Лекція 2

Математичний опис мереж зв'язку

Питання лекції 2

1. Морфологічний опис мережі за допомогою графа
2. Морфологічний опис у матричній формі
3. Потокова модель мережі
4. Імовірнісна модель мережі

Морфологічний опис мережі

Формалізація опису мережі необхідна для рішення завдань аналізу та синтезу (проектування)

Опис телекомунікаційної мережі може бути:

- Морфологічний
- Функціональний

Морфологічний опис - це опис складу, конфігурації мережі й взаємозв'язків її елементів

Морфоло́гія (від греч. μορφή «форма» + греч. λογία «наука») у широкому розумінні - наука про форми й будову.

Функціональний опис - це опис процесів функціонування мережі й закономірностей зміни її параметрів

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Основні поняття теорії графів

Граф - математичний інструмент морфологічного опису мережі.

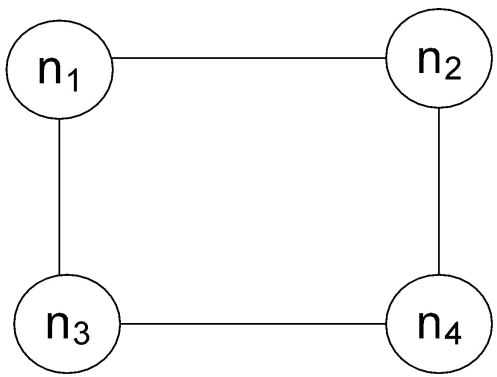
Граф G(N, M) описує структуру мережі, у якій, кількість вершин N відповідає кількості комутаційних центрів (КЦ), а ребра M - гілкам/лініям/каналам зв'язку, що з'єднує КЦ

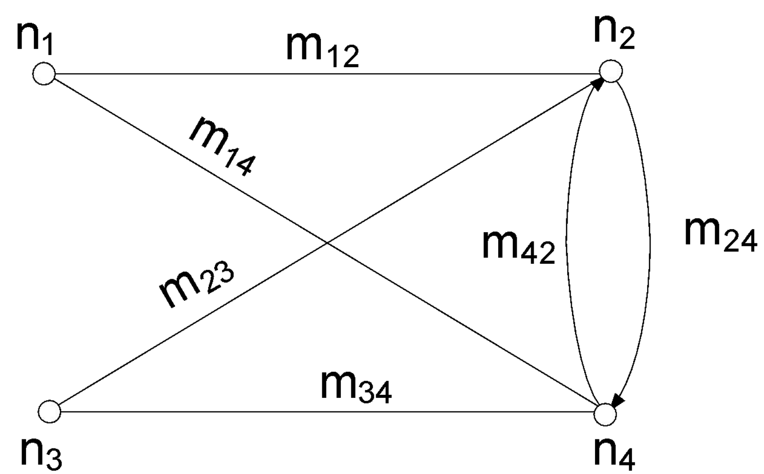
Граф називається **позначеним**, якщо його вершини й ребра мають ідентифікаційні написи

Граф називають **орієнтованим,** якщо в ньому є орієнтовані ребра

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

- Вершини n_i й n_j **суміжні**, якщо існує ребро m_{ij}
  Ребро m_{ij} є інцендентним (прилягаючим) для вершин n_i й n_j





