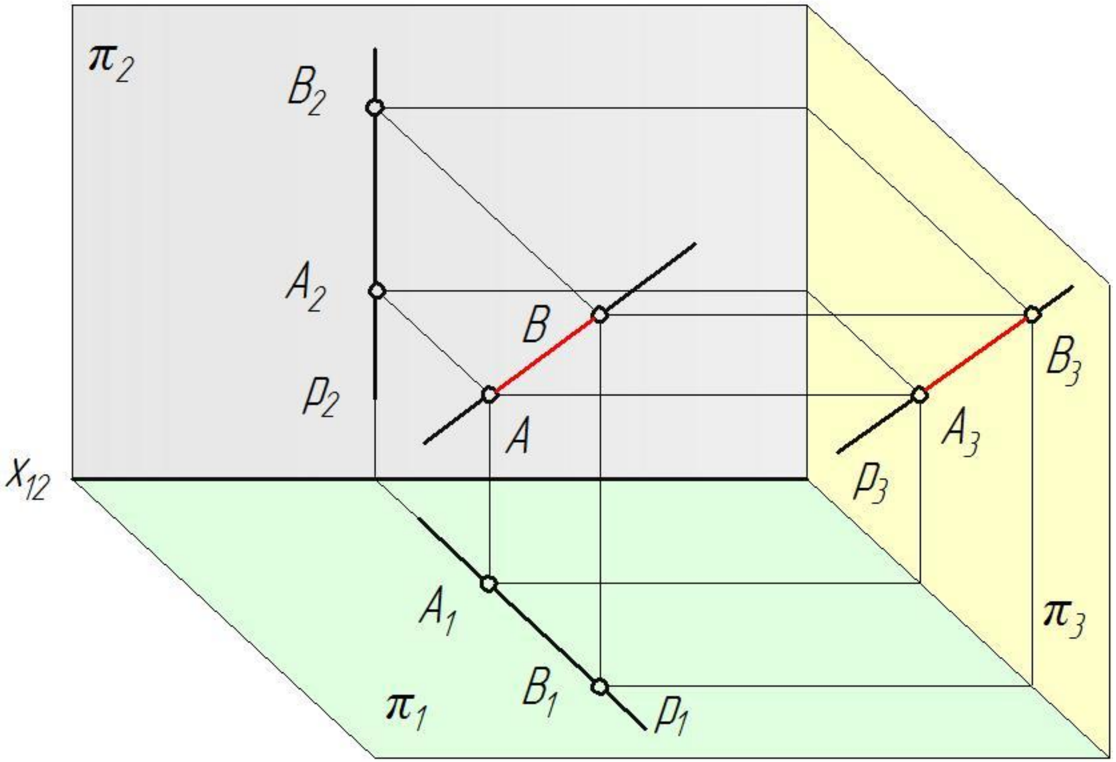
$\angle\psi = f_2(A_2B_2) \wedge x_{12}$

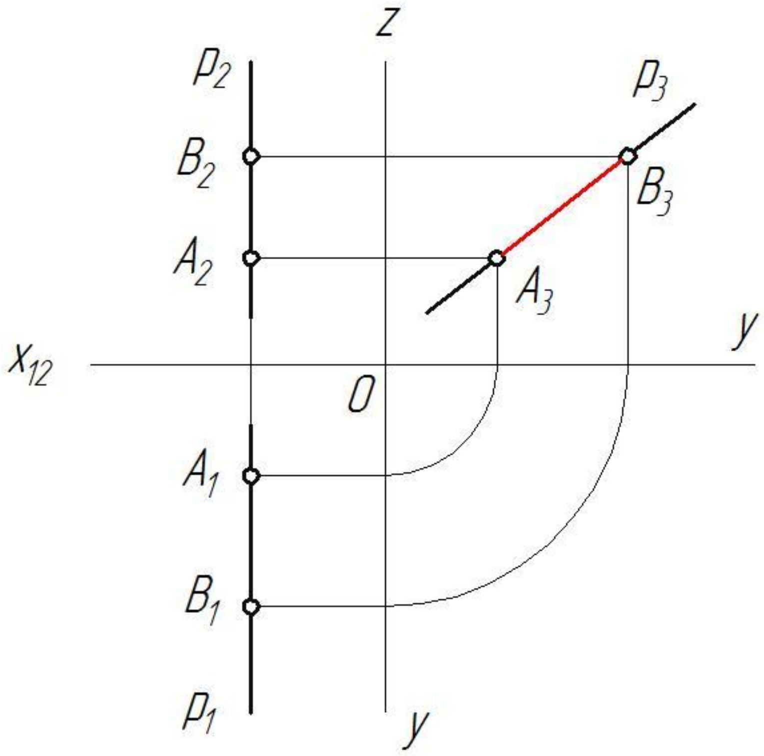
$f \parallel \pi_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 \parallel x_{12}$

$AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \pi_2 \quad \Rightarrow \quad A_2B_2 \cong |AB|$

ПРОФИЛЬНАЯ ПРЯМАЯ

$p \parallel \pi_3$





$p \parallel \pi_3 \Rightarrow p_1 \parallel y,\ p_2 \parallel z$

$AB \subset p \Rightarrow AB \parallel \pi_3 \Rightarrow A_3B_3 \cong |AB|$

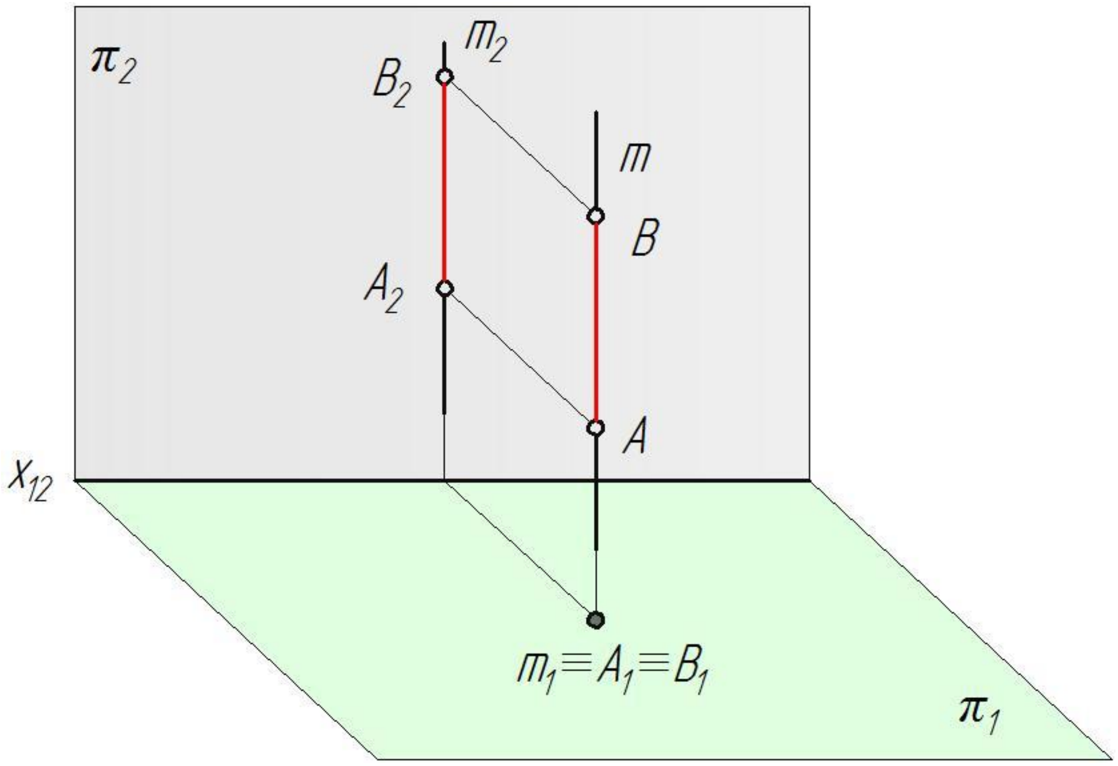
Проецирующая прямая

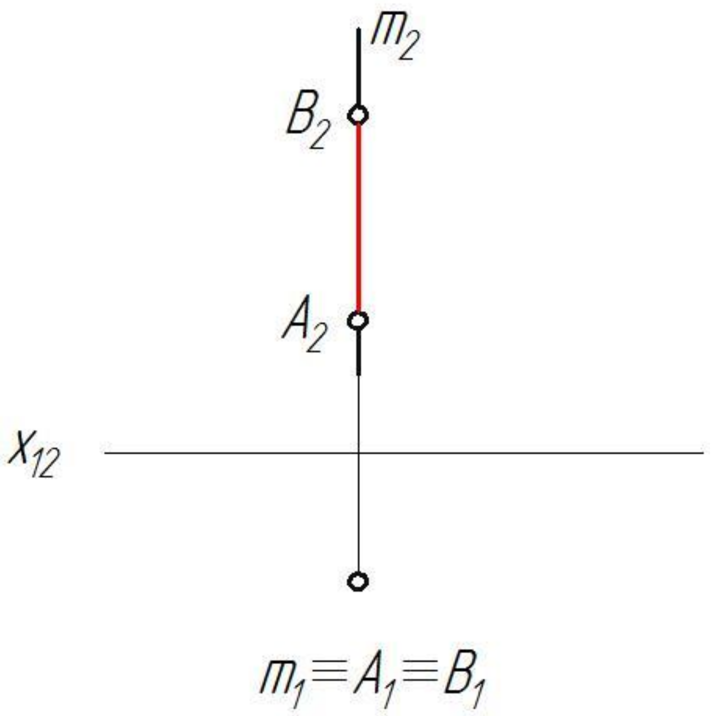
Это прямая перпендикулярная одной из плоскостей проекций

$$l \perp \pi_n$$

ГОРИЗОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩАЯ ПРЯМАЯ

$m \perp \pi_1$



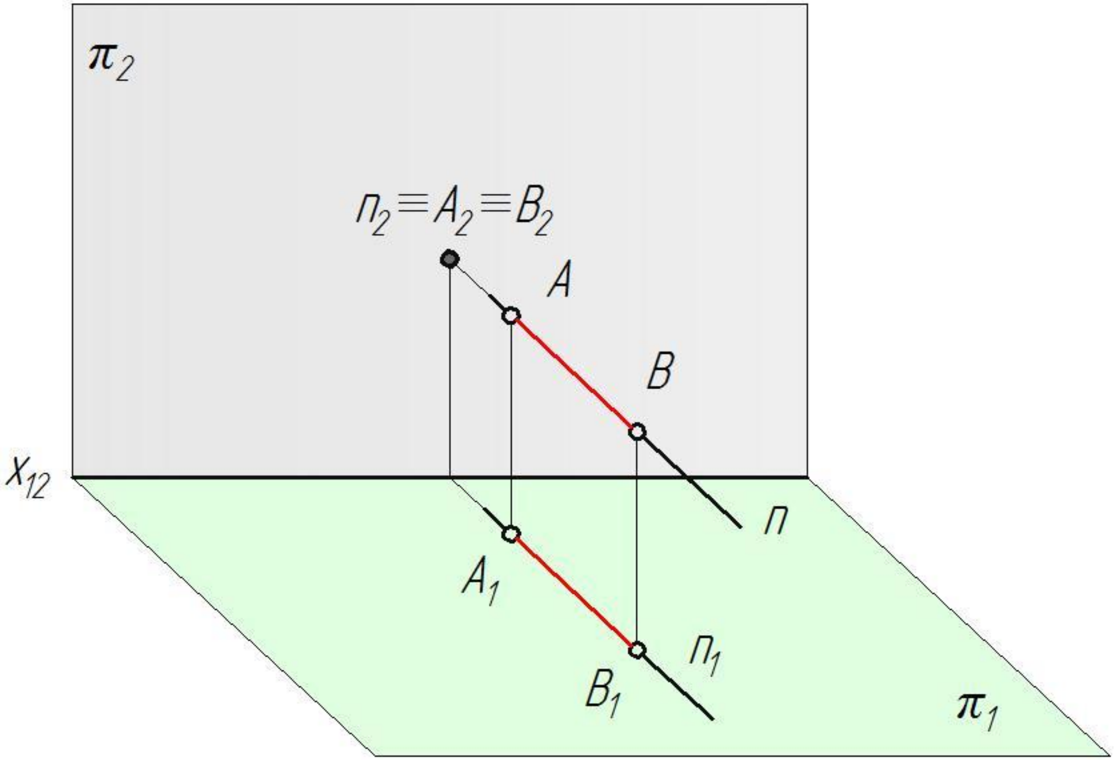


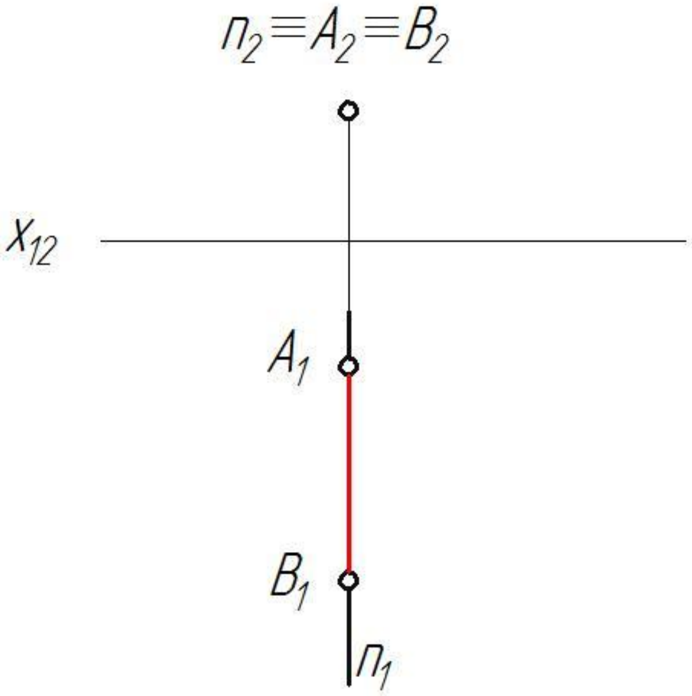
$m \perp \pi_1 \wedge m \parallel \pi_2$ $\Rightarrow m_1$ – точка $\wedge$ $m_2 \perp x_{1,2}$

$AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \pi_2$ $\Rightarrow A_1B_1$ - точка $\wedge$ $A_2B_2 \cong |AB|$

ФРОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩАЯ ПРЯМАЯ

$n \perp \pi_2$





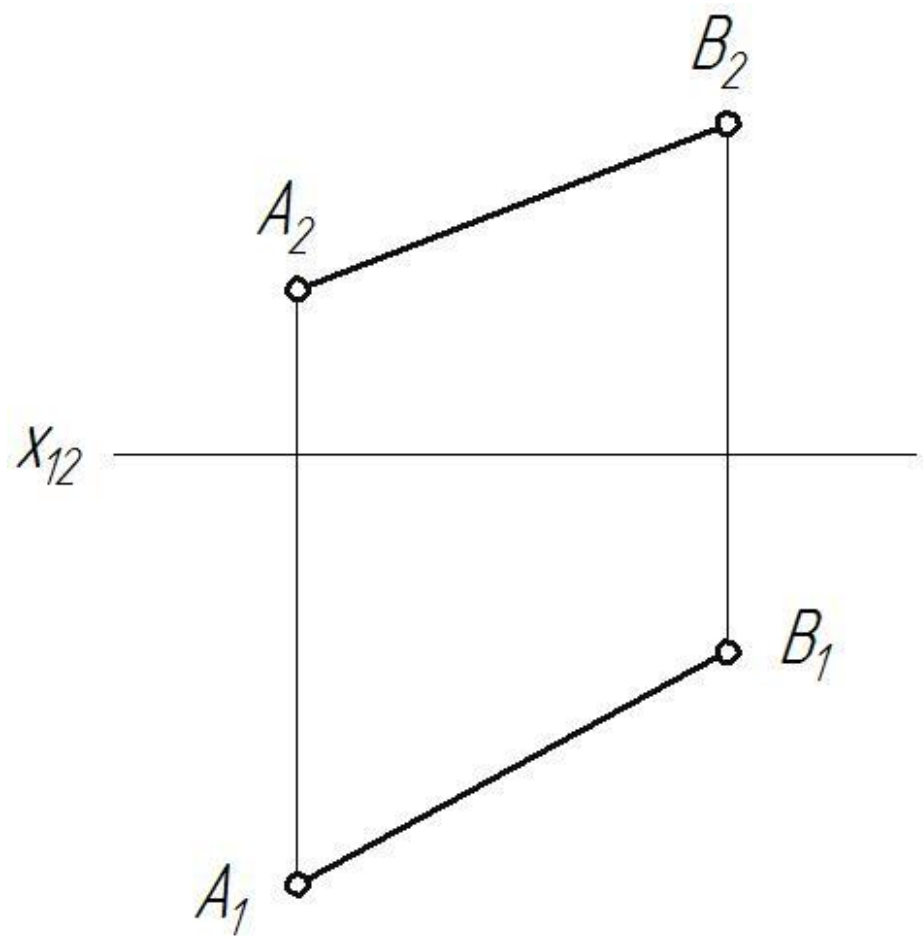
$n \perp \pi_2 \wedge n \parallel \pi_1$ $\Rightarrow n_2$ – точка $\wedge$ $n_1 \perp x_{1,2}$

