Теоретическое обоснование положений начертательной геометрии аксиомами и теоремами школьного курса планиметрии и стереометрии

Автор презентации – к.т.н., доцент Юренкова Л.Р.

«Приобретение любого познания всегда полезно для ума, ибо он сможет отвергнуть бесполезное и сохранить хорошее. Ведь ни одну вещь нельзя ни любить, ни ненавидеть, если сначала ее не познать».

Леонардо да Винчи
1452-1519

«*Очарование сопровождающее науку, может победить свойственное людям отвращение к напряжению ума и заставить их находить удовольствие в упражнении своего разума, что большинству людей представляется утомительным и скучным занятием«.*

Гаспар Монж
1746-1818

«Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого мирового языка, тем как она учит нас правильно читать чужие мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками как элементами всякого изображения».

Курдюмов В.И.
(1853-1904)

«Начертательная геометрия «является наивысшим средством развития той таинственной и мало поддающейся изучению точными науками способности человеческого духа, которая зовется воображением и которая является ступенью к другой царственной способности — фантазии, без которой почти не совершаются великие открытия и изобретения»

Рынин Н.А
1877-1942

Аксиомы и теоремы планиметрии, используемые в дисциплинах «Начертательная геометрия» и «Инженерная графика»

Аксиомы принадлежности

- Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Аксиомы расположения

- Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Аксиомы измерения

- Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумму длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.
- Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180 градусов. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Аксиомы откладывания

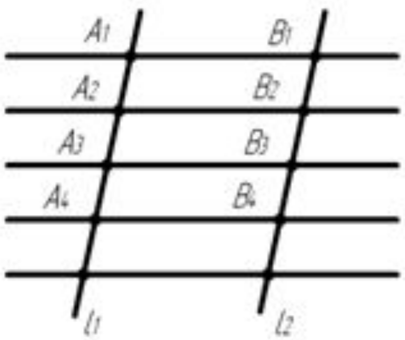
- На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок, заданной длины, и только один.
- От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол заданной градусной мерой, меньшей 180 градусов, и только один.
- Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

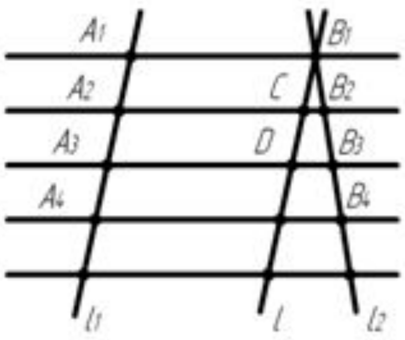
Аксиома параллельности

- Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной

Теорема Фалеса

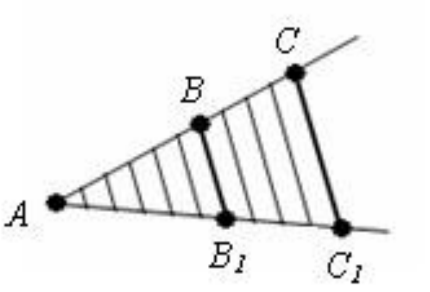
Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько пропорциональных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой пропорциональные между собой отрезки.