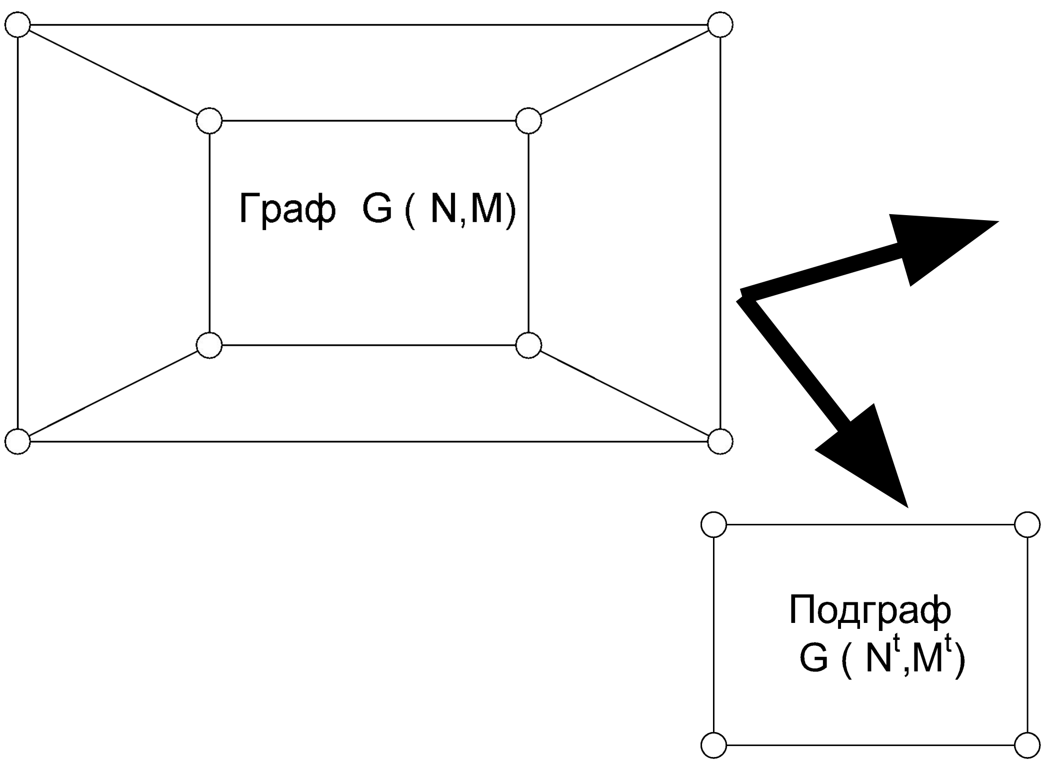
Приклад графа, що відображає структуру 4- вузлової мережі

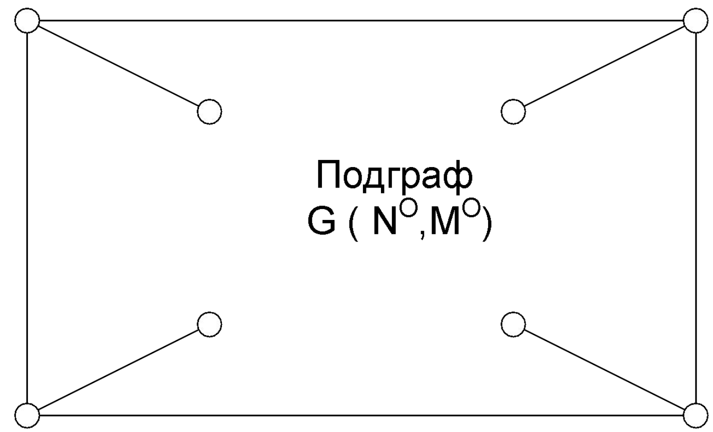
Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Властивість декомпозиції графа

Будь-який граф G (N, M) можна розбити на два підграфа G (N^0, M^0) і G (N^T, M^T):

G (N, M) = G (N^0, M^0) U G (N^T, M^T)