$AB \subset n \Rightarrow AB \parallel \pi_1$ $\Rightarrow A_2B_2$ - точка $\wedge$ $A_1B_1 \cong |AB|$

Характерная особенность эпюра проецирующей прямой –

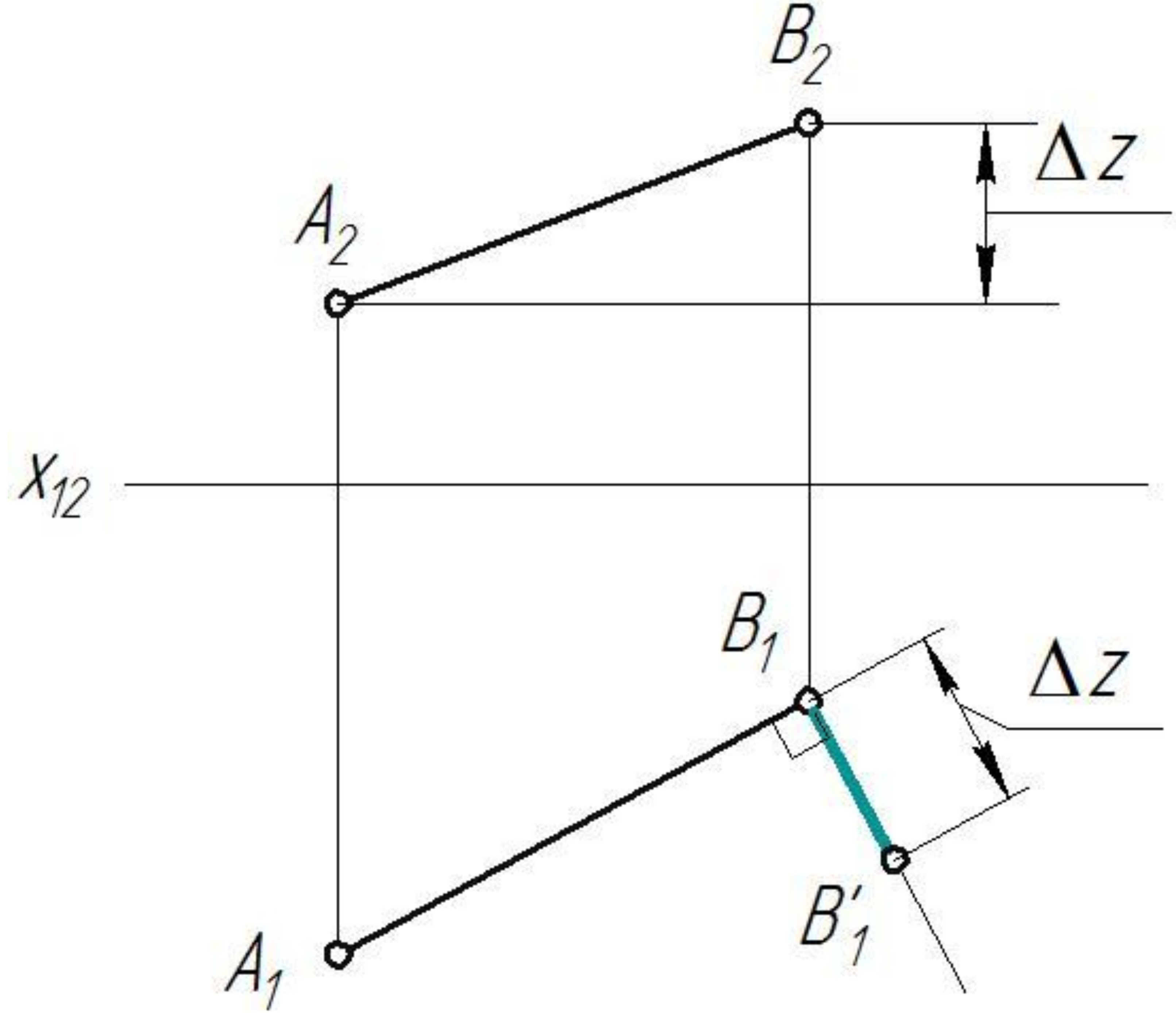
одна из проекций прямой точка

Определение истинной величины отрезка прямой и углов наклона к плоскостям проекции.

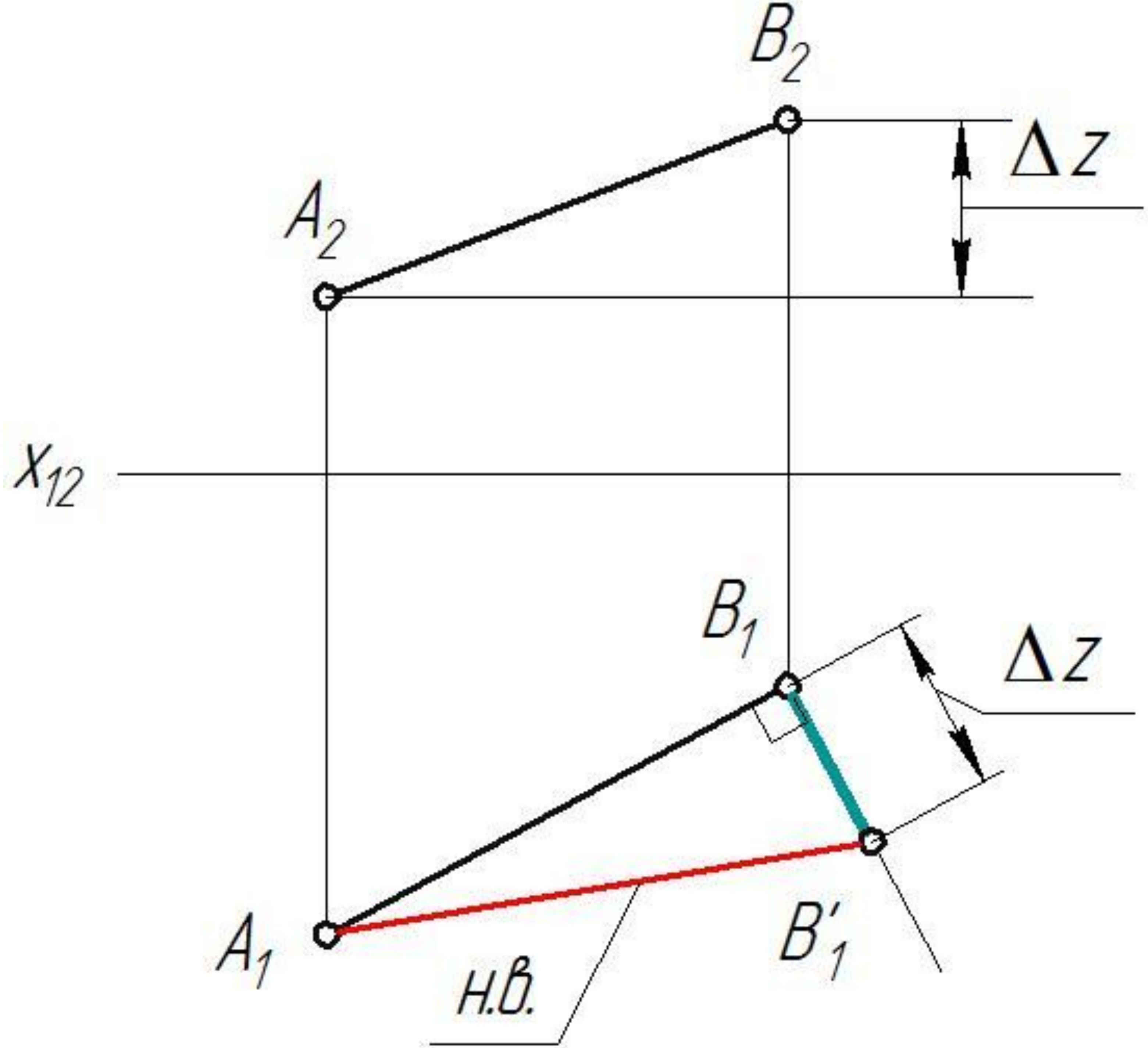


Дано:

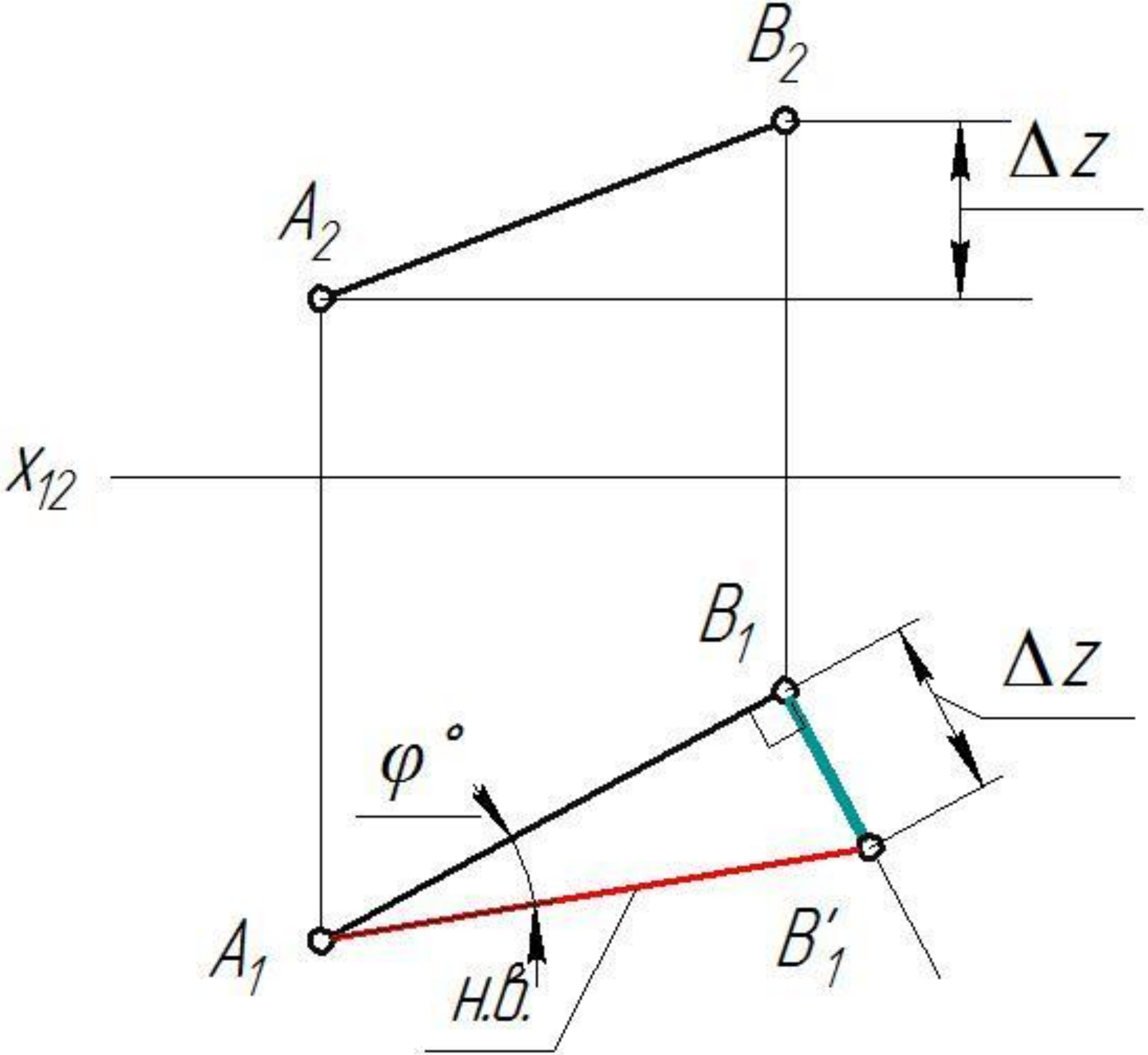
Отрезок |AB| прямой l



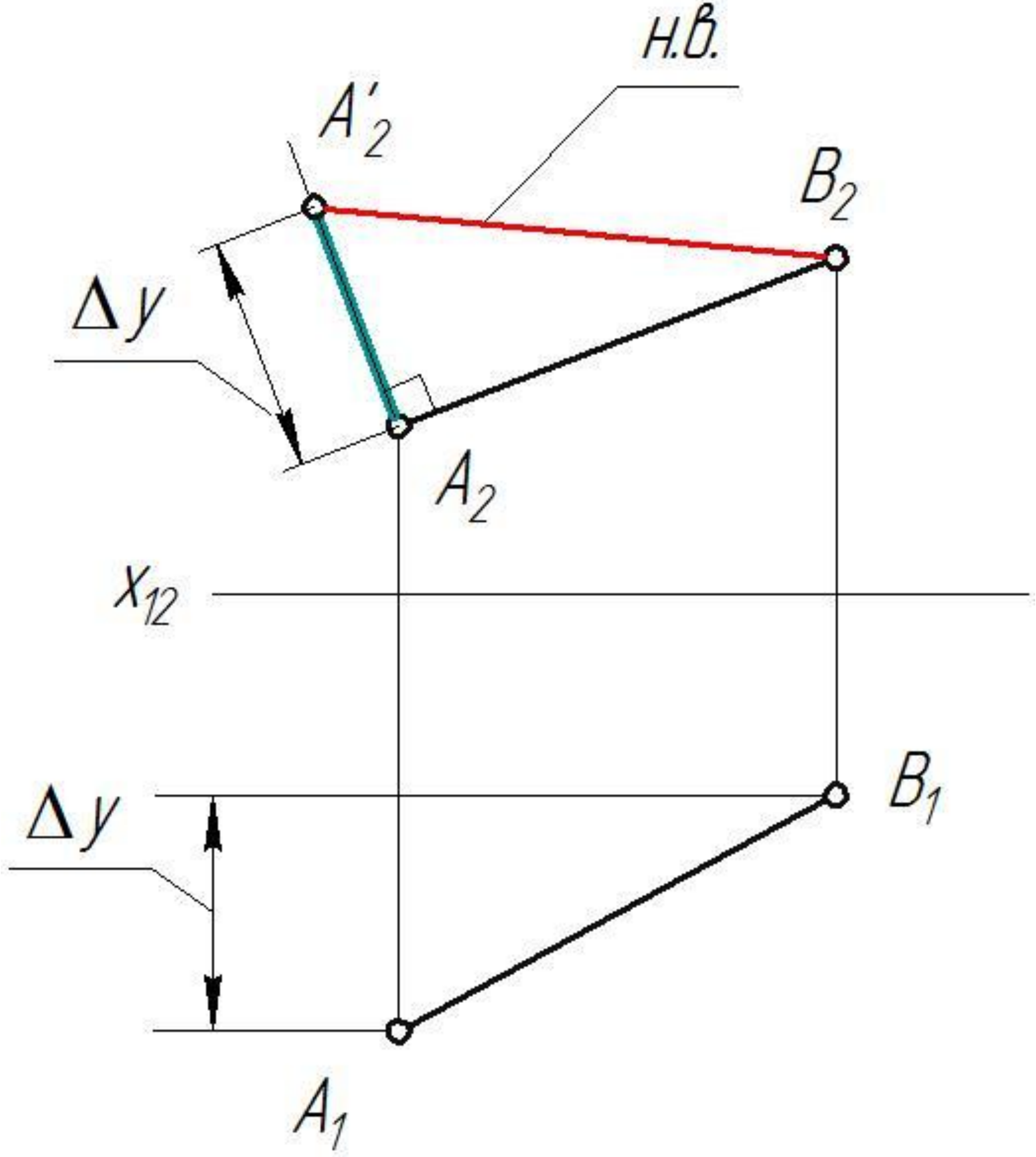
B_2
Δz
A_2
x_{12}
B_1
Δz
B'_1
A_1

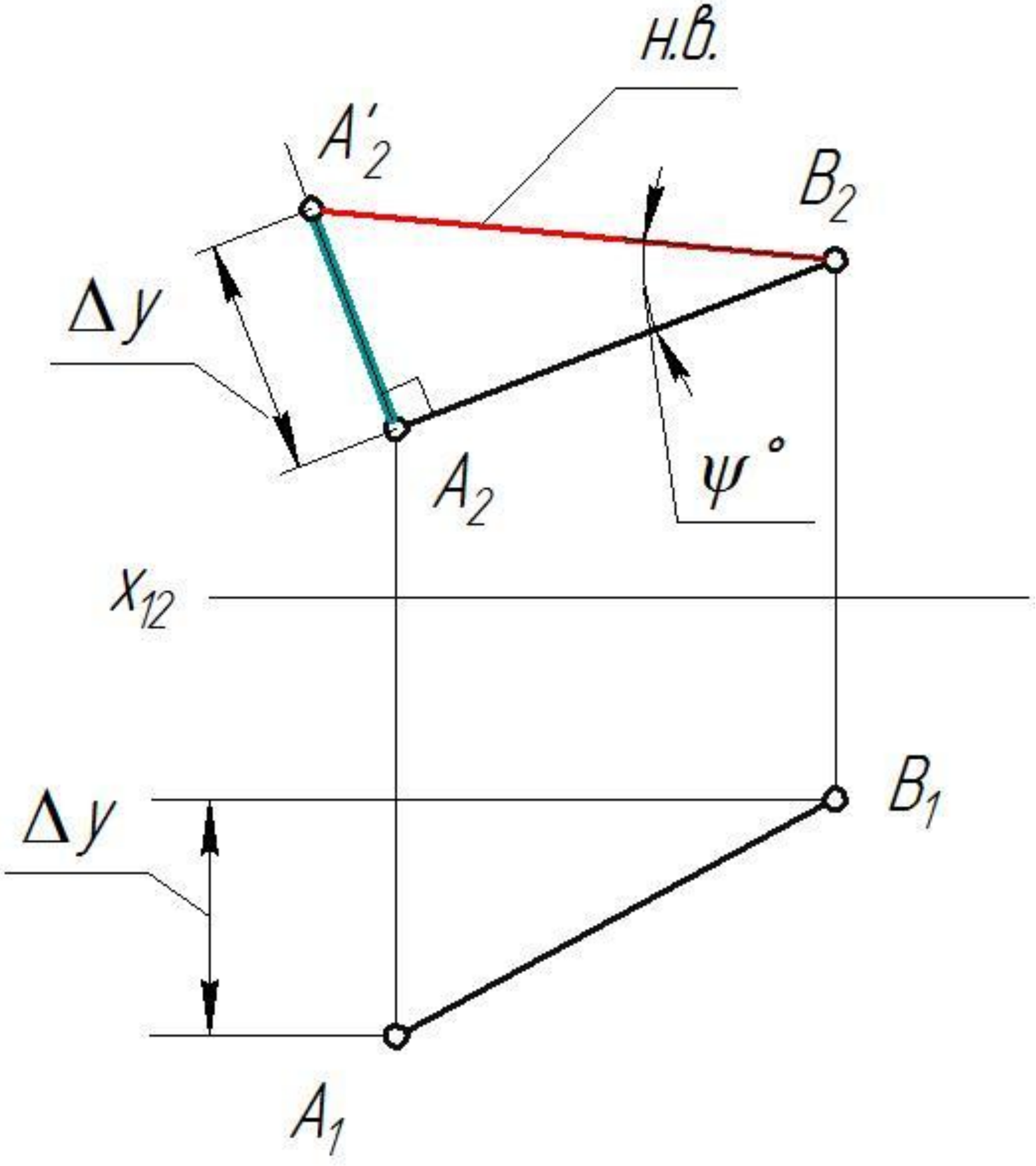


B2
ΔZ
A2
X12
B1
ΔZ
A1
B'1
н.в.



$\angle\phi = |\mathbf{AB}|\wedge \boldsymbol{\pi}_1$

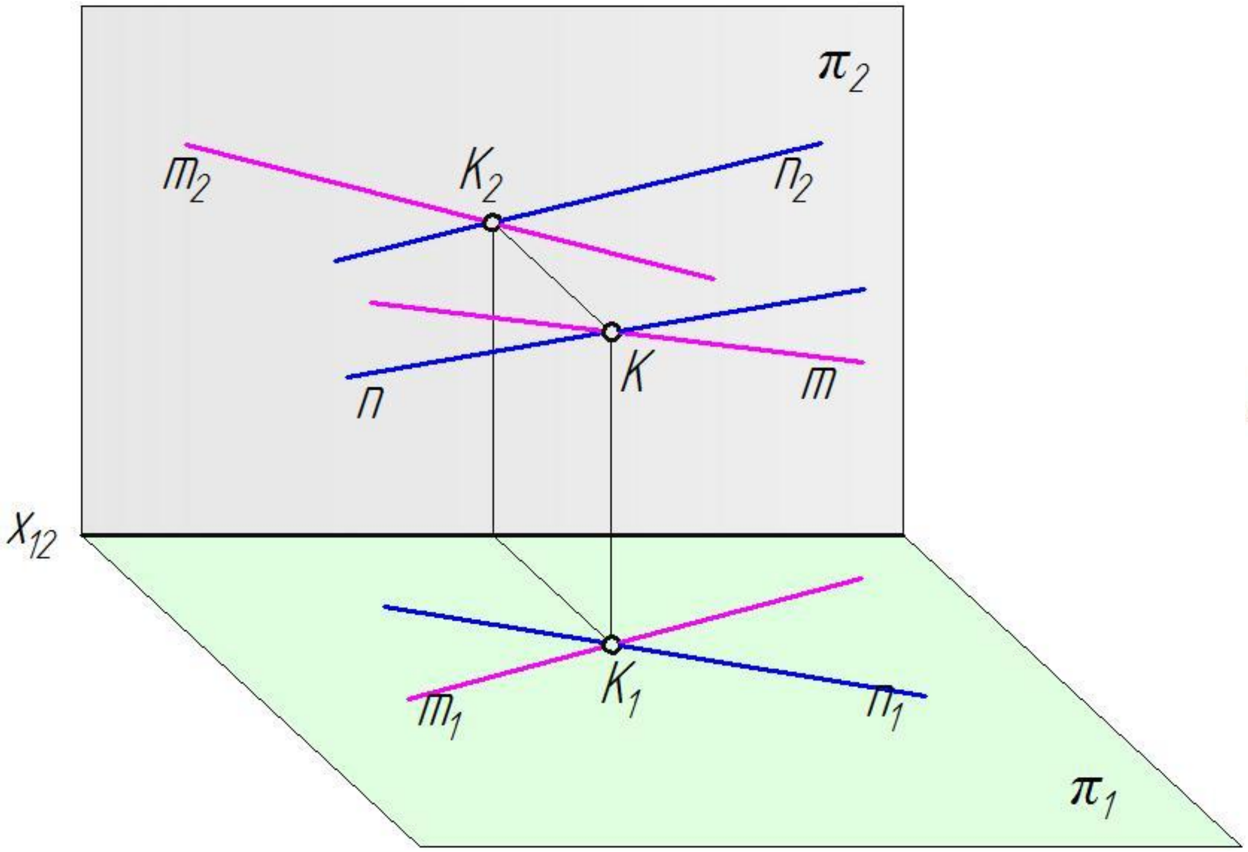

н.в.
A'_2
B_2
Δy
A_2
x_{12}
B_1
Δy
A_1

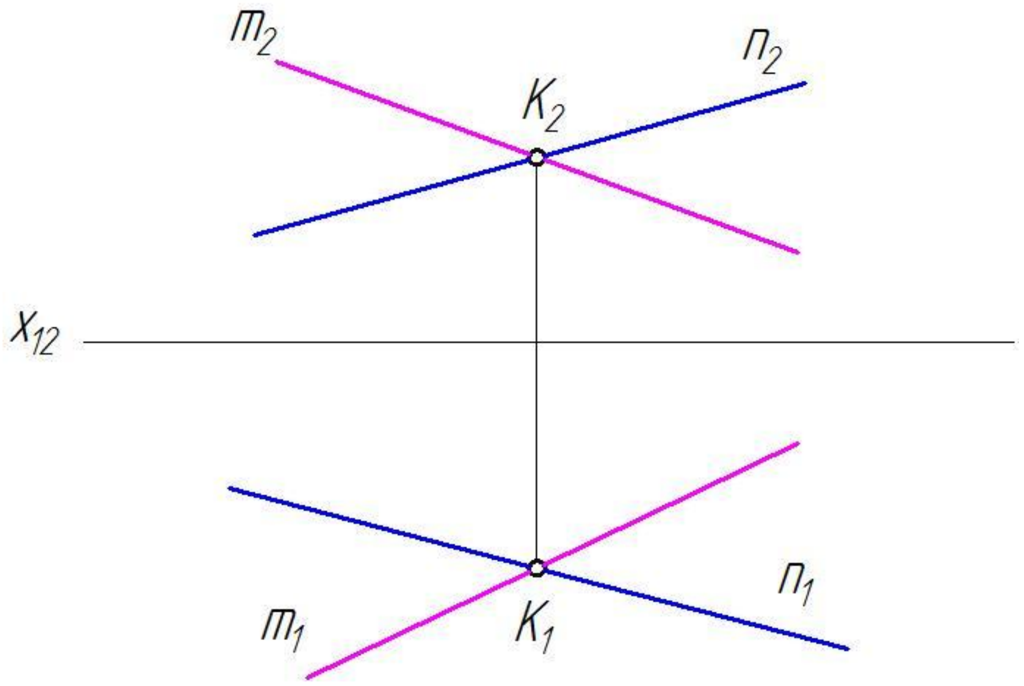


$\angle\psi = |AB| \wedge \pi_2$

Взаимное положение двух прямых

Пересекающиеся прямые

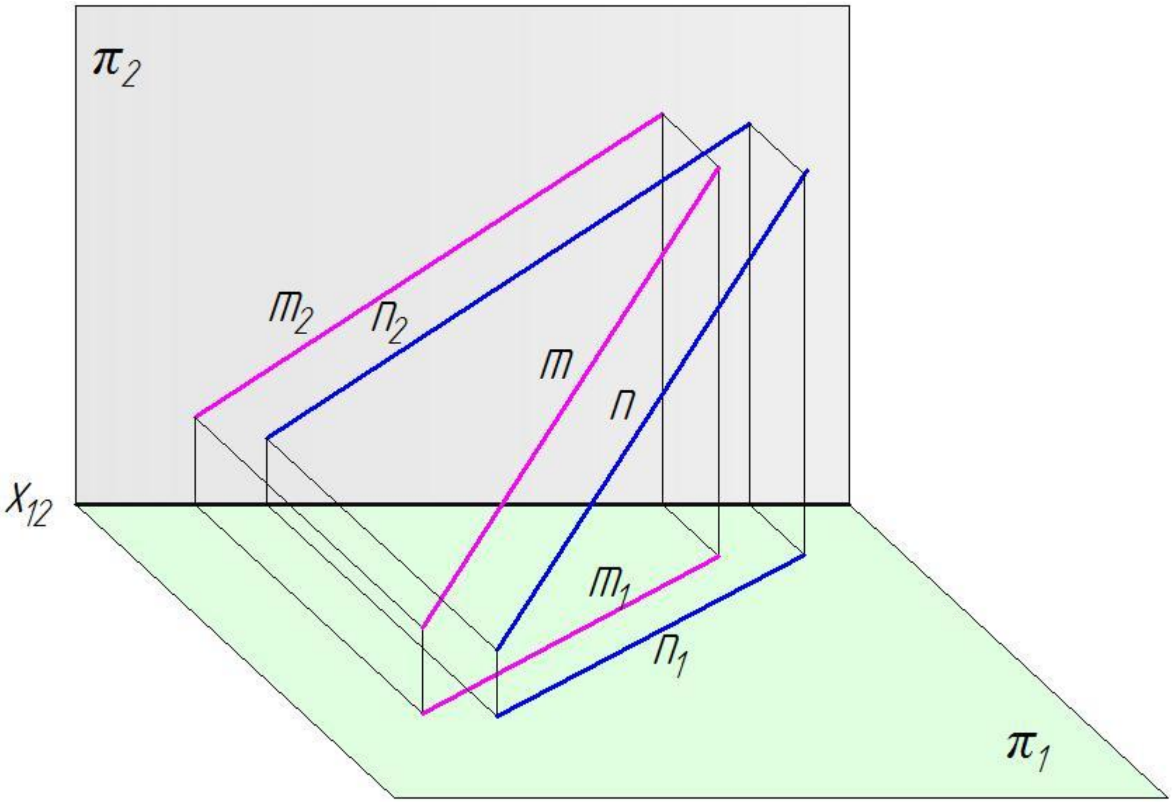


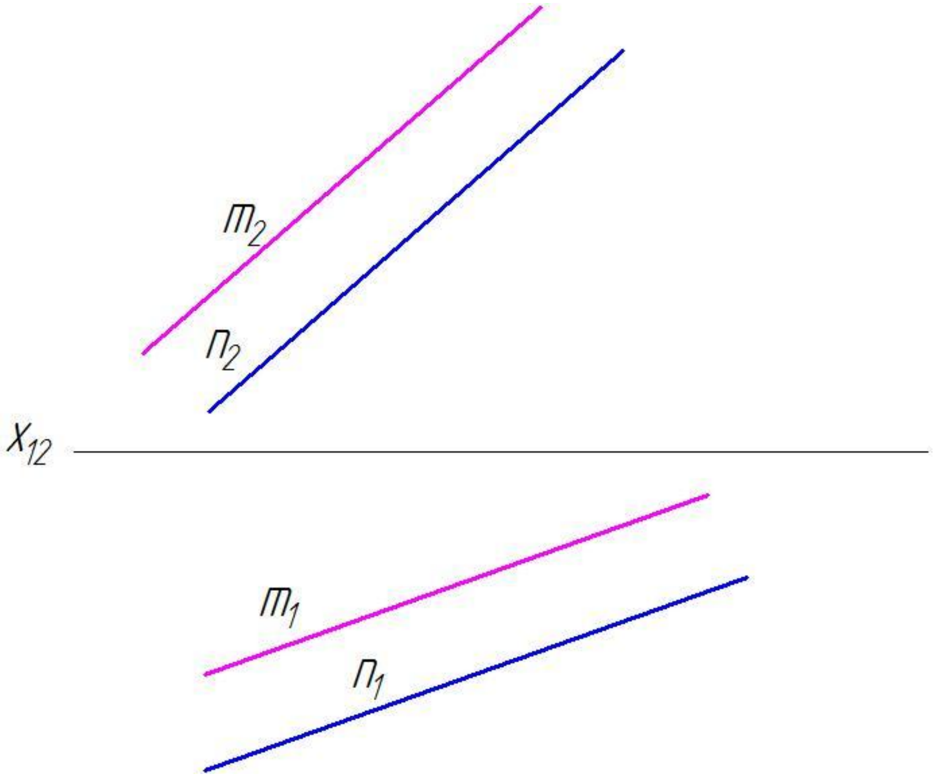


$$m \cap n = K \Rightarrow$$

$$m_1 \cap n_1 = K_1$$
$$m_2 \cap n_2 = K_2$$
$$K_1K_2 \perp x_{1,2}$$

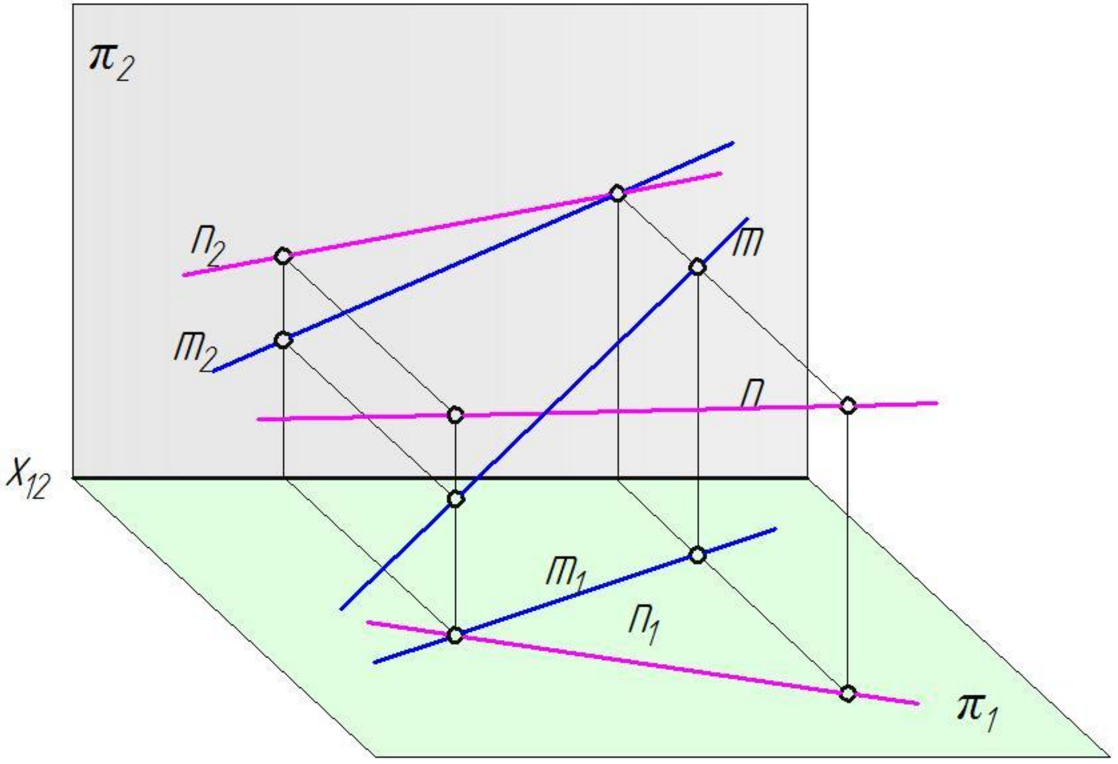
Параллельные прямые

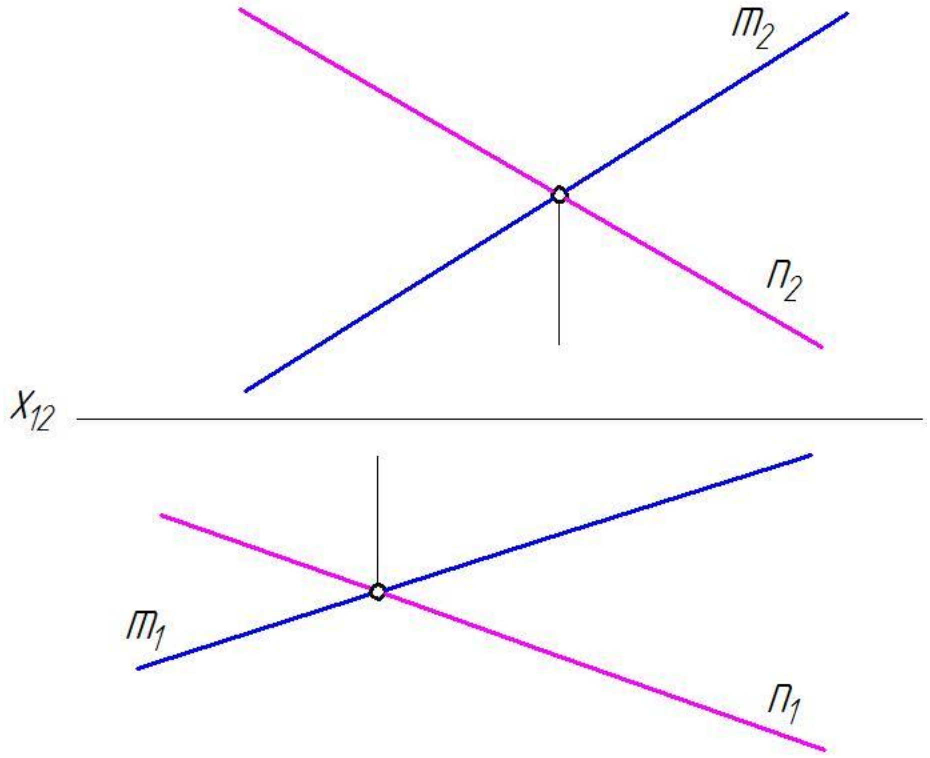




$$m \parallel n \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 \parallel n_1 \\ m_2 \parallel n_2 \end{array}$$

