

# Лекция 6

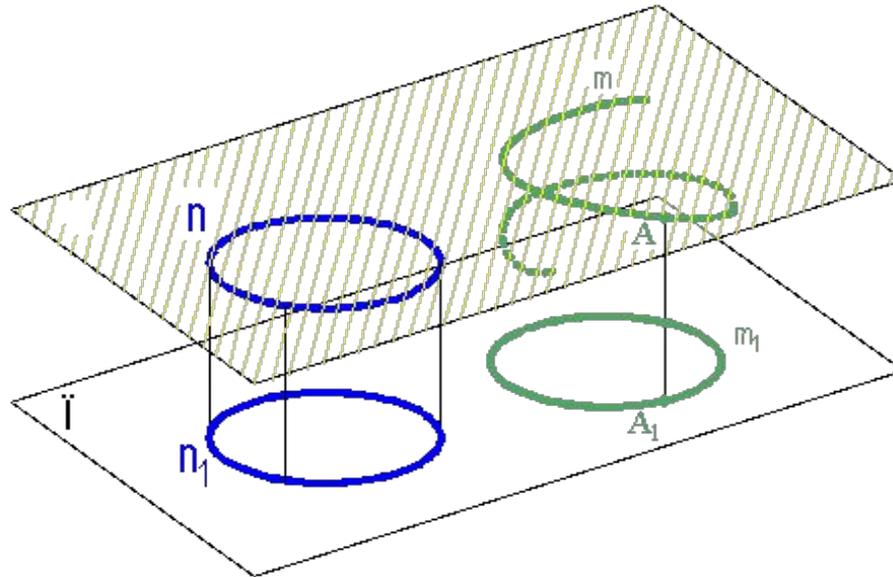
- Кривые линии.
- Поверхности. Способы образования поверхностей.
- Классификация поверхностей.
- Геометрические тела.
- Линейчатые поверхности.
- Поверхности Каталана.
- Винтовые поверхности.
- Поверхности вращения.

# Кривые линии. Основные понятия и определения

- Кривые линии широко применяются в архитектуре и строительстве. По кривым линиям очерчиваются различные пространственные формы- арки, своды и т.п. Кривые линии применяют для образования поверхностей различных архитектурных объектов и конструкций зданий – покрытий в виде оболочек, сводов и куполов, пандусов и винтовых лестниц.
- Кривые линии могут быть результатом пересечения поверхностей, они могут быть краевыми контурами отсеков поверхностей- оболочек или видимыми и очерковыми контурами поверхностей

- Кривые линии в начертательной геометрии рассматриваются как непрерывная совокупность последовательных положений движущейся точки , а также как линия пересечения поверхностей
- Кривая может быть описана (задана) аналитически, т.е. уравнением , например эллипс, парабола и др.
- Если образование кривой не имеет строгой закономерности, то она задается графически, например горизонтали в плане местности.

# Кривые линии. Основные понятия и определения



Если все точки кривой линии лежат в одной плоскости, такая кривая линия называется **плоской** (окружность, эллипс, парабола).

Если все точки кривой линии нельзя совместить с плоскостью, то такая кривая линия называется **пространственной** (например, винтовые линии)

# Свойства проекций кривой

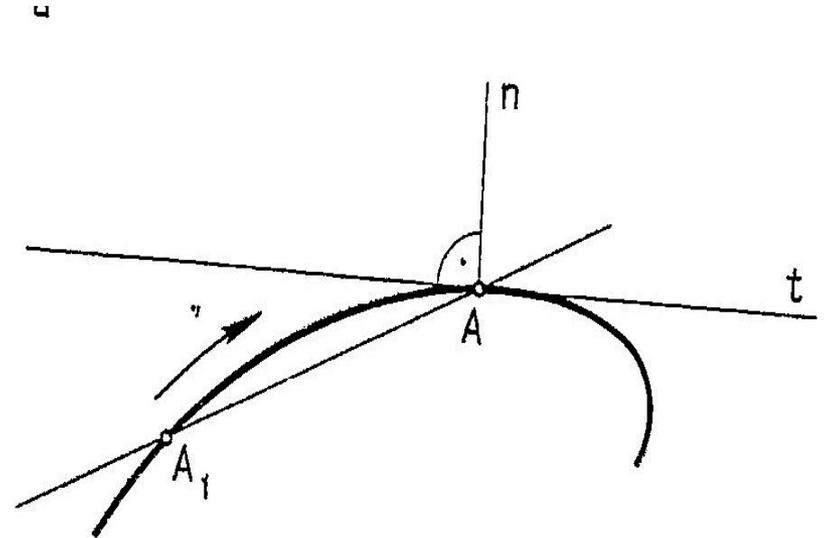
В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям.