Підграф G (N^0, M^0) відповідає мережі кінцевих КЦ

Підграф G (N^T, M^T) відповідає мережі транзитних КЦ

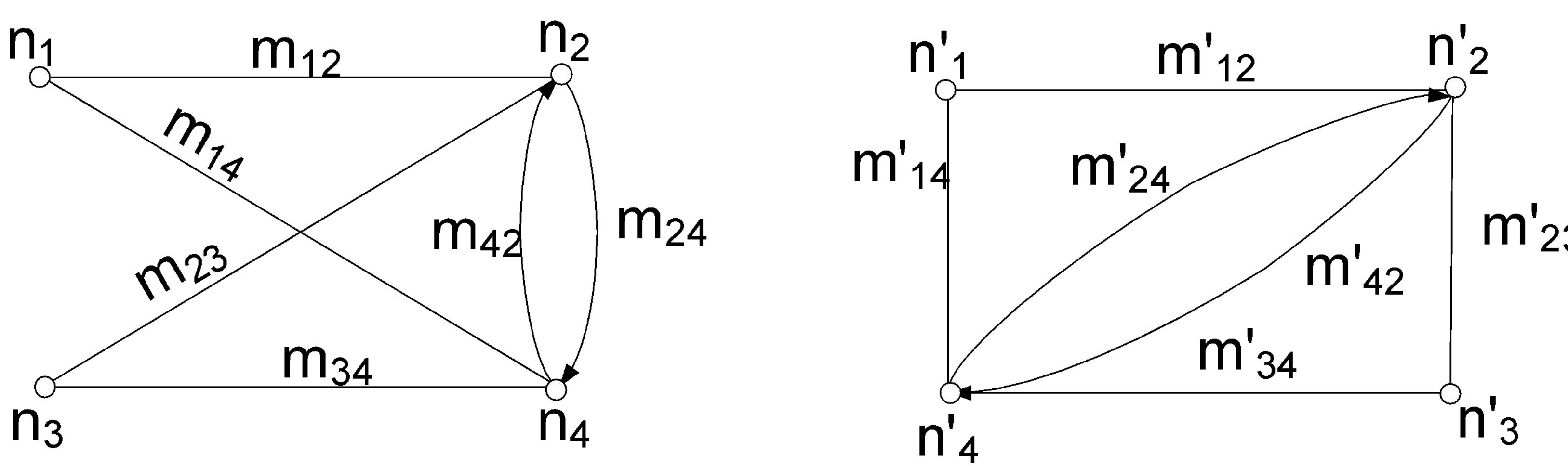
Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Ізоморфізм (от греч. ísos — рівний, однаковий, подібний і морфо- форма).

Загальне поняття ізоморфізму означає наявність подібності в різних об'єктів.

Два графа G (N, M) и G’ (N’, M’) називаються **<u>ізоморфними</u>**, якщо між множинами їхніх вершин і ребер можна існує однозначна відповідність вершин $\{n_i\}$ Ы $\{n'_i\}$ і ребер $\{m_{ij}\}$ Ы $\{m'_{ij}\}$

Приклад ізоморфних графів



Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Маршрут (шлях)

Маршрутом μ у графі називається послідовність, у якій чередуються вершини і ребра

- Послідовність починається й закінчується вершиною
- Кожне ребро послідовності інциндентне двом вершинам

$$\mu = n_1 \text{ U } n_2 \text{ U } n_3 \text{ U}\ldots\text{U } n_{k-1} \text{ U } n_k, \text{ де } n_k \text{O N}$$

Маршрути або шляхи в графі звичайно визначаються для виділених напрямків зв'язку (між будь-якою парою вершин)

Маршрути (шляхи) бувають:

- Незалежні - це маршрути, які не мають спільних ребер (гілок)

$$n_i\ (\mu\ _1)\ \Pi\ \text{N}\ (\mu\ _2) \text{ и } n_i\ (\mu\ _2)\ \Pi\ \text{N}\ (\mu\ _1)$$

$$\text{N}\ (\mu\ _1)/\ \text{N}\ (\mu\ _2) = \text{Ж}$$

- Залежні - маршрути із спільнимии ребрами (гілками)

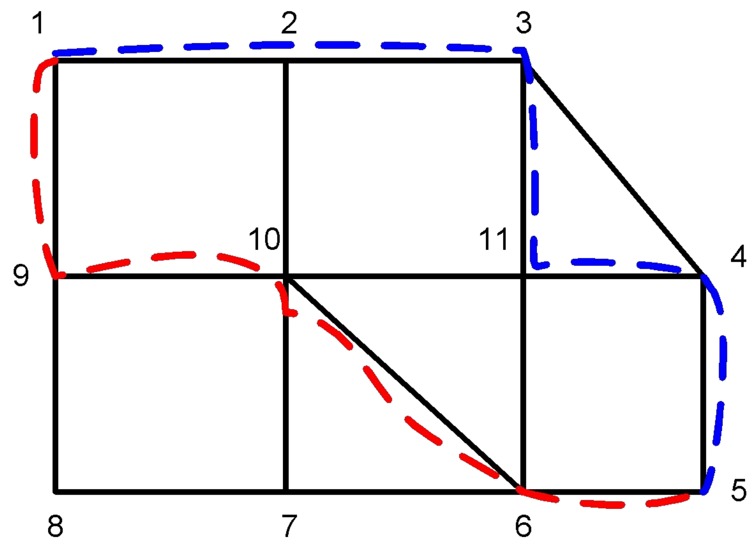
$$\text{N}\ (\mu\ _1)/\ \text{N}\ (\mu\ _2) = \text{N}\ (\mu\ _2)^*\ \text{N}\ (\mu\ _1) = \text{Ж}$$