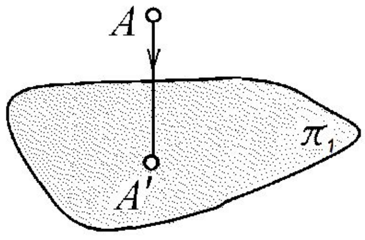


Теорема о пропорциональных отрезках

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



Обоснование инвариантных свойств



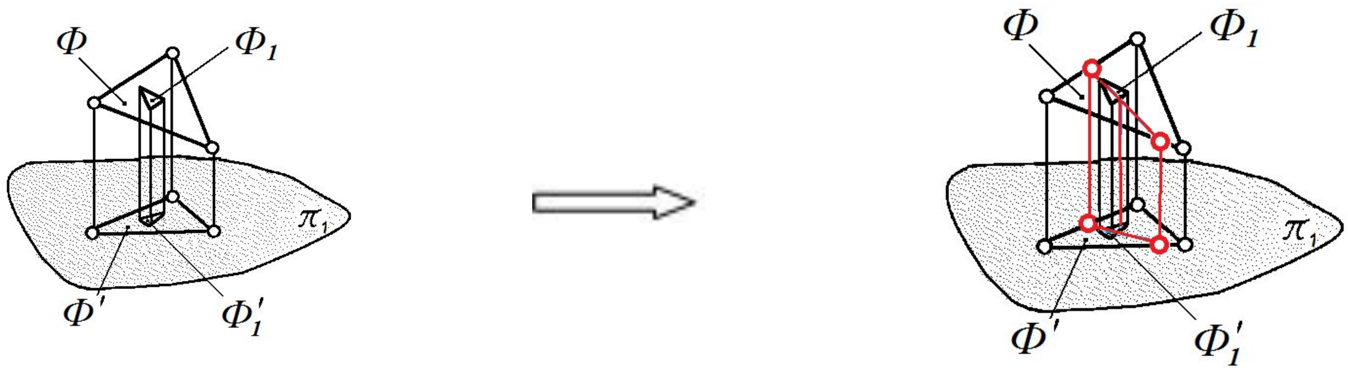
1. Проекция точки есть точка: $A \Rightarrow A'$

При ортогональном проецировании перпендикуляр из точки A к плоскости π1 пересечет эту плоскость (доказано в учебнике по геометрии: автор **Атанасян Л.С. и др. Геометрия для 10-11 кл. М.: Просвещение. 2009. 207 с.)**

2. Если фигура Φ_1 принадлежит фигуре Φ, то проекция фигуры Φ_1 будет принадлежать проекции фигуры Φ : $\Phi_1 \subset \Phi \Rightarrow \Phi'_1 \subset \Phi'$.

Для доказательства следует воспользоваться аксиомой стереометрии:*«если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости».*

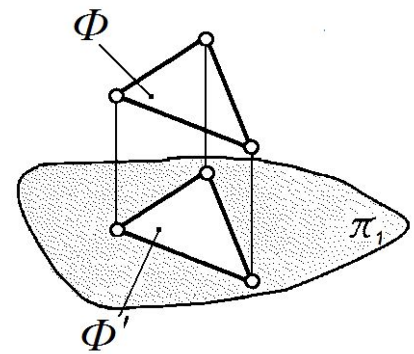
Через каждую точку фигуры можно провести прямую, принадлежащую плоскости и далее можно воспользоваться п.1.



3. Если плоская фигура *Ф* параллельна плоскости проекций, то проекция *Ф'* будет конгруэнтна (совпадать при наложении) фигуре *Ф*:
$\boldsymbol{\Phi \parallel \pi_1 \quad \Phi' \cong \Phi}$.

Это свойство можно доказать с помощью теоремы из школьного учебника по геометрии (автор **Атанасян Л.С. и др. Геометрия для 10-11 кл. М.: Просвещение. 2009. 207 с.):** *если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости* (доказательство см. на стр. 20*).*

Проекция отрезка, не параллельного плоскости проекции, меньше самого отрезка Рассмотрим фигуру, образованную точками A, B, A^α и B^α.
Данная фигура является трапецией, углы при вершинах которой A^α и B^α - прямые (поскольку лучи AA^α и BB^α перпендикулярны плоскости проекции α). В плоскости трапеции через точку A проведем отрезок AB_0 параллельный ортогональной проекции $A^\alpha B^\alpha$.
В полученном прямоугольном треугольнике ABB_0 гипотенуза есть сам отрезок AB, катет AB_0 равен проекции отрезка: $AB_0 = A^\alpha B^\alpha = AB \cos\varphi$.



Прямой угол проецируется в виде прямого угла, если хотя бы одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна этой плоскости проекции – в начертательной геометрии – это свойство известно как теорема о проецировании прямого угла..

Доказательство теоремы о проецировании прямого угла

Теорема о проецировании прямого угла

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая – не перпендикулярна ей, то проекцией прямого угла является прямой угол.