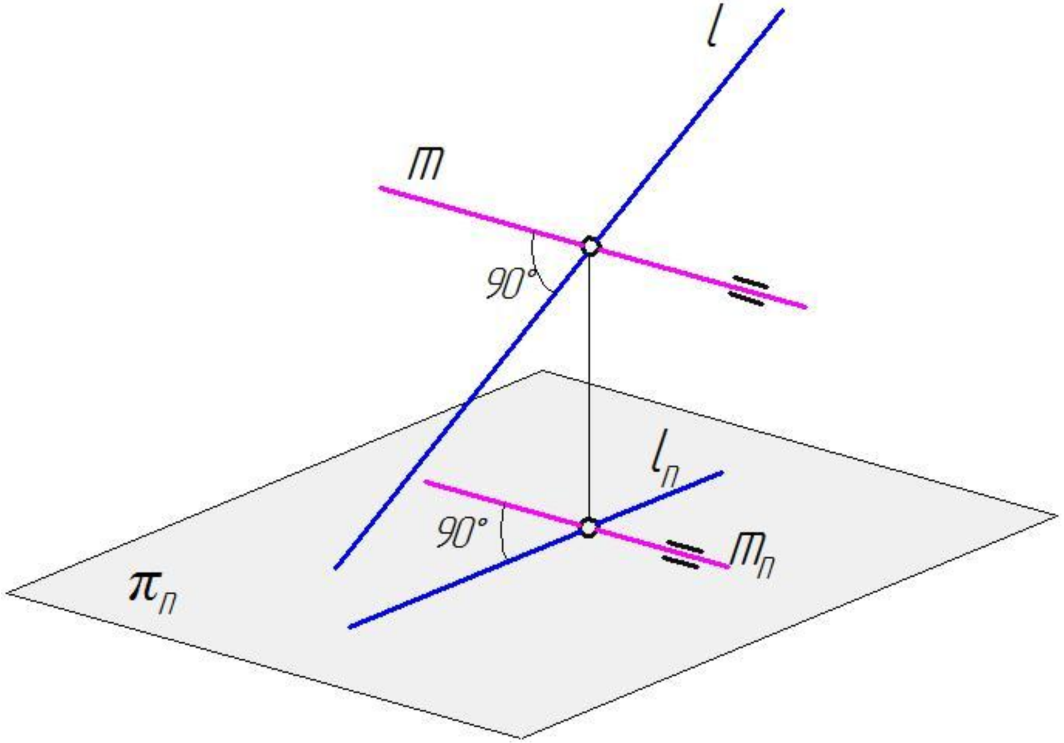
Скрещивающиеся прямые





$$m \dot{-} n \Rightarrow m \nparallel n \wedge m \not\cap n$$

Взаимно перпендикулярные прямые



Если

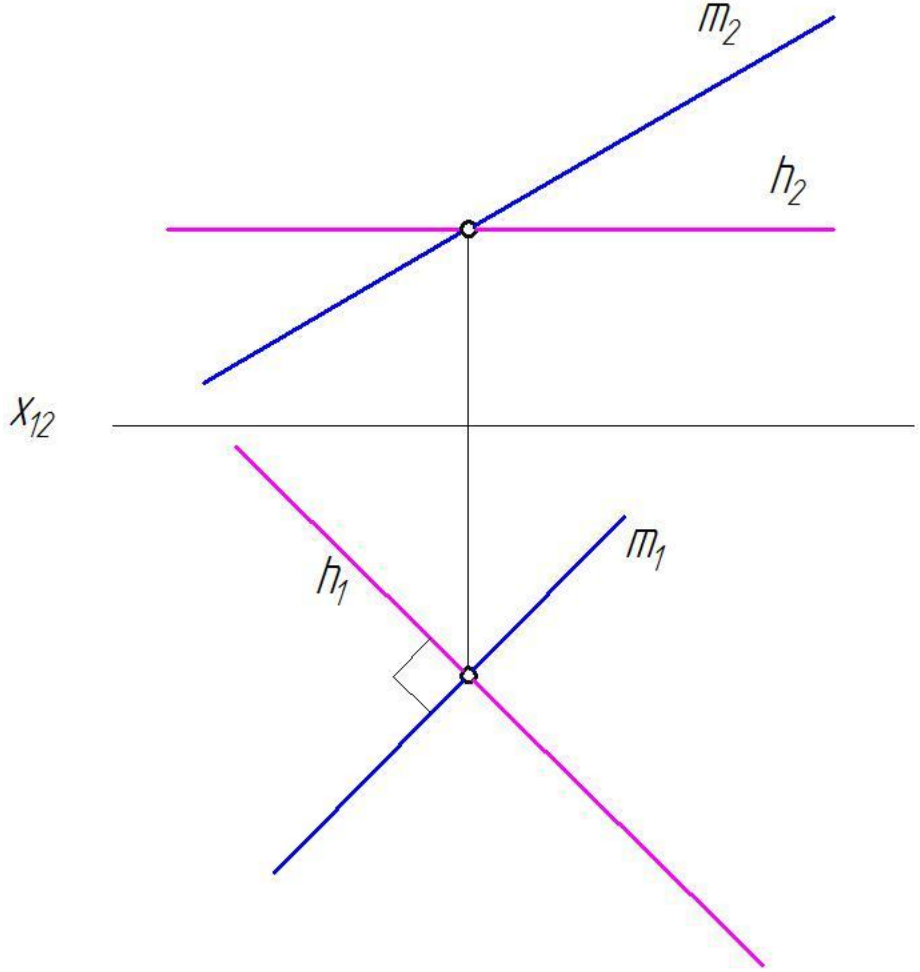
$m \perp l,$

$m \cap l \vee m \dot{-} n,$

$m \parallel \pi_n,$

$l \perp \pi_n,$

то $m_n \perp l_n$



<u>**Теорема о проецировании прямого угла.**</u>

Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна, то угол на эту плоскость проецируется в натуральную величину.

Поверхности

Плоскость

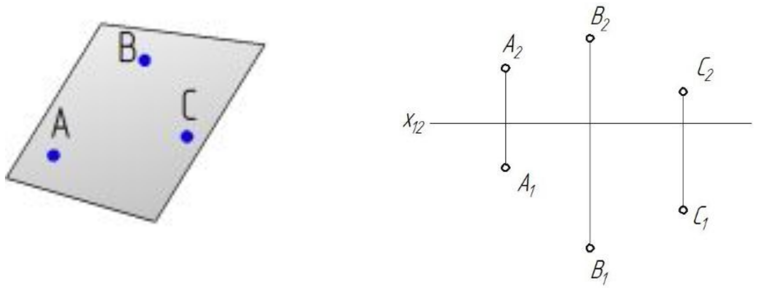
Плоскость **-** это один из видов поверхности (плоская поверхность).

Положение 8.

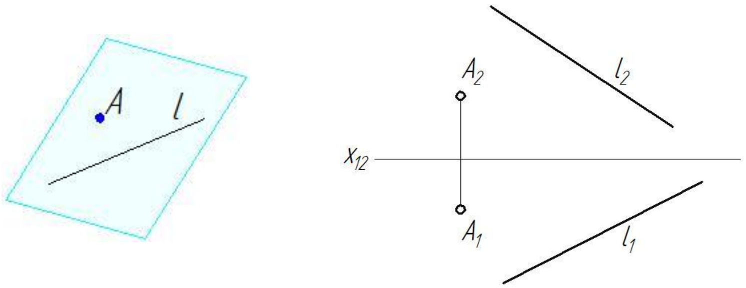
Плоскости бесконечны и не прозрачны.

Способы задания плоскости

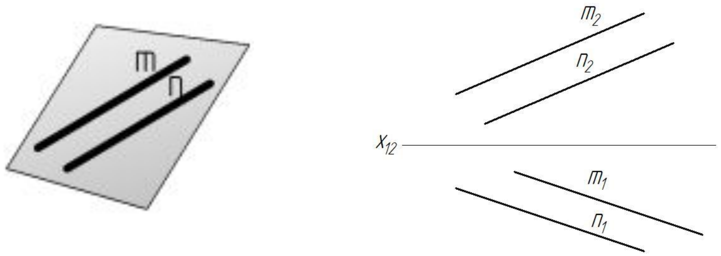
Три точки, не лежащие на одной прямой



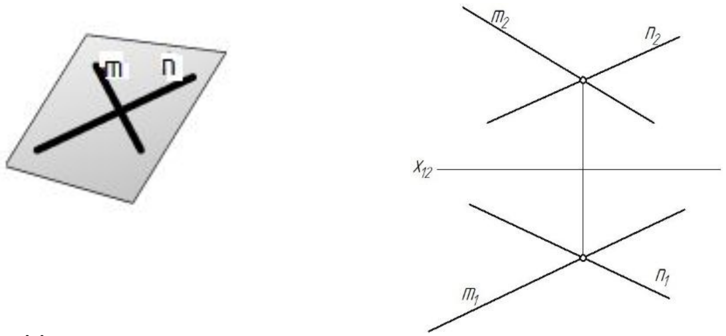
Прямой и точкой, не лежащей на этой прямой