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Приклад незалежних маршрутів у мережі в напрямку 1-5

$N(\mu_1) = \{1, 2, 3, 11, 4, 5\}$

$N(\mu_2) = \{1, 9, 10, 6, 5\}$



Довжина шляху в графі - кількість вхідних у нього ребер

$$D(\mu_1) = 5 \; ; \; D(\mu_2) = 4$$

Найкоротший шлях між двома вершинами - це мінімальна відстань між цими вершинами, що виражена в кількості ребер

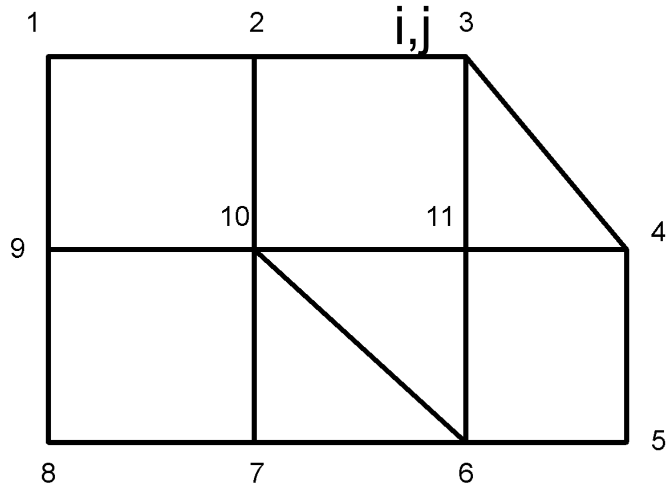
$$\min \mu \,(1 - 5) = 4$$

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Діаметром графа D називається мінімальна відстань між найбільш віддаленими вершинами

D= min max (i,j)

i,j



Діаметр графа: D = 4

Кожна вершина графа n_i має степінь Deg n_i .

Deg n_i – це число рівне числу інцидентних ребер

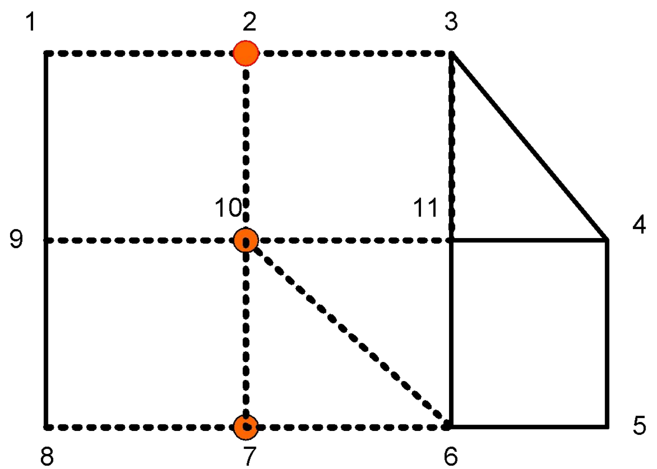
Напрмклад. Deg 7 = 3; Deg 6 = 4; Deg 1= 2

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Переріз графа G (N, M) по вершинах n_i являє собою множину вершин $\{n_i\}$, видалення яких приводить до утворення незв'язаних підграфів.

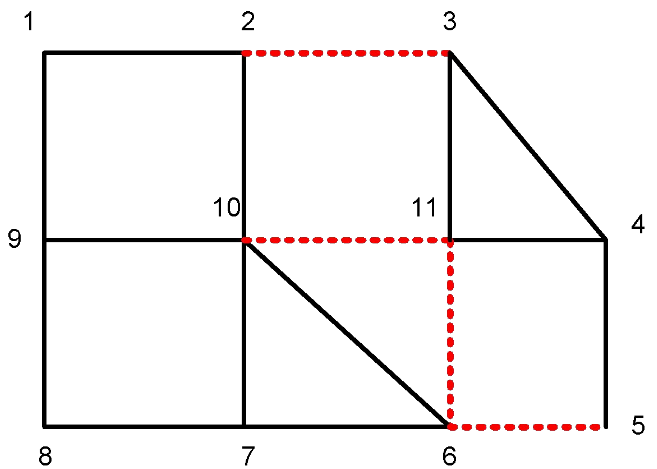
Переріз графа G (N, M) по ребрах m_{ij} (або реберний переріз) являє собою множину ребер $\{m_{ij}\}$, видалення яких приводить до утворення незв'язаних підграфів.