## Свойства проекций кривой:

- проекции кривой линии являются также кривыми линиями
- Если точка принадлежит кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой
- Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции этой кривой, если направление проецирования не параллельно касательной

# Плоские кривые

- Для исследования локальных свойств плоской кривой строят в некоторой точке касательную и нормаль
- **Касательной** к плоской кривой в некоторой ее точке называется предельное положение секущей, когда две общие с кривой точки сечения, стремясь друг к другу, совпадут
- Касательная определяет направление движения точки по кривой
- **Нормалью** называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в точке ее касания

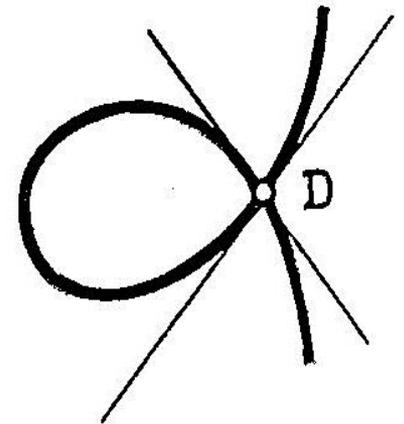
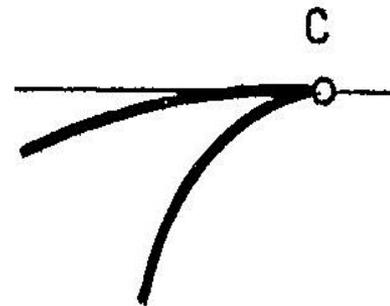
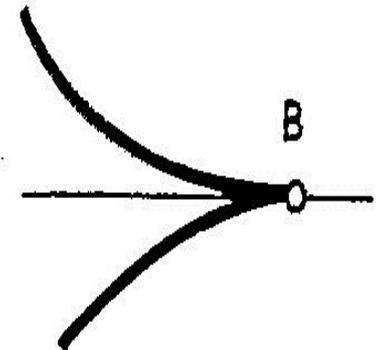
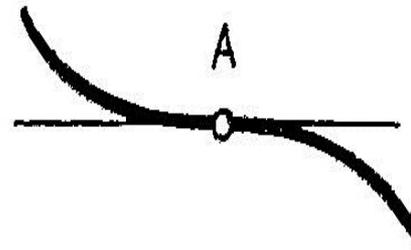


# Свойства точек кривой

- Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называется **гладкой**.
- Кривая, состоящая только из гладких точек, называется **гладкой кривой**.
- Точка кривой называется **обыкновенной**, если при движении точки по кривой направление ее движения и направление поворота касательной не изменяются
- Точки, не отвечающие этим условиям, называются **особыми**

# Особые точки кривой

- **Точка перегиба A**- касательная пересекает кривую
- **Точка возврата первого рода B**
- **Точка возврата второго рода C**
- **Точка излома D**- кривая в этой точке имеет две касательные



# Пространственные кривые

- Пространственные кривые линии могут иметь самую разнообразную форму. Они могут быть заданы аналитически. Кривые случайного вида задаются графически.
- Для анализа пространственной кривой необходимо установить самые общие ее свойства, которые изучаются по ее проекциям.
- Для задания на чертеже пространственной кривой линии и точек, принадлежащих ей, достаточно двух ее проекций – горизонтальной и фронтальной.