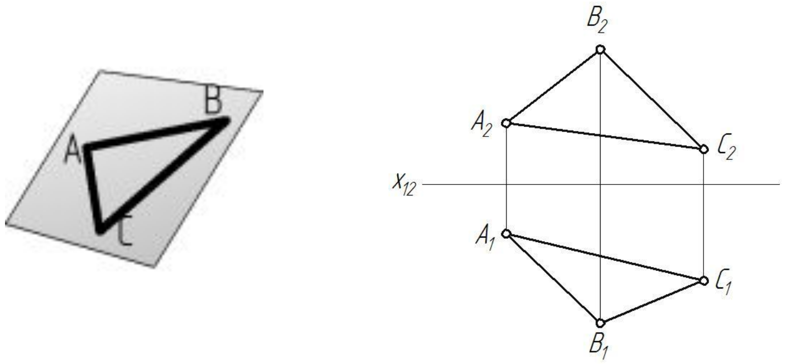
Двумя параллельными прямыми



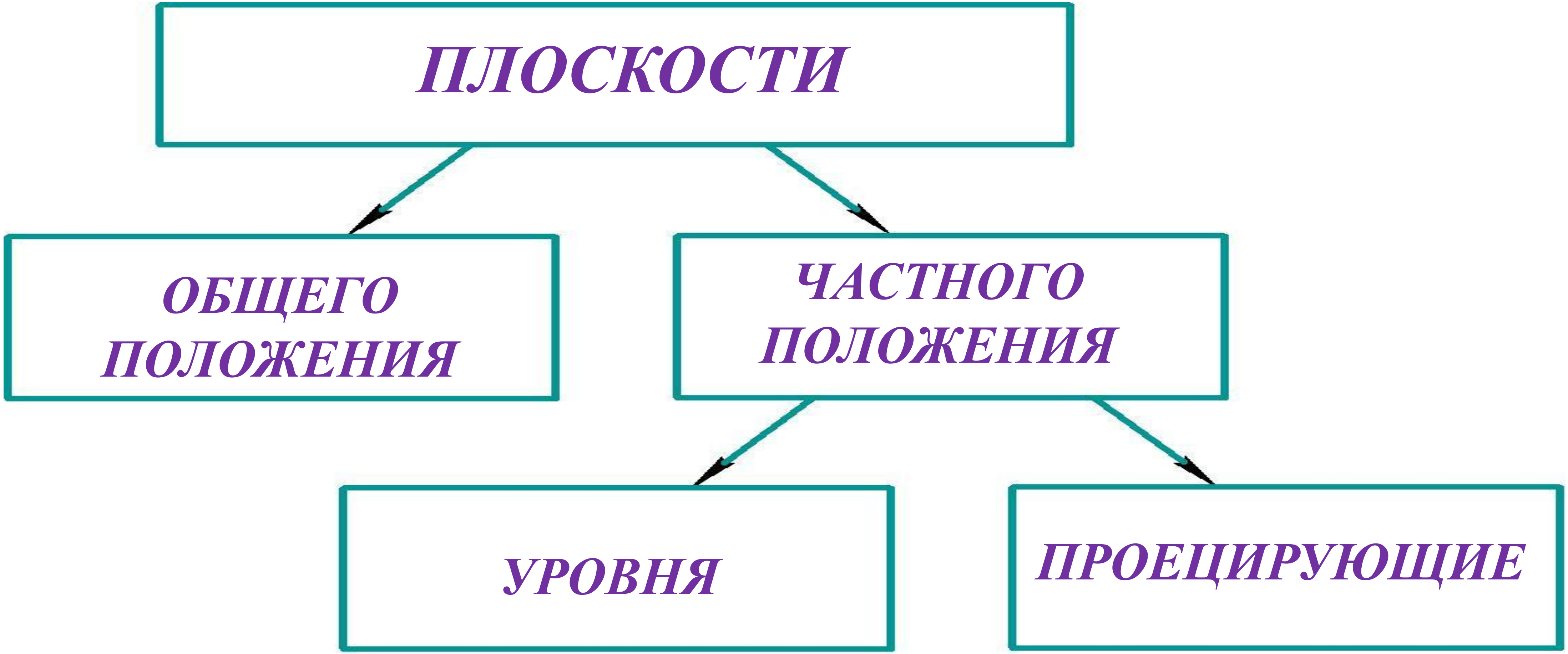
Двумя пересекающимися прямыми



Любой плоской фигурой



Положение плоскости относительно плоскостей проекций

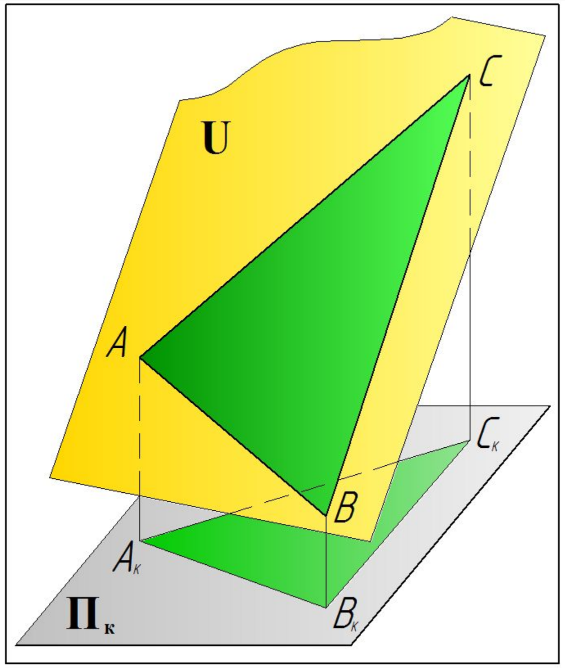


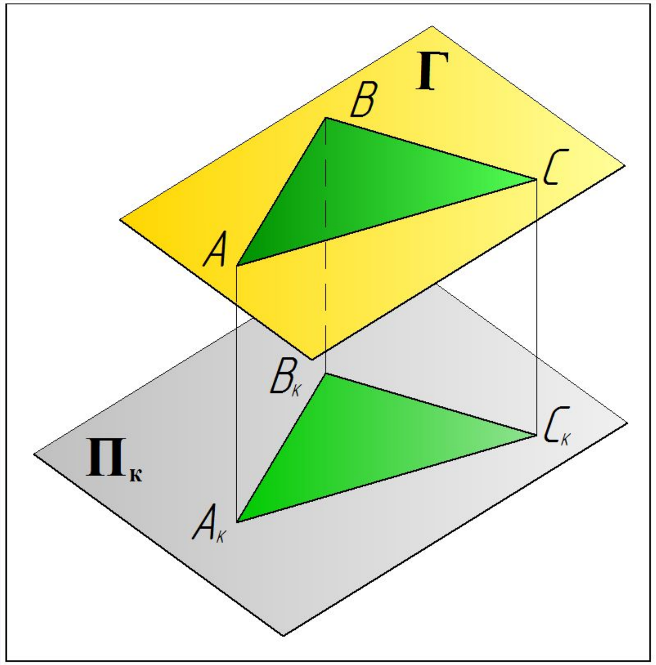
Общее положение

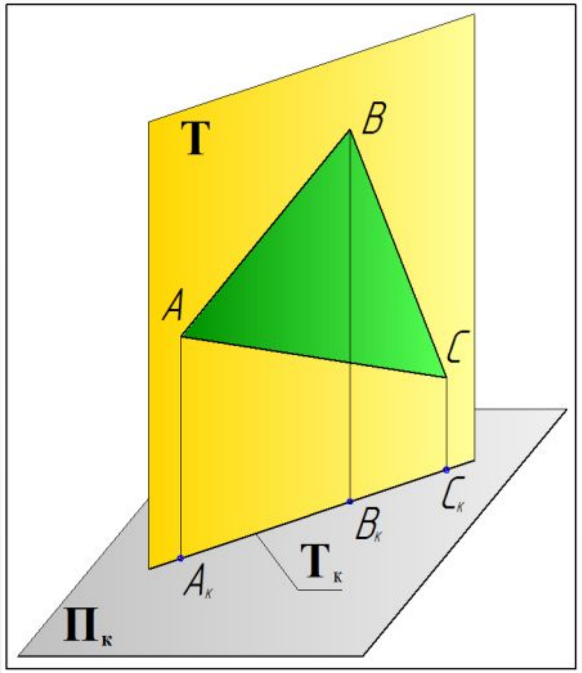
Частное положение

Плоскость уровня

Проецирующая плоскость







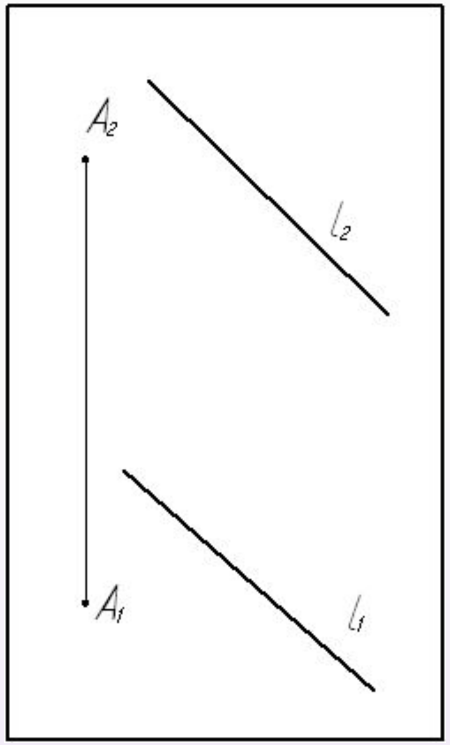
$U \nparallel П_к \wedge U \not\perp П_к$

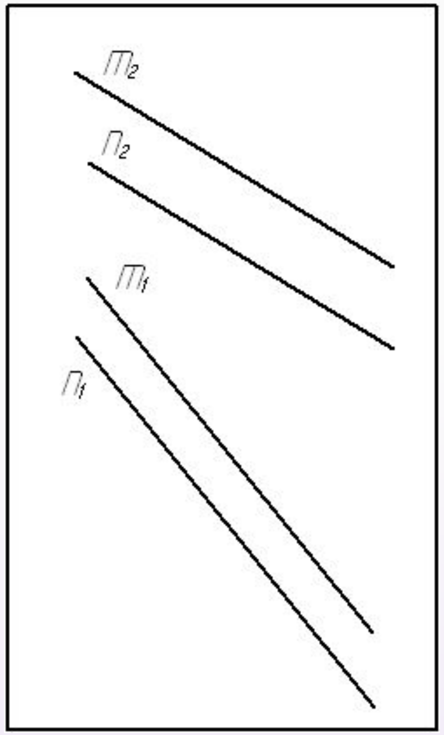
$Г \parallel П_к$

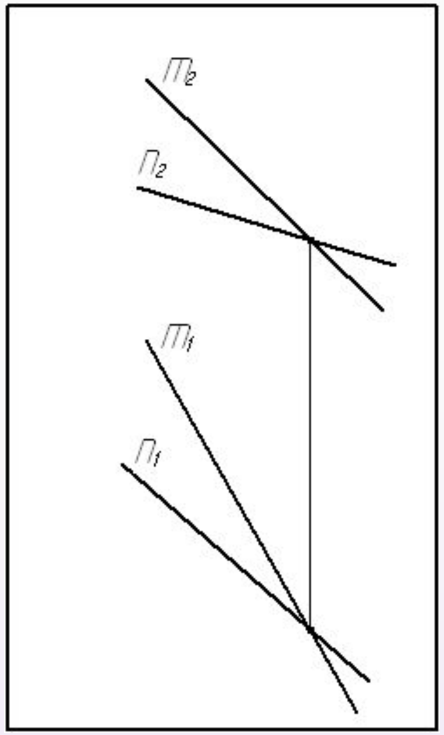
$T \perp П_к$

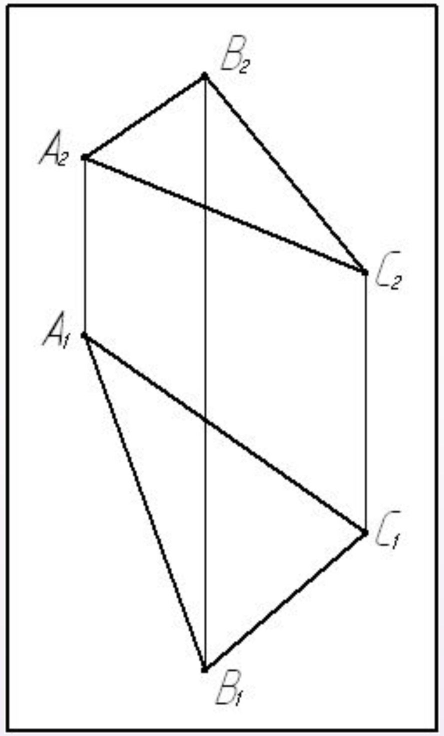
Плоскость общего положения

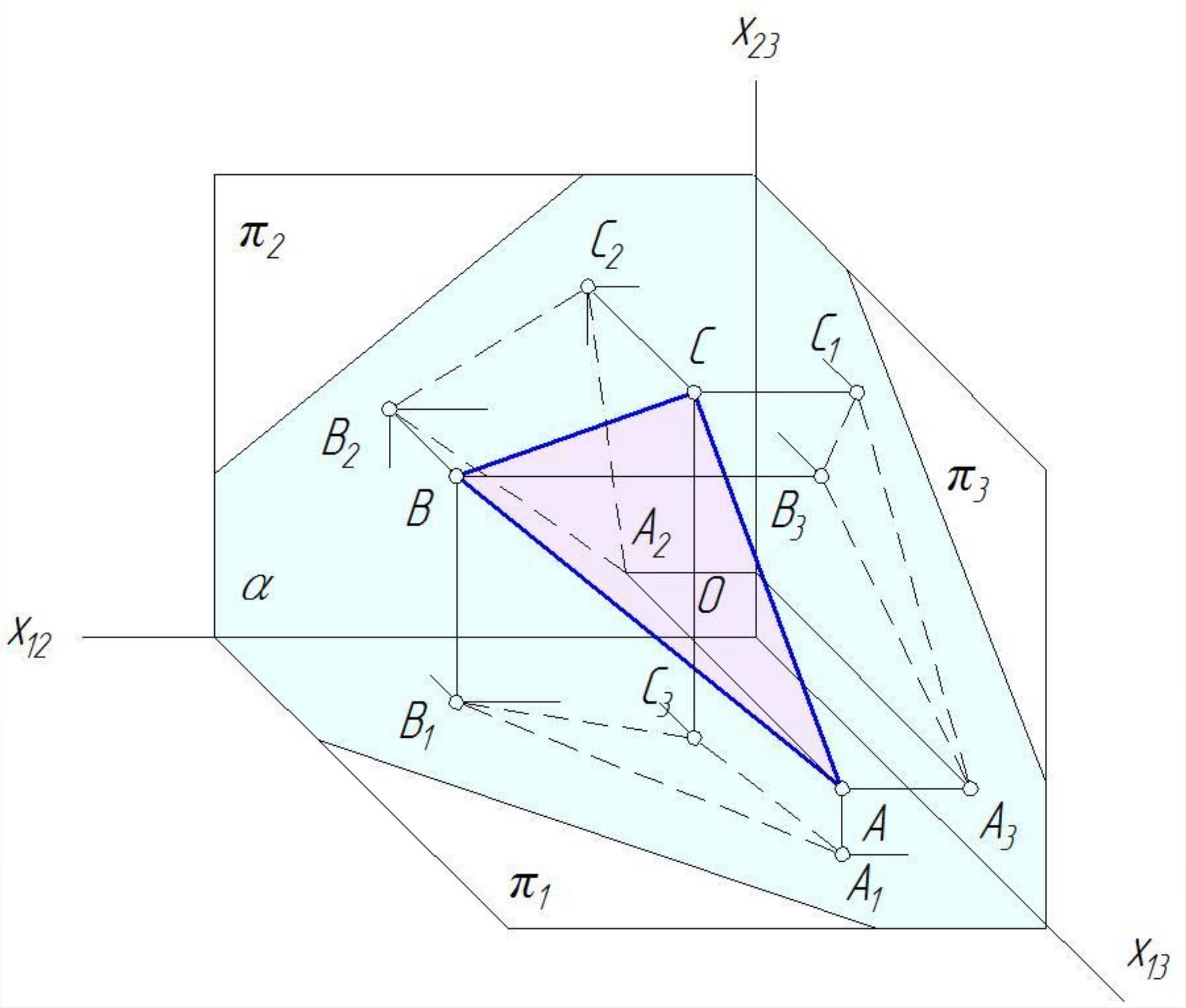
Плоскость непараллельная и неперпендикулярная плоскостям проекций

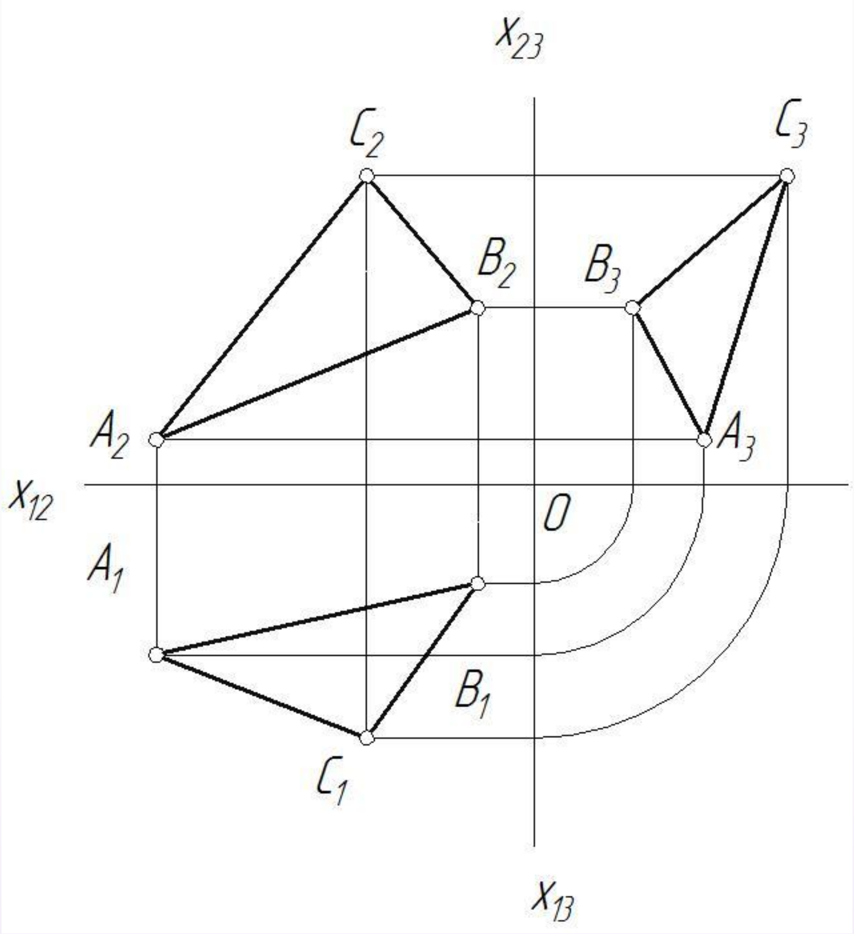












НИ ОДНА ИЗ ПРОЕКЦИЙ ПЛОСКОСТИ НЕ ИМЕЕТ ФОРМУ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Плоскости частного положения

Это плоскости параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций

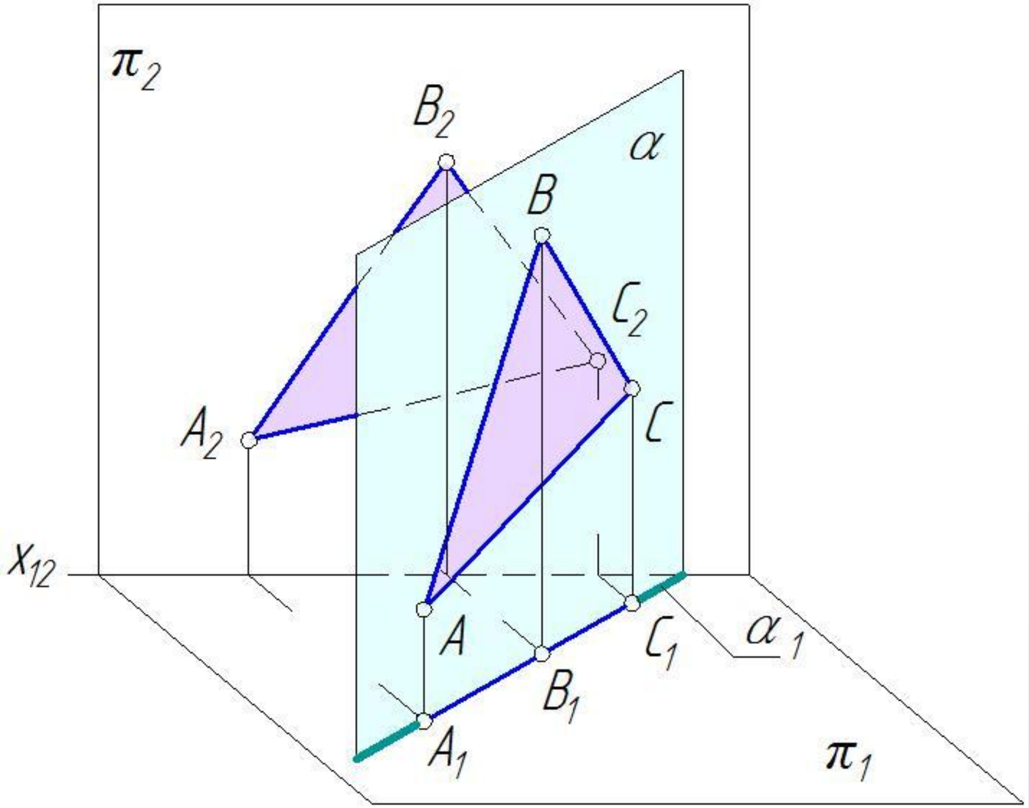
$\alpha \parallel \pi_n$ или $\beta \perp \pi_n$