Переріз графа G по вершинах: {2,10,7}



Підграфи: G^1(1,9,8) и G^2 (3,4,5,6,11,)

Переріз графа G по ребрам: $\{m_{23}, m_{10,11}, m_{11,6}, m_{65}\}$



Підграфи: G^1(1,2,9,10,7,8,6) и G^2 (3,4,5,11,)

Морфологічний опис у матричній формі

Для аналітичних досліджень застосовується матрична форма опису структури мережі.

Основні типи матриць

- Суміжності || A||
- Потужностей ||V|| (N*N)
- Інциденцій ||B||

Матриці ||A|| і ||V|| мають розмірність (N*N), де N – число вузлів (вершин)

$$A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{Nj} & & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} v_{21} & v_{12} & \dots & v_{1j} & \dots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2j} & \dots & v_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{ij} & \dots & v_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{N1} & v_{N2} & & v_{Nj} & & v_{NN} \end{vmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\text{, якщо КЦ i та КЦ j з'єднані ребром} \\ 0\text{, якщо КЦ i і КЦ j не з'єднані ребром} \end{cases}$$

v_{ij} – параметр лінії зв'язку на гілці m_{ij} (кількість каналів)

Морфологічний опис у матричній формі

- Якщо ij = ji, то матриці ||A|| та ||V|| можна представити в трикутній формі (включені тільки наддіагональні елементи)

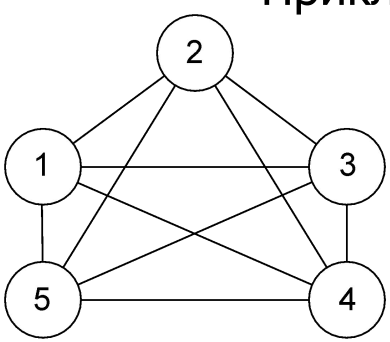
A =

a_{21}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1N}
	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2N}
		…	…	…	…
			a_{ij}	…	a_{iN}
				…	…
					a_{NN}

V=

v_{21}	v_{12}	…	v_{1j}	…	v_{1N}
	v_{22}	…	v_{2j}	…	v_{2N}
		…	…	…	…
			v_{ij}	…	v_{iN}
				…	…
					v_{NN}

Приклад опису 5 вузлової мережі



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2		0	1	1	1
3			0	1	1
4				0	1
5					0

Морфологічний опис у матричній формі

- Матриця інцендентності ||B|| - це матриця розмірністю N*M, у якій

$$||B|| = \{b_{ij}\},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1\text{ , якщо ребро } m_{ij} \text{ інцендентне вершині } n_i} \\ \mathbf{0\text{ , якщо ребро } m_{ij} \text{ не інцендентне вершині } n_i} \end{cases}$$

Між матрицями суміжності та інцендентності існує взаємна відповідність

$$A = B^T B - 2*I,$$

де B^T – транспонована матриця інцендентності,

I – одинична матриця, розмірності M*M

Потокова модель мережі

Для функціонального опису мережі використовуються

- Потокова модель мережі
- Імовірнісна модель мережі

Функціональний опис мережі характеризує основні процеси її функціонування:

- Передача повідомлень
- Розподіл інформації
- Вихід з ладу й відновлення елементів мережі
- Якість обслуговування на галузях і напрямках зв'язку мережі

Потокова модель мережі

- Потокова модель характеризує здатність мережі по передачі повідомлень від джерел інформації до споживачів в умовах нормального її функціонування