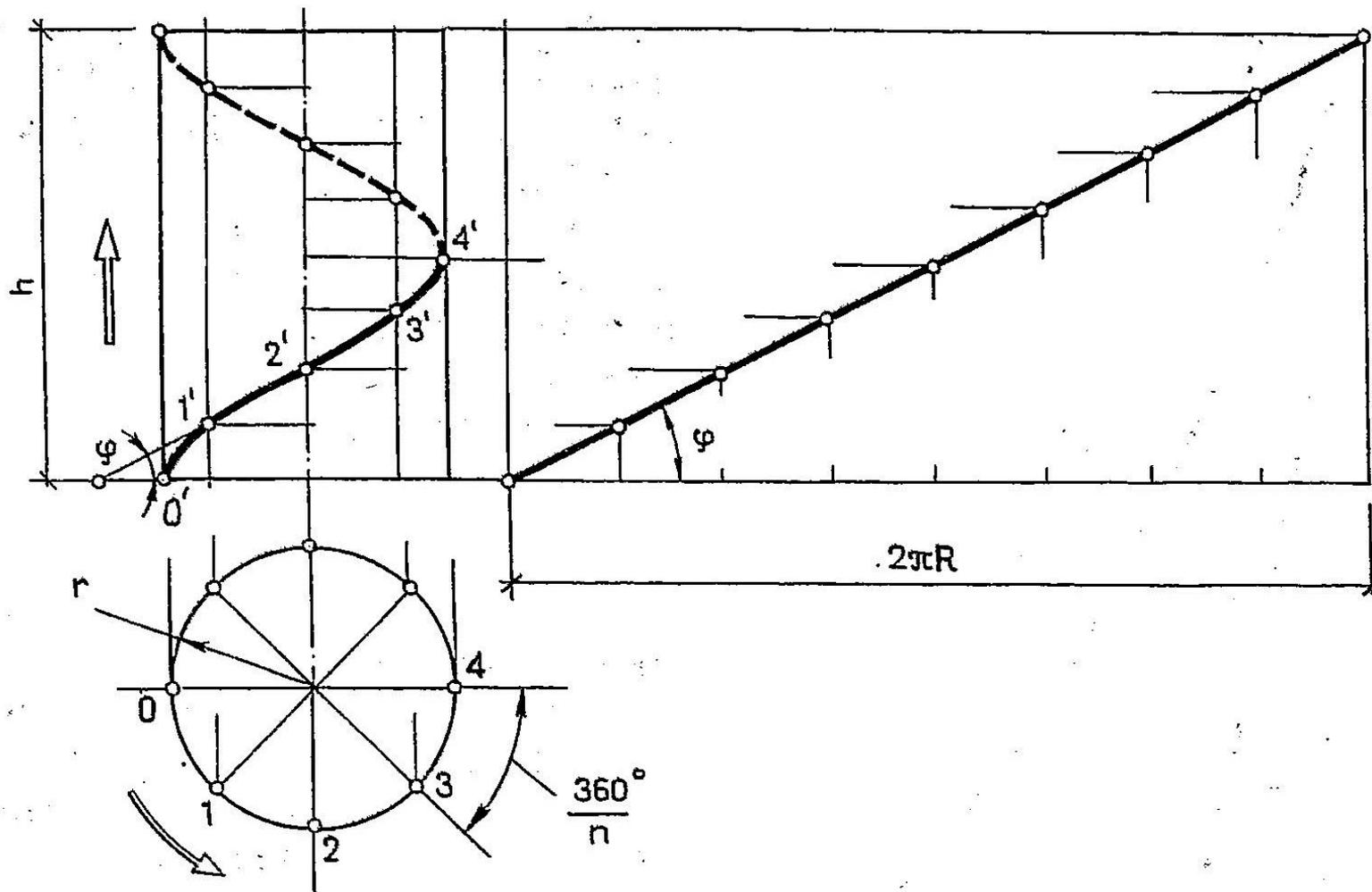
# Проекции пространственных кривых

- Наибольшее применение в практике архитектурного проектирования имеют **закономерные пространственные кривые**, в частности винтовые линии
- Винтовая линия образуется двойным движением точки – поступательным и вращательным.

# Цилиндрическая винтовая линия - гелиса

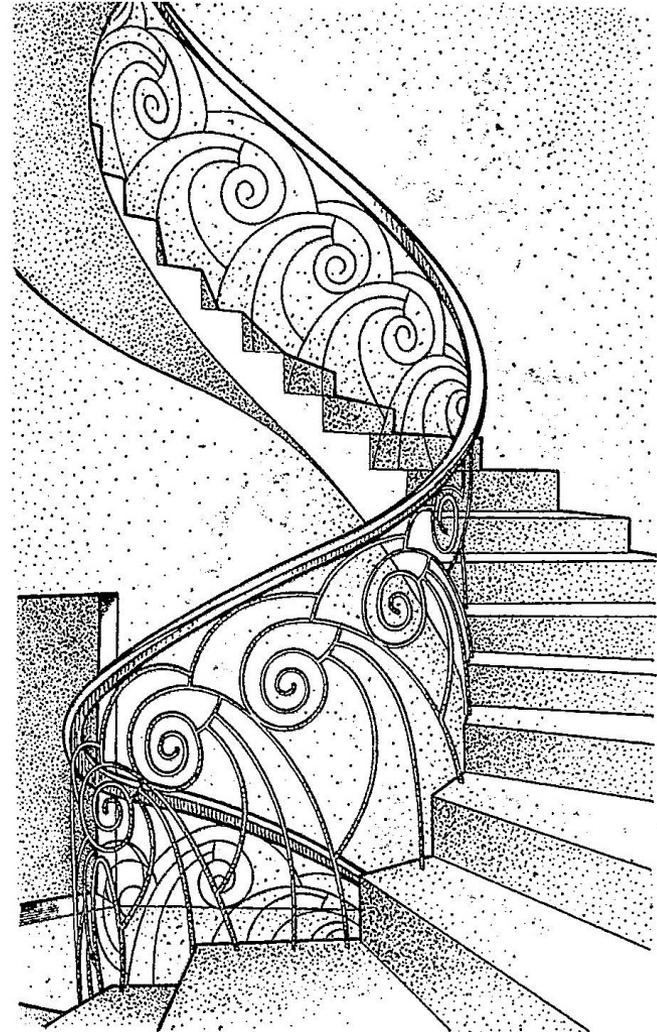
- Представляет собой траекторию точки, вращающейся вокруг некоторой прямой и совершающей одновременно равномерное движение вдоль прямой.
- **Фронтальная проекция** цилиндрической винтовой линии представляет собой **синусоиду**
- Смещение точки вдоль образующей за один оборот называется **шагом**  $h$  винтовой линии
- При разворачивании цилиндрической поверхности в плоскость цилиндрическая винтовая линия изобразится прямой линией.
- **Угол  $\varphi$** , составленный касательной к винтовой линии с плоскостью, перпендикулярной оси, называется **углом подъема** винтовой линии