Проецирующие плоскости

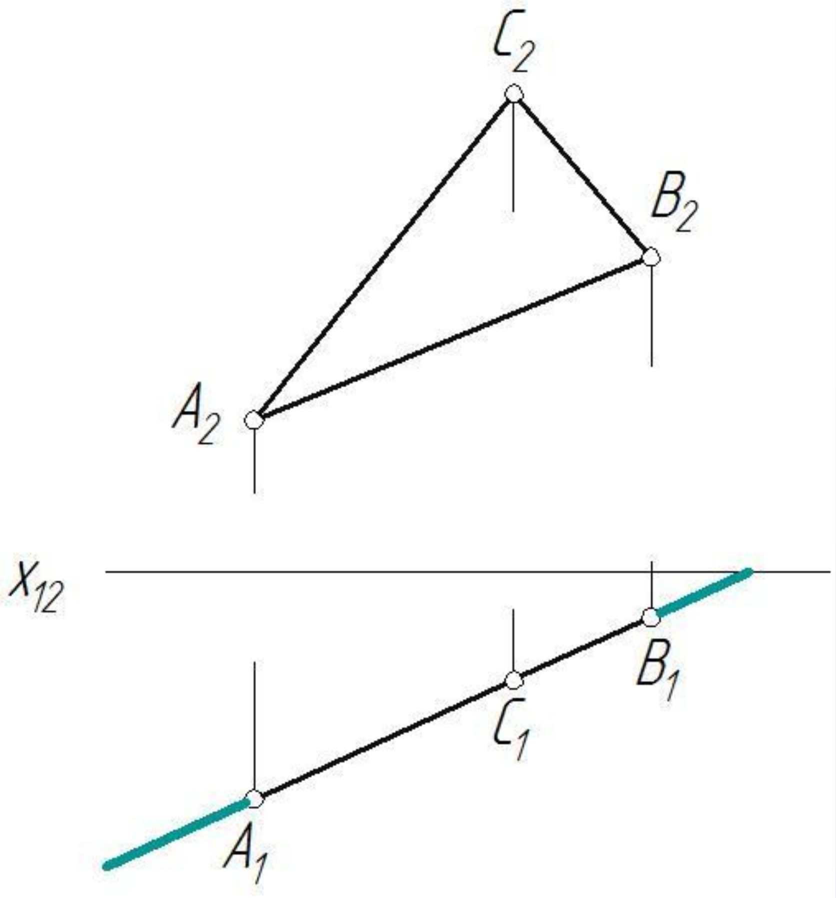
Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

Горизонтально-проецирующая плоскость

$\alpha \perp \pi_1$

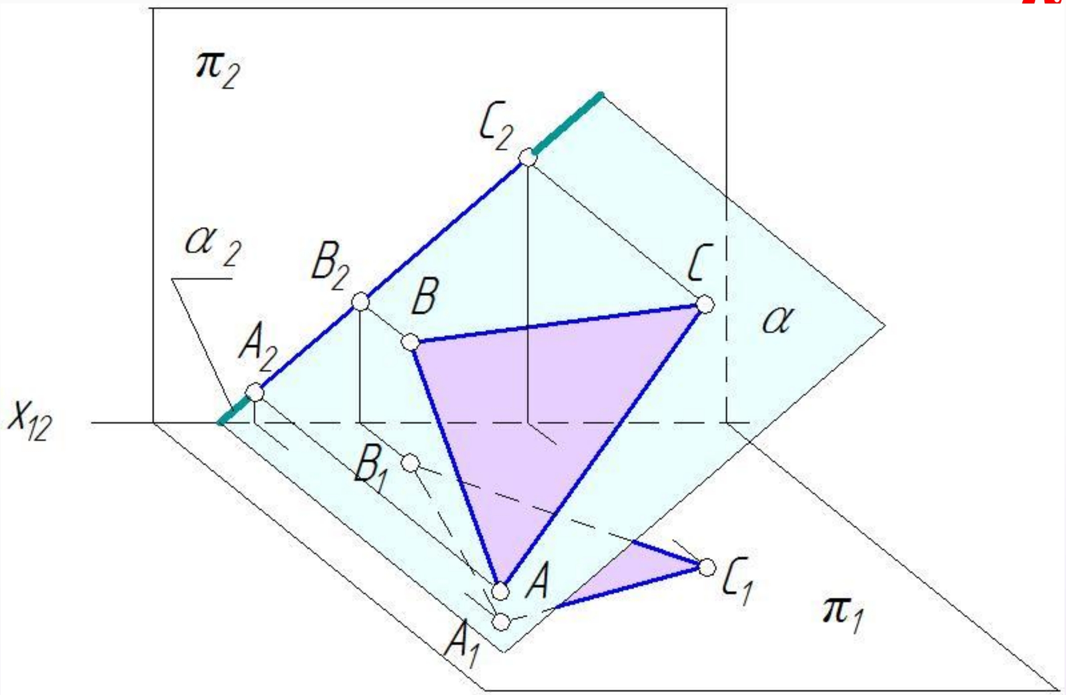


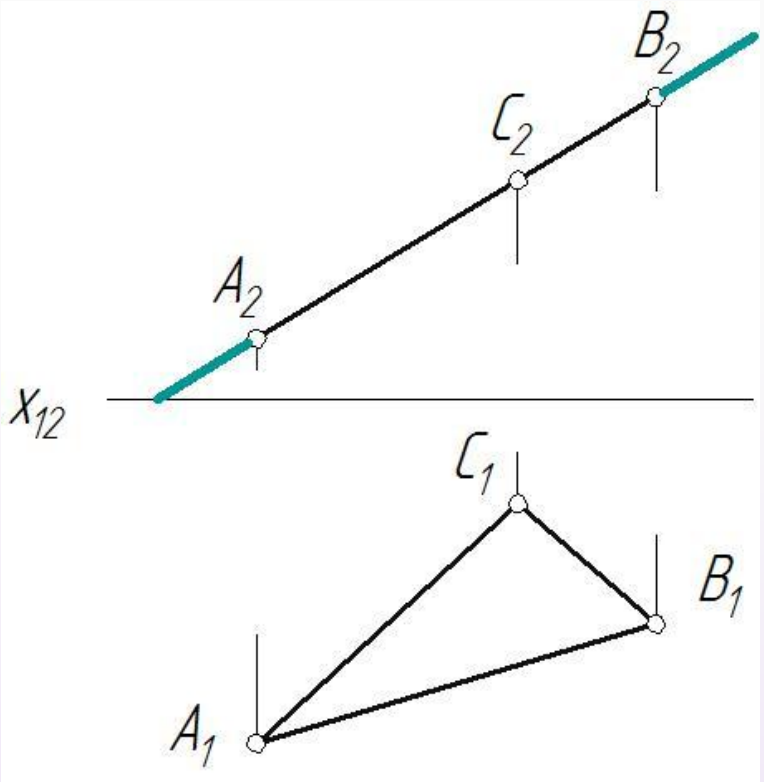
α_1 – прямая



Фронтально-проецирующая плоскость

$\alpha \perp \pi_2$



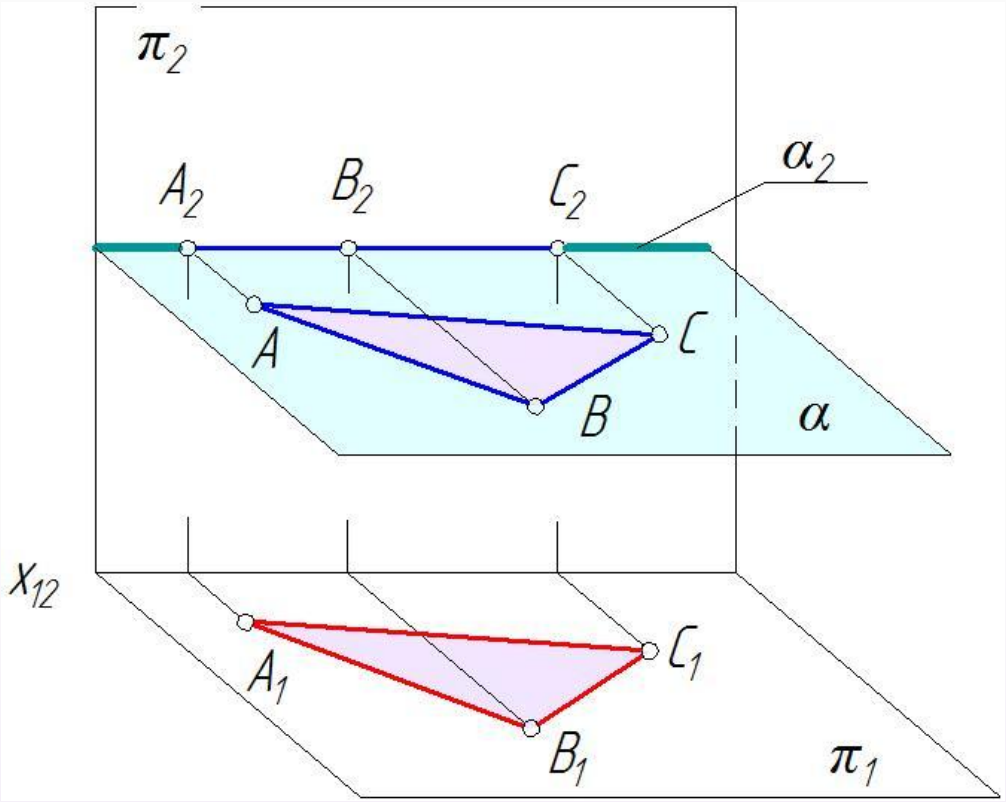


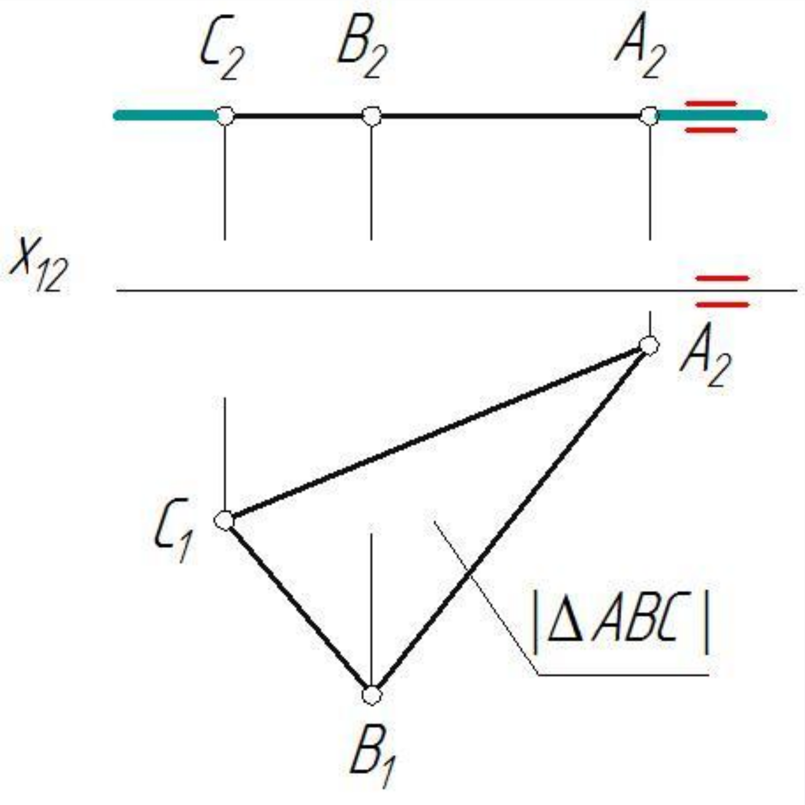
α_2 – прямая

Плоскости уровня

Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Горизонтальная плоскость



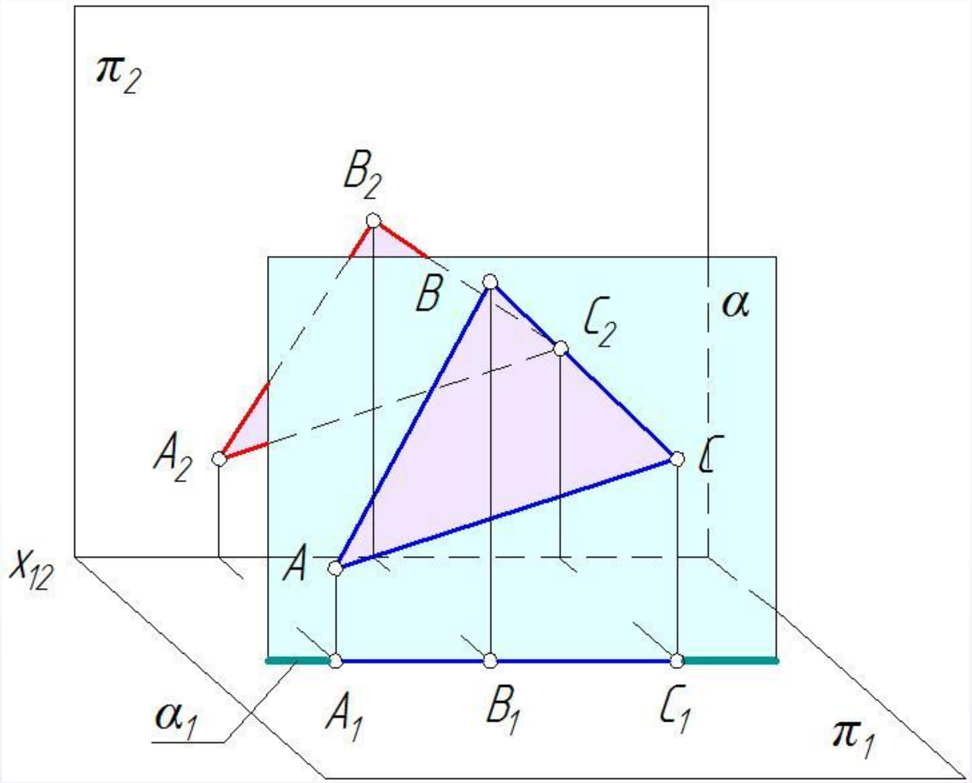


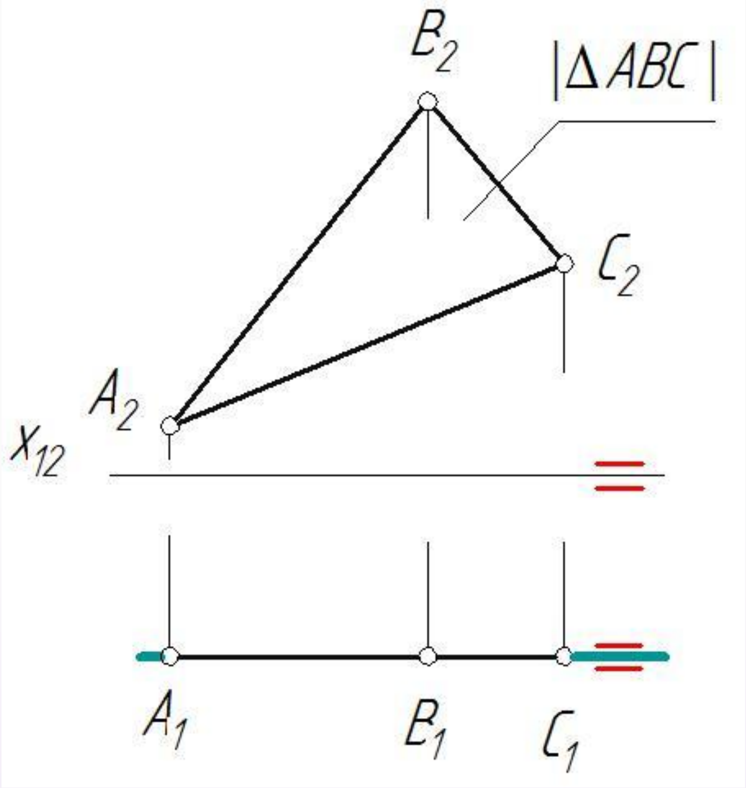
α_2 – прямая

$\alpha_2 \parallel x_{12}$

$\Delta ABC \subset \alpha \Rightarrow \Delta ABC \parallel \pi_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong ABC$

Фронтальная плоскость





α_1 – прямая

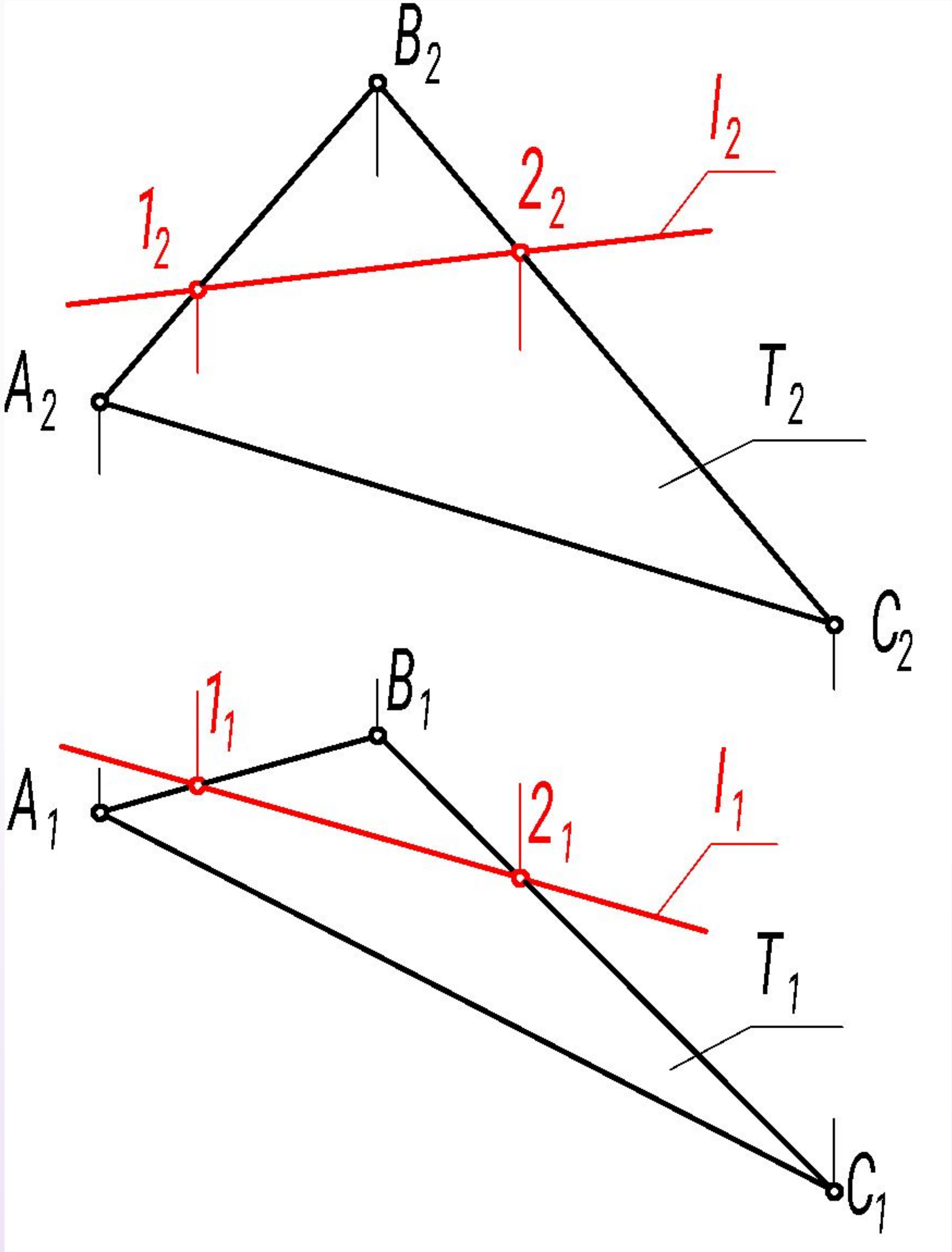
$\alpha_1 \parallel x_{12}$

$\Delta ABC \subset \alpha \Rightarrow \Delta ABC \parallel \pi_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong ABC$

Положение 9

У плоскости частного положения одна из проекций обязательно имеет форму прямой линии.