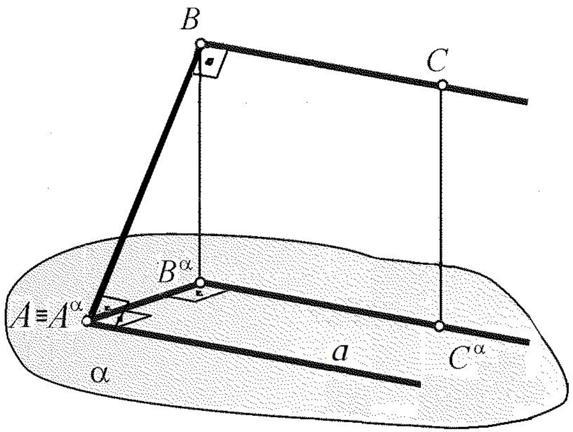
При доказательстве этой теоремы используется одна из основных теорем стереометрии – **теорема о трех перпендикулярах:**

«Если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна к проекции наклонной, то она перпендикулярна и к самой наклонной – прямая теорема**;**
если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна и к проекции наклонной – обратная теорема**.**

Доказательство

Предположим, сторона *BC* прямого угла *ABC* параллельна плоскости проекций α и проецируется в прямую $B^\alpha C^\alpha$, а сторона *AB* пересекает плоскость α в точке *A, к*оторая совпадает с точкой A^α .

Проведем прямую *a,* параллельную *BC.* Тогда по теореме о трех перпендикулярах угол между *AB* и прямой *a* будет прямым. Но *a* параллельна *BC, а BC* параллельна $B^\alpha C^\alpha$, следовательно, угол $A^\alpha B^\alpha C^\alpha$ будет также прямым.



Что и требовалось доказать.

Аксиомы и теоремы стереометрии, используемые в дисциплинах «Начертательная геометрия» и «Инженерная графика»

Аксиомы

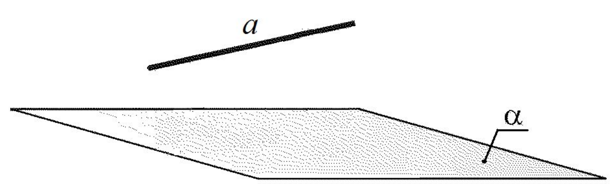
- **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой проходит плоскость, и притом только одна.**
- **Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости.**
- **Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую (линию их пересечения), которой принадлежат все общие точки этих плоскостей.**

Свойство плоскостей уровня

Проекция любой плоской фигуры, принадлежащей горизонтальной (фронтальной, профильной) плоскости уровня на горизонтальной (фронтальной, профильной) плоскости проекций, всеми своими точками совпадает с самой фигурой, т.е. ***конгруэнтна*** *ей.*

Для обоснования этого свойства можно привести задачу (теорему) из учебника по геометрии (автор **Атанасян Л.С. и др. Геометрия для 10-11 кл. М.: Просвещение. 2009. 207 с.)**, в котором приведено доказательство, что «*если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости*» **(задача №132). Вследствие этого одна из проекций линии уровня параллельна оси проекций Ox.**

Дано:
Прямая $a \parallel \alpha$
Доказать: все точки прямой a равноудалены от плоскости α.



Доказательство

Выберем на прямой a две произвольные точки A и B.
Докажем, что расстояния от точки A и от точки B до плоскости α равны: $AA^{\alpha} = BB^{\alpha}$.
Если прямая a параллельна плоскости α, то в плоскости α содержится множество прямых, параллельных данной прямой a, например, прямая a_1.
Определим расстояния от точек A и B до плоскости α - AA^{α} и BB^{α}:
AA^{α} α и BB^{α} α. Так как перпендикуляра к одной плоскости параллельны, то
$AA^{\alpha} \parallel B B^{\alpha}$.
Проведем $AA_1 \parallel BB_1$, соединим точки A^{α} и A_1 B^{α} и B_1 и рассмотрим два равных треугольника - $AA^{\alpha}A_1$ и $BB^{\alpha}B_1$: $AA_1 = BB_1$ как отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя другими параллельными прямыми; $A^{\alpha}A_1 = B^{\alpha}B_1$ как проекции равных наклонных.
Из равенства треугольников следует, что $AA^{\alpha} = BB^{\alpha}$ – что и требовалось доказать.