# Цилиндрическая винтовая линия - гелиса



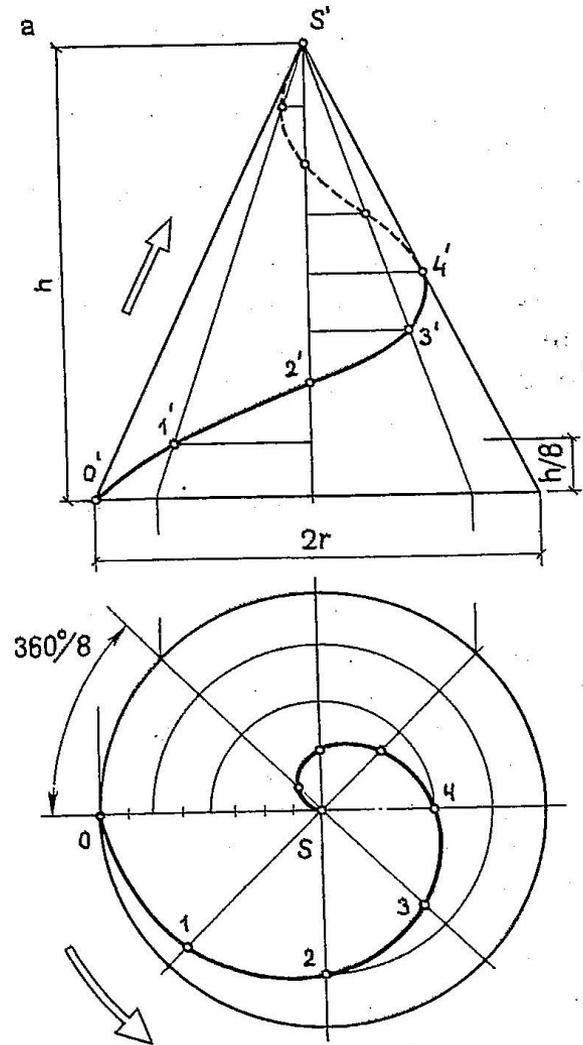
## Арх. Ф.Шехтель. Интерьер особняка Дорожинской, 1901 г.

- В архитектурной практике цилиндрические винтовые линии применяются для образования контуров каркаса и поверхностей винтовых лестниц, винтовых пандусов для въезда автомашин в многоэтажных гаражах, для устройства развязок в двух уровнях на пересечении магистралей.



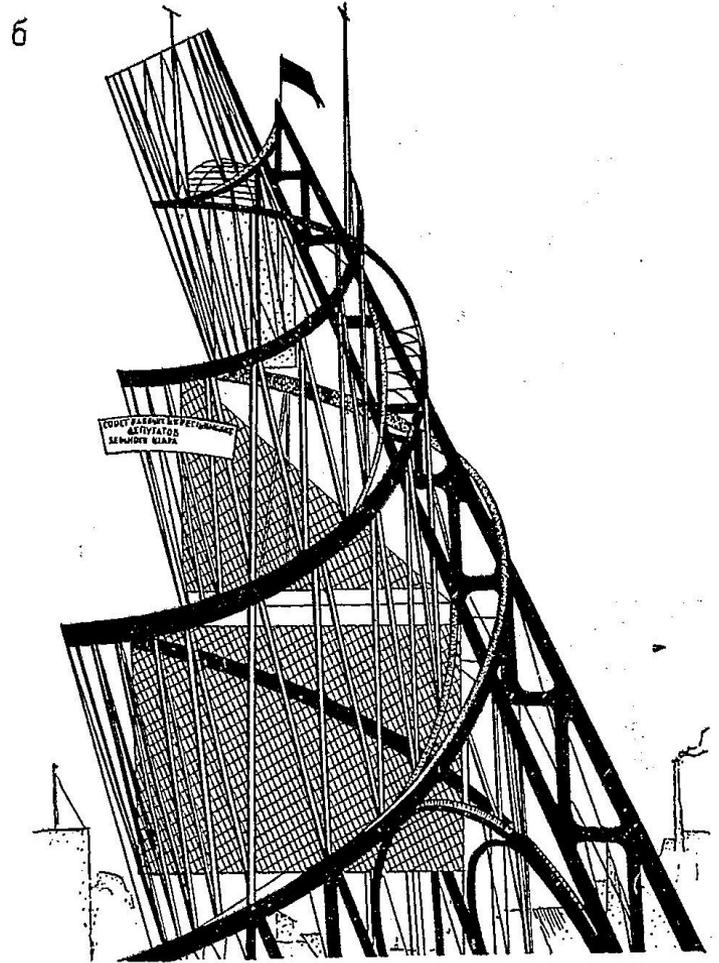
# Коническая винтовая линия

- Представляет собой траекторию точки, равномерно перемещающейся по образующей прямого кругового конуса и в то же время равномерно вращающейся вместе с образующей вокруг оси.
- **Горизонтальная проекция** конической винтовой линии представляет собой **спираль Архимеда**
- Проекции каждой точки определяются пересечением соответствующих образующих с проекциями параллелей конуса, плоскости которых смещены по вертикали (в данном примере  $h/8$ )