Прямая линия
в плоскости



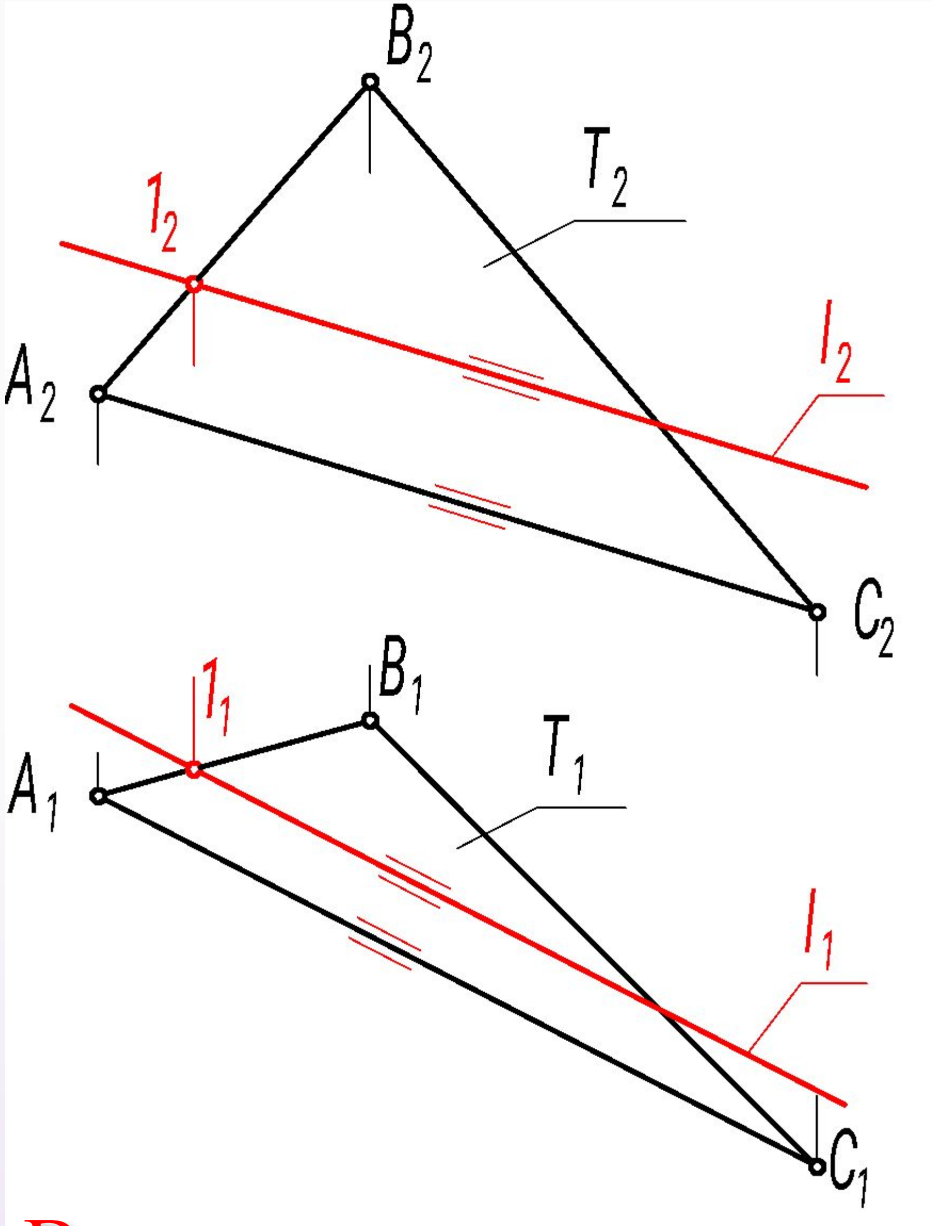
Положение 10. Прямая принадлежит плоскости, если две точки этой прямой лежат в плоскости.

Дано: $\boldsymbol{T}$ (ΔABC).

Построить: $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$.

$(1 \in AB) \wedge (2 \in BC)$

$\boldsymbol{l}\,(1,2) \subset \boldsymbol{T} \Leftrightarrow (1 \in \boldsymbol{T}) \wedge (2 \in \boldsymbol{T})$



Положение 11. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой расположенной в этой плоскости.

Дано: $\boldsymbol{T}$ (ΔABC).

Построить: $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$.

$(1 \in AB) \wedge (2 \in AC;\ 2 \equiv 2^{\infty}) \Rightarrow \boldsymbol{l} \parallel AC$

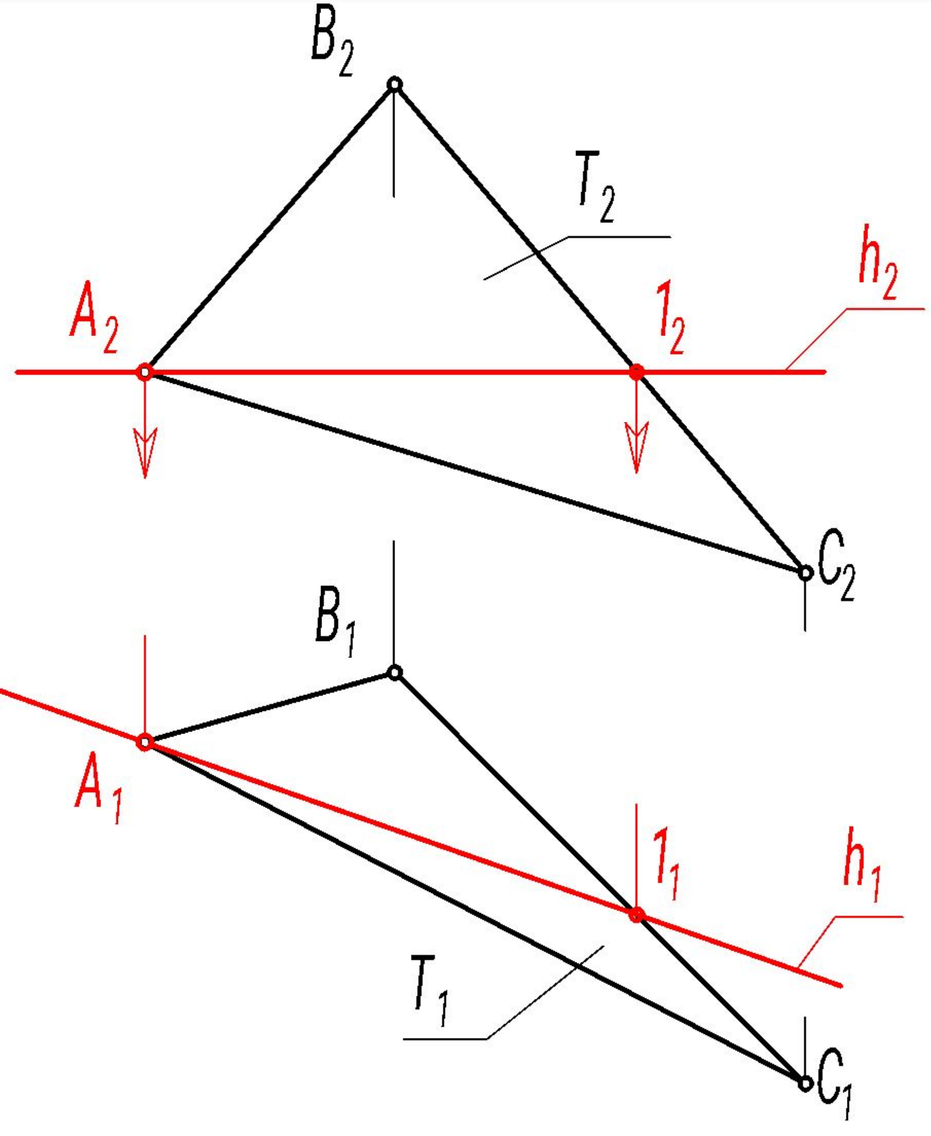
$\boldsymbol{l}\,(1,s) \Rightarrow 1 \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \parallel s$

В качестве направления может быть выбрана любая прямая, принадлежащая плоскости.

Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся *прямые уровня* - горизонталь, фронталь и линии наибольшего наклона плоскости.

Горизонталь плоскости



Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций

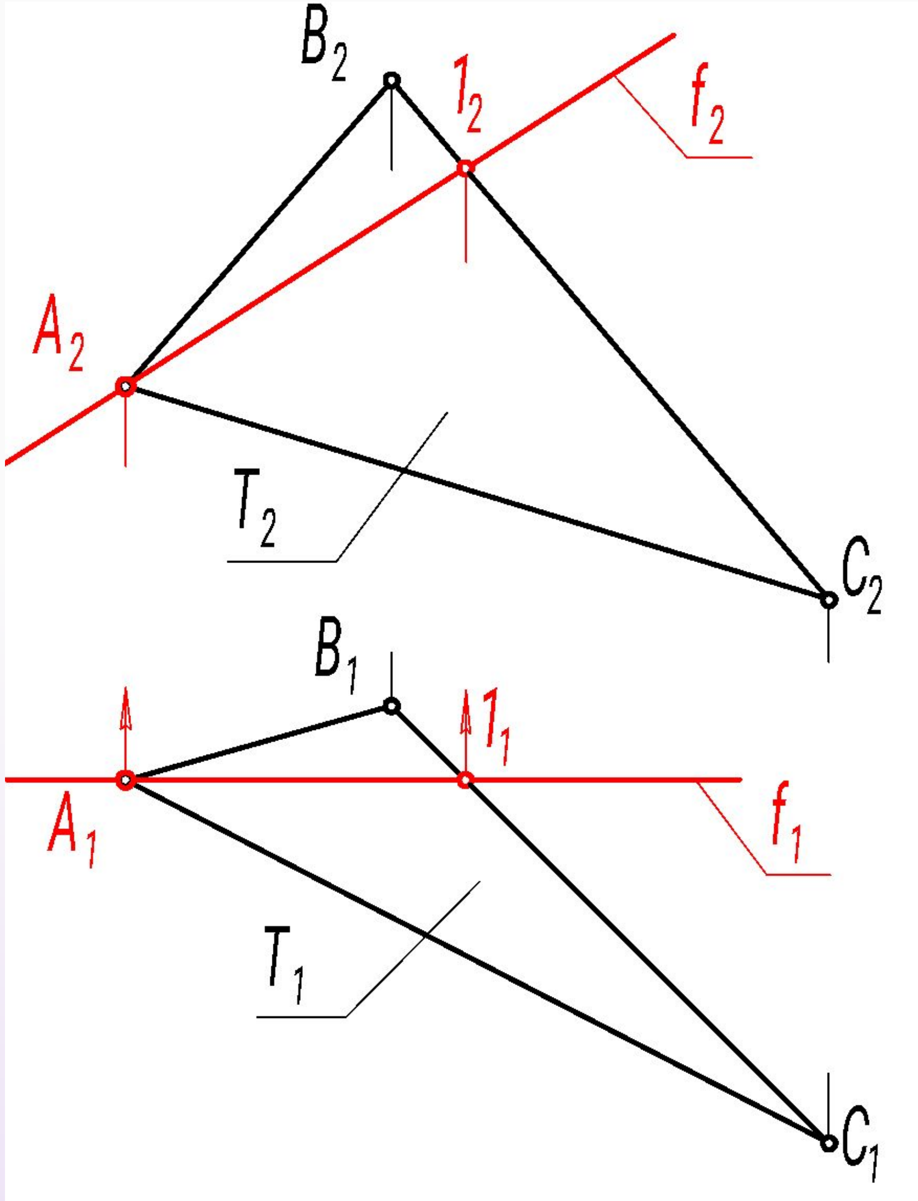
Дано: $\boldsymbol{T}$ (ΔABC).

Построить: $\boldsymbol{h} \subset \boldsymbol{T}$.

$\boldsymbol{h} \parallel \boldsymbol{\Pi_1} \Rightarrow \boldsymbol{h_2} \parallel \boldsymbol{x_{12}}$

$\boldsymbol{h}\ (A,1)$

Фронталь плоскости



Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций

Дано: $\boldsymbol{T}$ (ΔABC).

Построить: $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{T}$.

$\boldsymbol{f} \parallel \boldsymbol{\Pi_2} \Rightarrow \boldsymbol{f_1} \parallel \boldsymbol{x_{12}}$

$\boldsymbol{f}\,(A,1)$

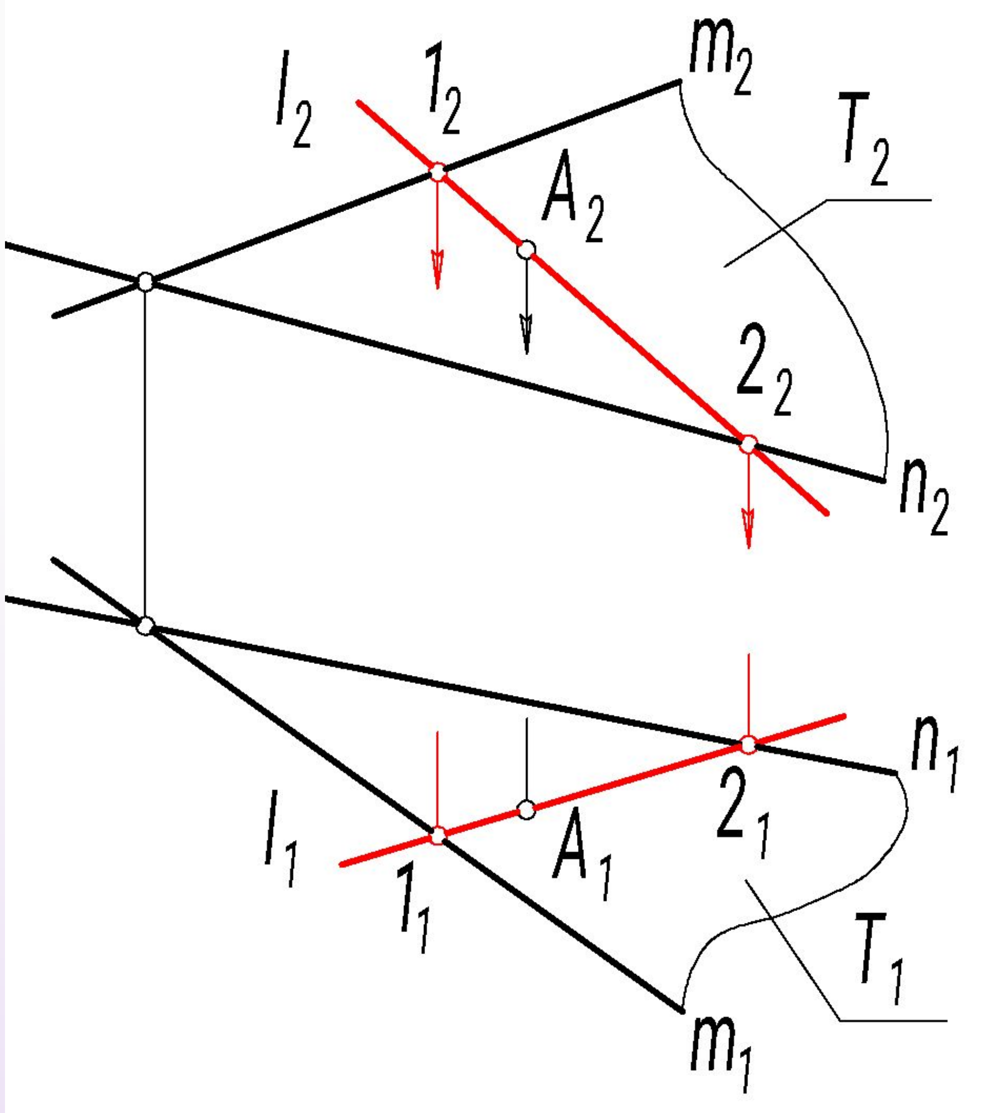
Точка на плоскости

<u>Положение 12.</u> Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости

$$\mathbf{A} \in \gamma \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \boldsymbol{l}, \boldsymbol{l} \subset \gamma$$