Процес передачі повідомлень по мережі можна описати матрицею

$$
C = \left| \begin{array}{cccccc}
C11(t11,p11) & C12(t12,p12) & \ldots & C1j(t1j,p1j) & \ldots & C1n(t1n,p1n) \\
 & C22(t22,p22) & \ldots & C2j(t2j,p2j) & \ldots & C2n(t2n,p2n) \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & Cij(tij,pij) & \ldots & Cin(tin,pin) \\
 & & & & \ldots & \ldots \\
 & & & & & Cnn(tnn,pnn)
\end{array} \right|
$$

де $\mathbf{C_{ij}(t_{ij},p_{ij})}$ **–** кількість повідомлень, обслужених на гілці mij за час tij при дотриманні імовірнісно-часового параметра pij

$C_{ij}(t_{ij},p_{ij}) = 0$ при $a_{ij} = 0$ (за умови відсутності гілки mij)

Потокова модель мережі

Середня кількість одночасно функціонуючих повідомлень у мережі можна розрахувати у вигляді

$$C_ф = \sum\sum C_{ij}(t_{ij},p_{ij})$$

Середня кількість повідомлень одночасно переданих у напрямку зв'язку можна також розрахувати як суму переданих повідомлень по всіх галузях, що входить в усі шляхи даного напрямку

$$Cн = \sum\sum См(tij,pij)$$

Вероятностная модель сети

У будь-який довільний момент часу t канал галузі mij може могти

- Вільний/ Зайнятий

Для сталого режиму роботи мережі знаходження кожної гілки mij у зайнятому стані можна описати матрицею

Матрица вероятностей отказа в обслуживании

$$
P = \begin{vmatrix}
p_{m11}(t) & p_{m12}(t) & \ldots & p_{m1j}(t) & \ldots & p_{m1n}(t) \\
 & p_{m22}(t) & \ldots & p_{m2j1}(t) & \ldots & p_{m2n}(t) \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & p_{mij}(t) & \ldots & p_{min}(t) \\
 & & & & \ldots & \ldots \\
 & & & & & p_{mnn}(t)
\end{vmatrix}
$$

де $p_{mij}(t)$ – імовірність відмови в обслуговуванні на гілції mij у довільний момент часу t

Вероятностная модель сети

- Оцінити ймовірність обслуговування повідомлення в напрямку зв'язку можна за допомогою формули.

  якщо μ=1 (одному шляхи встановлення з'єднання)

$$q = \prod_{ij} (1 - p_{ij})$$

$$p = 1 - q = 1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij})$$

  якщо μ=k>1 (при k шляхів встановлення з'єднання)

$$Q = 1 - \prod_{k} \Big(1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij})\Big)$$

$$P = \prod_{k} \Big(1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij})\Big)$$

Вероятностная модель сети

- Надійність мережі може бути описана у вигляді матриці

Матрица вероятностей безотказной работы

$$
R= \begin{vmatrix}
r_{m11}(t) & r_{m12}(t) & \ldots & r_{m1j}(t) & \ldots & r_{m1n}(t) \\
 & r_{m22}(t) & \ldots & r_{m2j1}(t) & \ldots & r_{m2n}(t) \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & r_{mij}(t) & \ldots & r_{min}(t) \\
 & & & & \ldots & \ldots \\
 & & & & & r_{mnn}(t)
\end{vmatrix}
$$

де $r_{m_{ij}}(t)$ – імовірність безвідмовної роботи галузі mij у довільний момент часу t

Литература

- Романов А. И. Телекоммуникационные сети и управление: Учебное пособие –К. ИПЦ « Киевский университет», 2003, -247с.
- Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л. Теория распределения информации – М.: Радио и связь, 1985
- Сети ЭВМ. Под редакцией В.М. Глушкова – М.: Связь, 1977
- Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем – М. : Наука, 1978
- Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания – М.: Наука, 1966
- Клейнрок Л. Коммутационные сети – М.: Наука, 1970
- Шварц М. Сети ЭВМ. Анализ и проектирование - М.: Радио и связь, 1981
- Советов Б.Я. и др. Построение сетей интегрального обслуживания – Л.: Машиностроение, Лен отд-е, 1990
- Клейнрок Л. Вычислительные сети с очередями – М.: Мир, 1979
- Хилс М.Т. Принципы коммутации в электросвязи - М.: Радио и связь, 1984
- Френк Г. , Фриш И. Сети, связь и потоки – М.: Связь, 1978

Спасибо за внимание!