# Проект памятника III Интернационалу (художник В.Татлин, 1919 г.)

- Металлическая стержневая наклонная башня высотой 400 м сужается кверху.
- Динамику всей композиции придают элементы двух конических винтовых линий

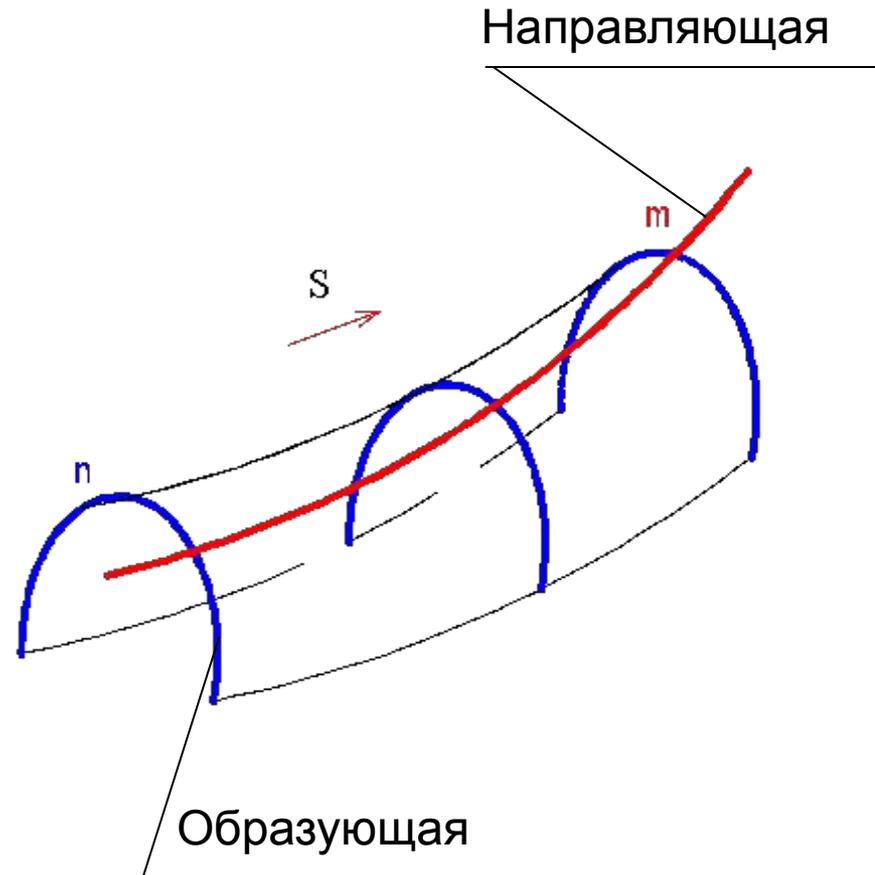


# Образование и каркас поверхностей

- В начертательной геометрии поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону.
- Такой способ образования поверхностей называется кинематическим

# Кинематический способ образования поверхностей

При кинематическом способе образования поверхности образующая линия «*n*» движется по направляющей линии «*m*» по заданному направлению «*S*»



# Определитель и каркас поверхностей

- **Определитель поверхности** – совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже
- Поверхность считается заданной, если относительно любой точки пространства однозначно решается вопрос о принадлежности ее к данной поверхности
- Все поверхности делятся на 2 группы:  
**многогранные и кривые**