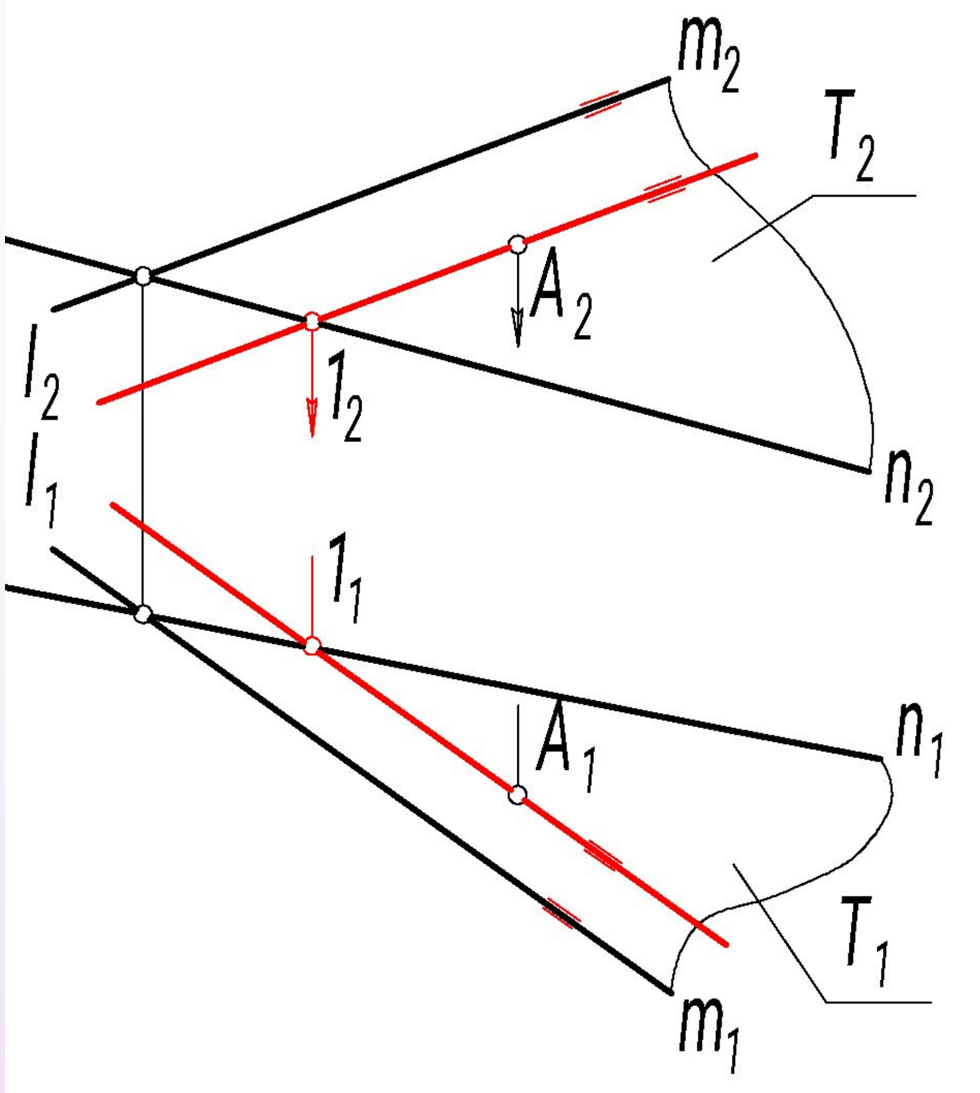
$A \in l\,;\, l\,(1,2) \subset T$

$(1 \in m)\,;\,(2 \in n)$



$A \in l\,;\, l\,(1,s)$

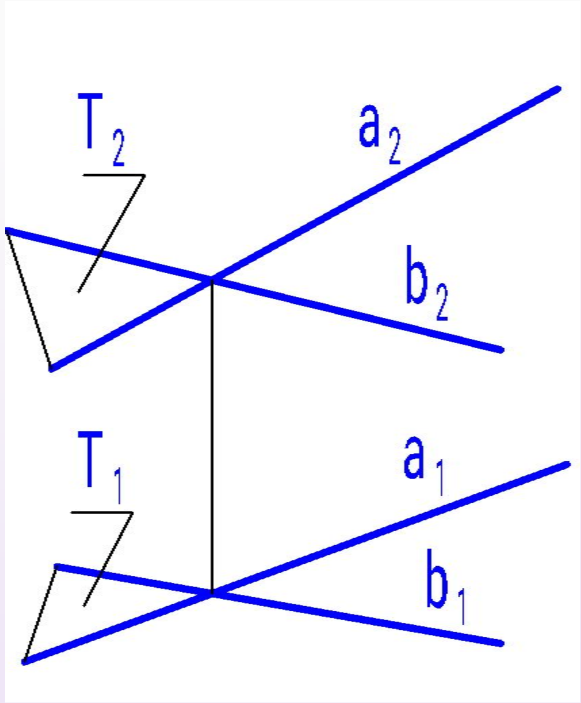
$(1 \in n)\,;\,(l \parallel m)$



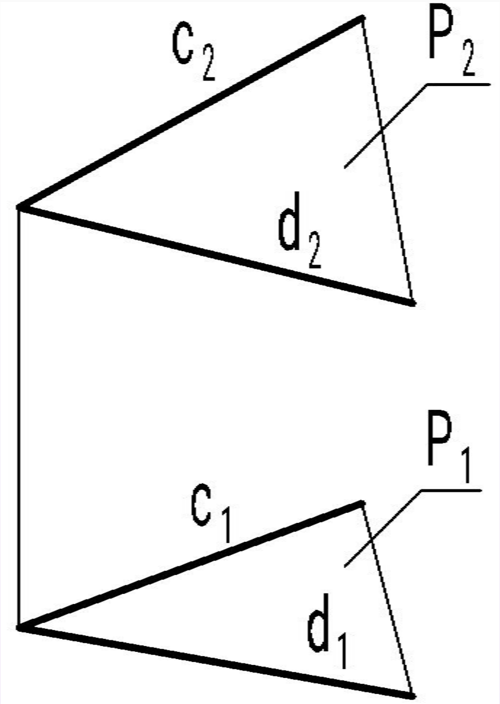
Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

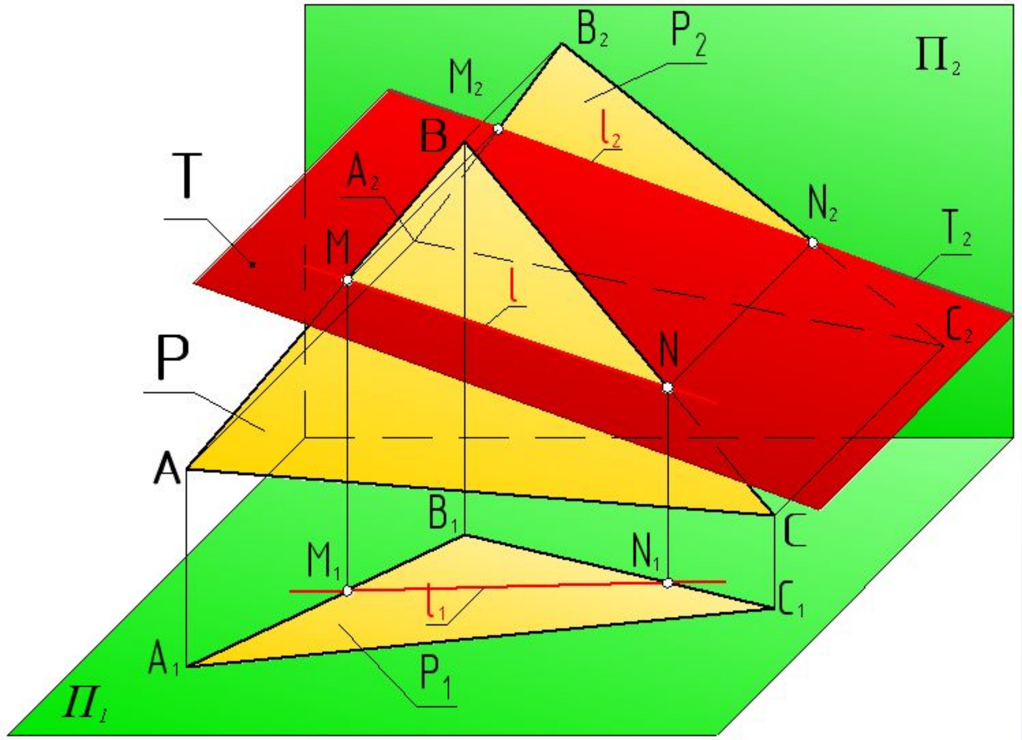


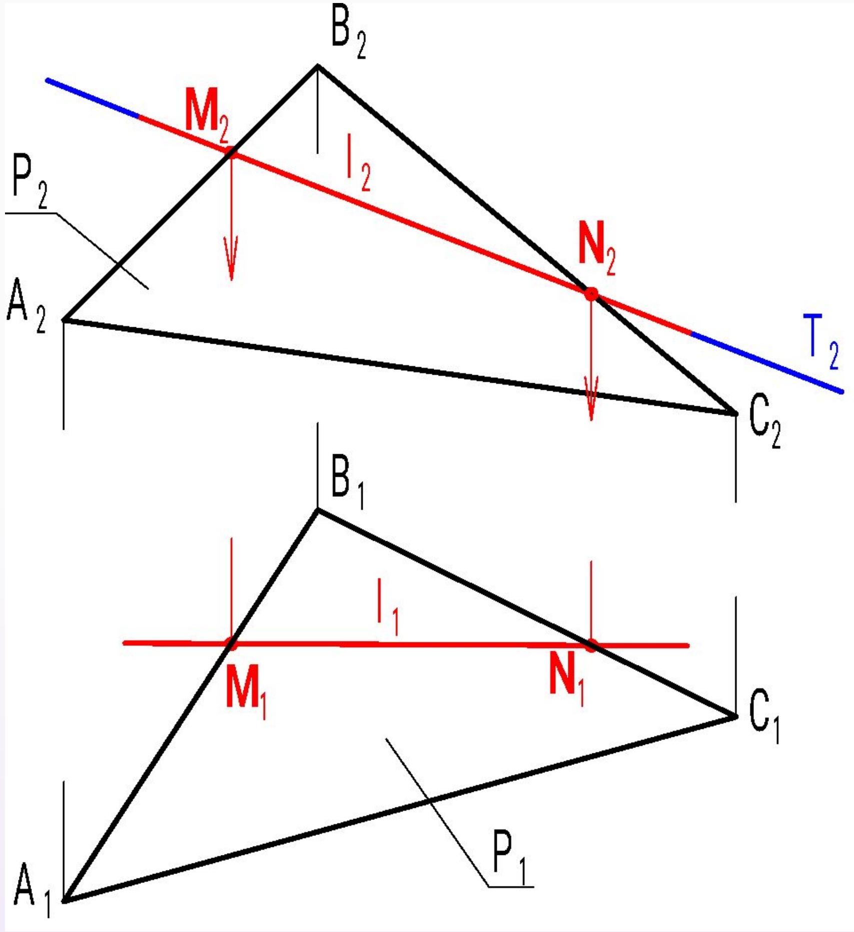
$$T(a \cap b);$$
$$P(c \cap d);$$
$$a \parallel c;\ b \parallel d;$$
$$\Rightarrow T \parallel P$$



<u>Частный случай</u>: одна из двух пересекающихся плоскостей плоскость частного положения – **Т** фронтально-проецирующая.

Пересекающиеся плоскости





$T \cap P(\Delta ABC) = l$

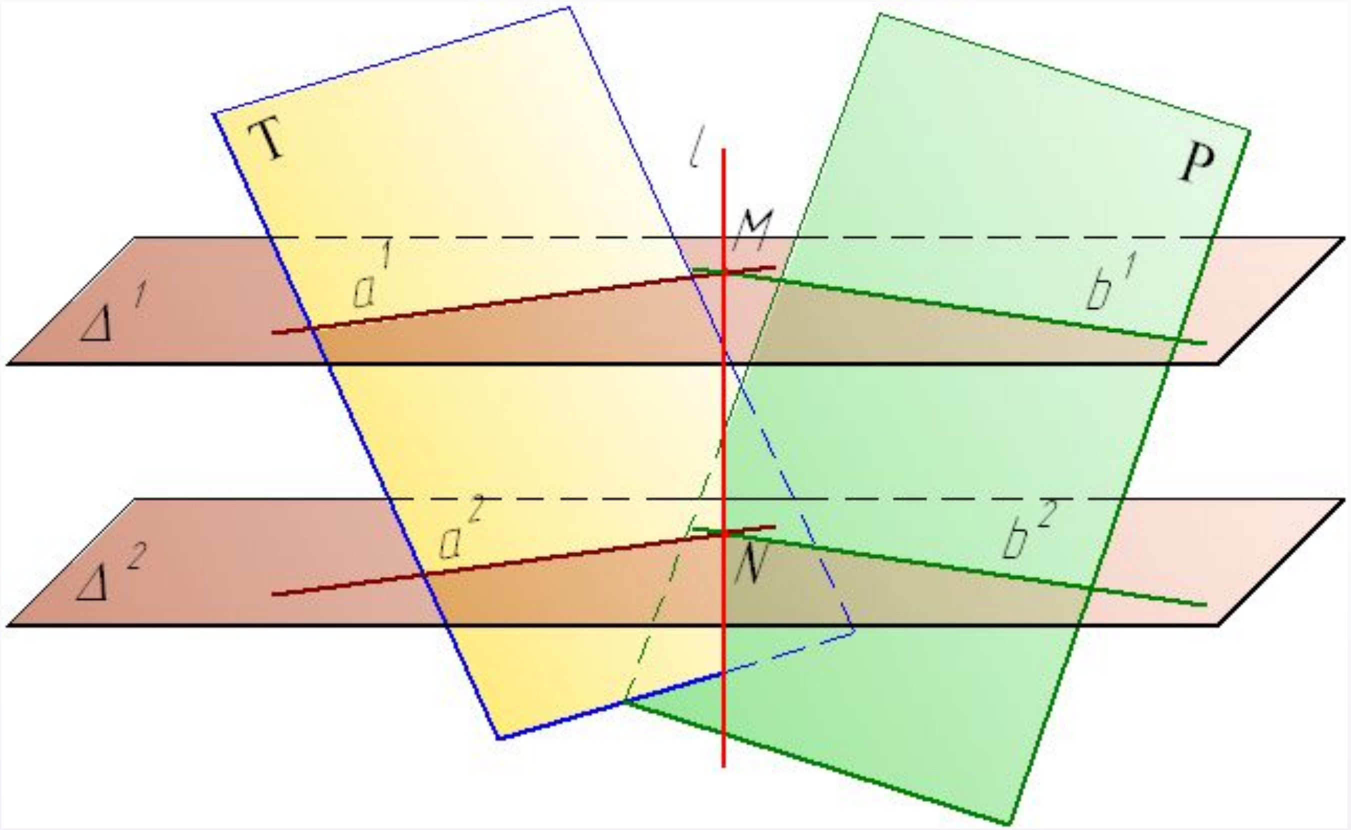
$\Rightarrow l \subset T$ и $l \subset P(\Delta ABC)$

$l(M,N)$

$M = T \cap AB;\ N = T \cap BC$

$T \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2$ – прямая $\Rightarrow (M_2N_2 \equiv T_2)$

<u>Общий случай:</u> Заданы две плоскости **T** и **P** общего положения.



$T \cap P = l(M, N)$

Точки M и N могут быть определены как точки пересечения трех плоскостей

$M = T \cap P \cap \Delta^1$; $N = T \cap P \cap \Delta^2$

Δ^1 и Δ^2 – вспомогательные секущие плоскости - проецирующие.

$\Delta^1 \cap T = a^1$ **и** $\Delta^1 \cap P = b^1 \Rightarrow a^1 \cap b^1 = M$ $\quad$ $\Delta^2 \cap T = a^2$ **и** $\Delta^2 \cap P = b^2 \Rightarrow a^2 \cap b^2 = N$