Свойство параллельных плоскостей (теорема)

Если параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны

Эта теоремы является обоснованием следующего положения (теоремы) начертательной геометрии: все горизонтали (фронтали) плоскости параллельны между собой и параллельны соответственно горизонтальному (фронтальному) следу этой плоскости.

Взаимное положение прямой и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости

Взаимное положение плоскостей

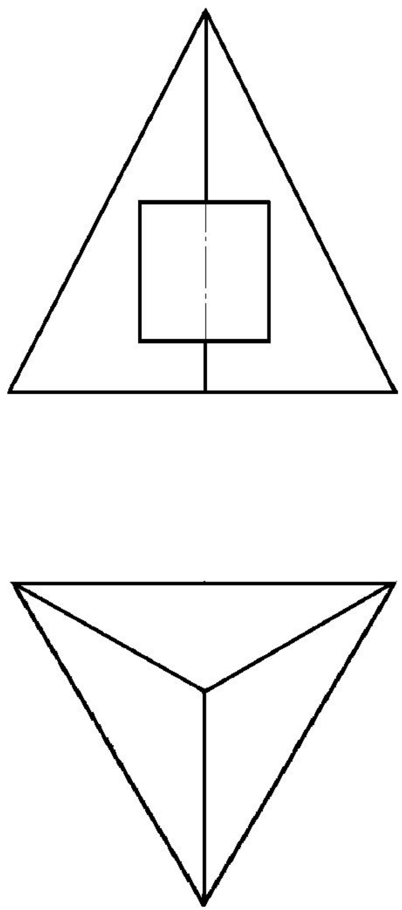
Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельна двум пересекающимся, прямым другой плоскости, то эти эти плоскости параллельны

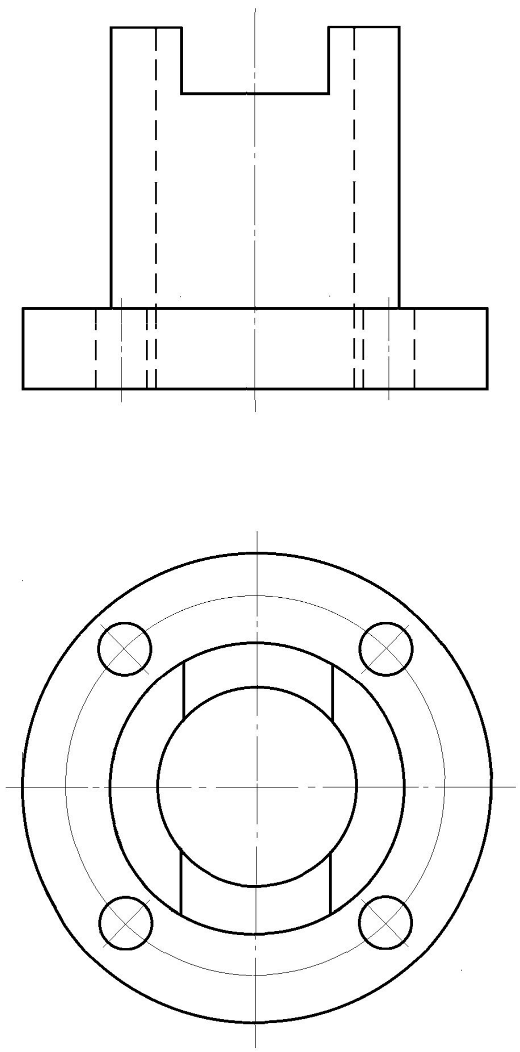
Признак перпендикулярности плоскостей

Если в одной из двух плоскостей содержится прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

Оформить!



Оформить!



Оформить!