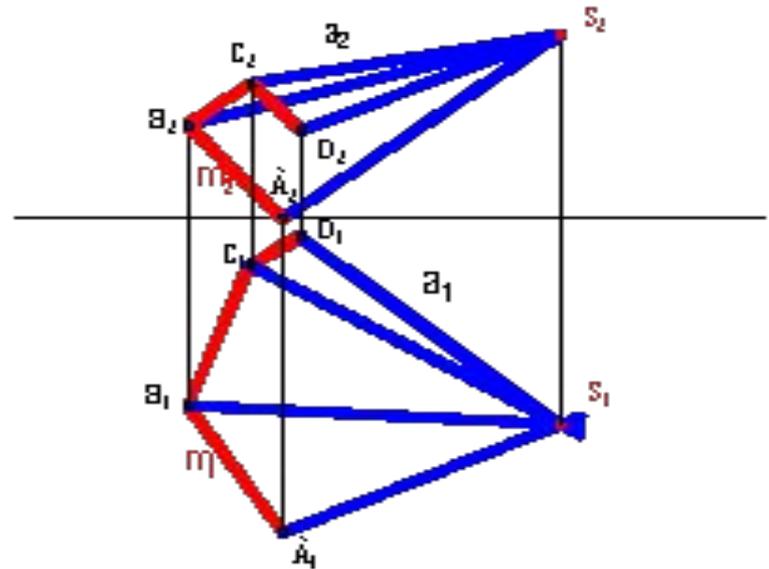
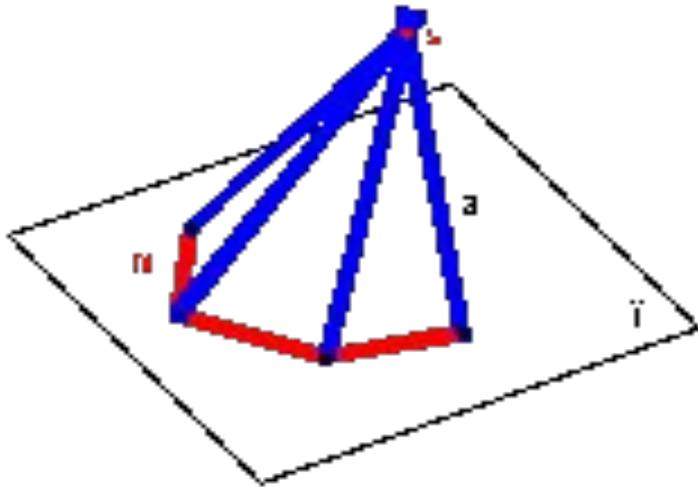
# Многогранные поверхности

- Многогранной поверхностью называется поверхность, образованная частями (отсеками) пересекающихся плоскостей
- Отсеки плоскостей называются **гранями**, а линии их пересечения – **ребрами**.
- Совокупность ребер и вершин многогранной поверхности называют **сеткой**
- Наиболее распространенные многогранники – **призмы и пирамиды**
- Призму, ребра которой перпендикулярны основанию, называют **прямой**.

# Общие положения

- Направляющая и образующие создают линейчатый каркас поверхности
- Точка принадлежит поверхности, если она лежит на линии этой поверхности
- Направляющая «  $m$  » может быть:  
замкнутой или разомкнутой; плоской  
или пространственной

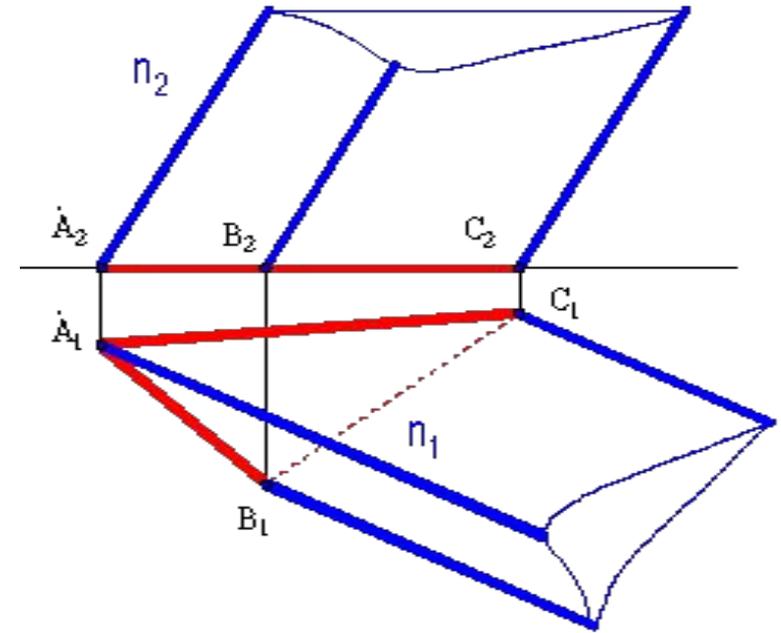
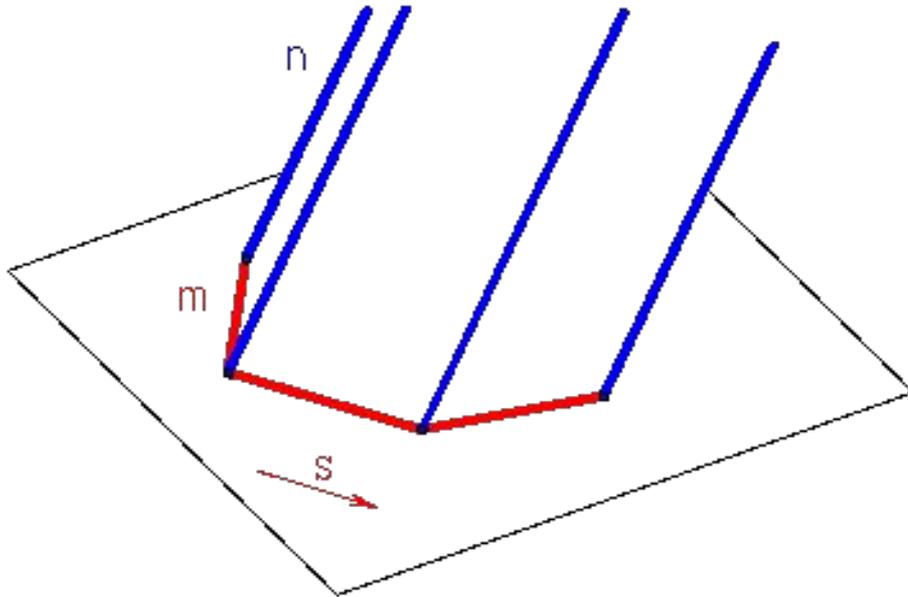
# Пирамидальная поверхность



**Определитель** – ломаная направляющая «  $m$  » и вершина «  $S$  »

**Закон образования:** Поверхность образуется движением прямолинейной образующей «  $a$  », закрепленной в точке «  $S$  » по ломаной направляющей «  $m$  ».

# Призматическая поверхность



**Определитель:** ломаная направляющая «  $m$  » и заданное направление «  $S$  ».

**Закон образования:** Призматическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей «  $n$  » по ломаной направляющей «  $m$  » параллельно заданному направлению «  $S$  ».

# Кривые поверхности

- Кривые поверхности отличаются большим разнообразием форм- от самых простых до сложнейших.
- Поверхности, полученные на основе геометрического способа образования, отличаются целостностью и структурной четкостью, а также возможностью математического описания и точного отображения на чертеже

- Геометрическая форма поверхности определяет не только эстетические качества поверхности.
- «Несущая способность конструкции – функция ее геометрической формы» (итальянский архитектор и инженер П.Л. Нерви)
- Современные оболочки способны перекрывать пролеты до 300 м.

# Систематизация (классификация) поверхностей

1. **По закону движения образующей** – поверхности с поступательным движением образующей, с вращательным и винтовым.
2. **По виду образующей** - поверхности с прямолинейной образующей (линейчатые) и с криволинейной образующей (нелинейчатые)
3. **По закону изменения формы образующей** – с образующей постоянного и переменного вида
4. **По признаку развертывания** поверхности на плоскость - развертываемые и не развертываемые
5. **По способу задания поверхности** - аналитическому или графическому (закономерные и не закономерные (графические))

## 6. По признаку развертывания поверхности делятся на развертываемые и неразвертываемые

- **Развертка**: Совмещение поверхности с плоскостью

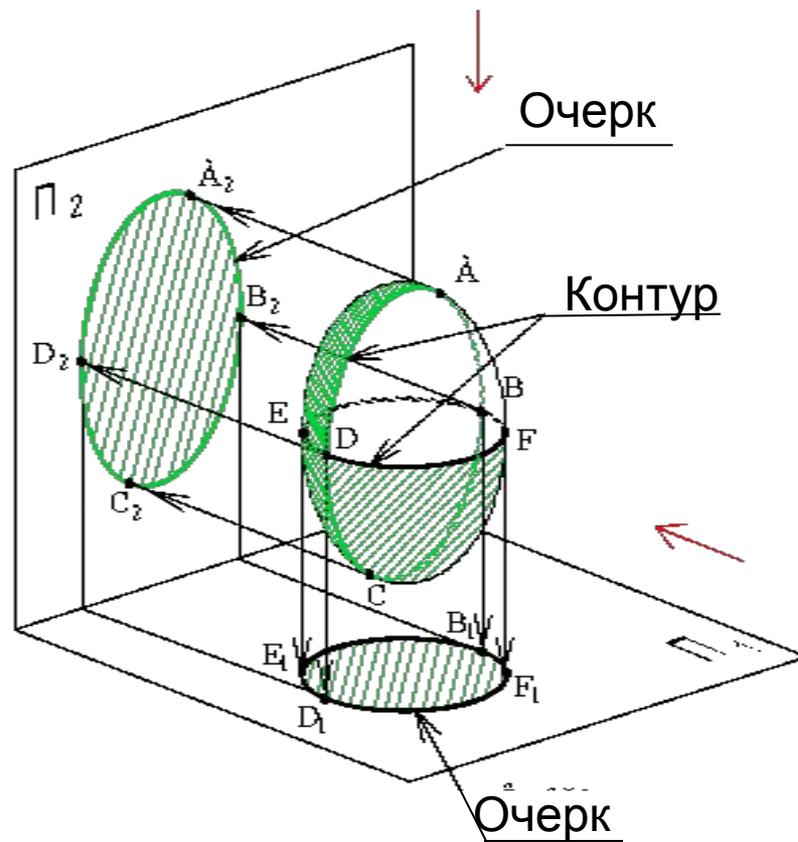
Развертки бывают:

- **Точные** – совмещение поверхности с плоскостью без деформаций (многогранные поверхности)
- **Приближенные** – имеют место небольшие деформации: растяжения, сжатие, складки (кривые поверхности -линейчатые)
- **Условные** – имеют место сильные деформации. Фактически поверхность разрывается на отдельные части (кривые поверхности нелинейчатые)

# Очертание поверхности

- Чтобы придать чертежу поверхности наглядность, строят ее очертание – проекцию линии контура поверхности
- **Контуром видимости** называется линия, точки которой являются точками касания проецирующих прямых.
- **Проекция контура на плоскости проекций называется очерком поверхности на данной плоскости**
- При изображении поверхности на чертеже проекцию контурной линии называют **линией видимости**, которая является границей, отделяющей видимую часть поверхности от скрытой, невидимой части данной поверхности на данной плоскости проекций

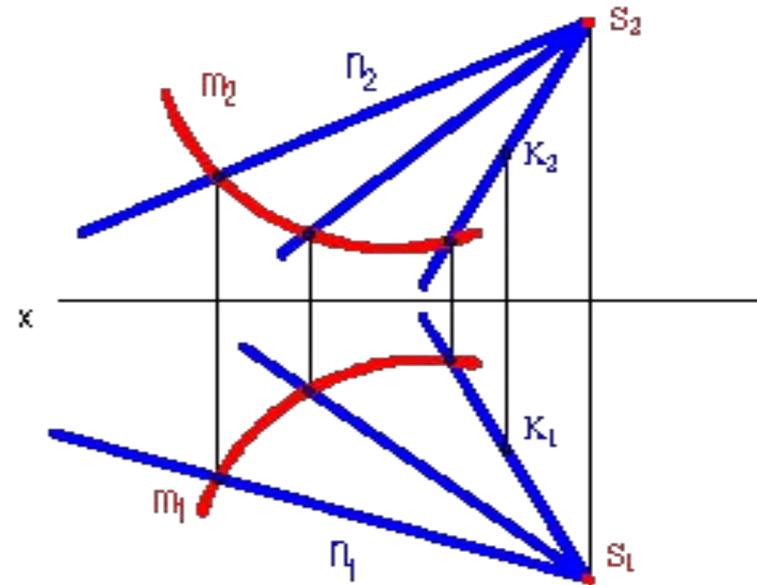
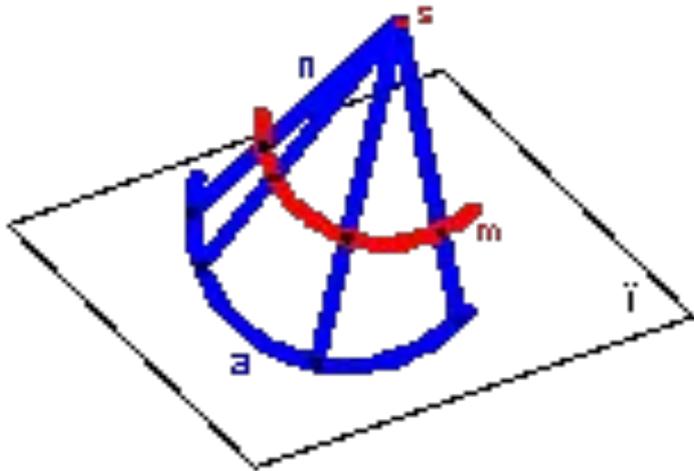
# Построение очерка геометрического тела на плоскостях проекций



# Линейчатые поверхности

- **Линейчатые поверхности** - поверхности, образованные движением прямой образующей в пространстве по определенному закону

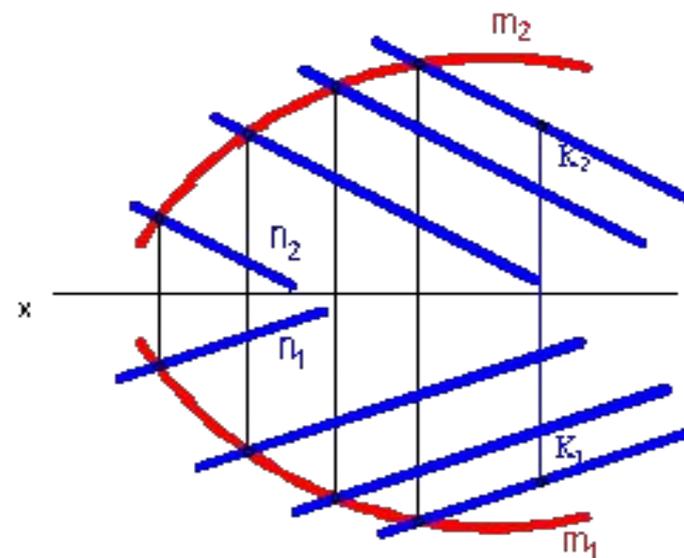
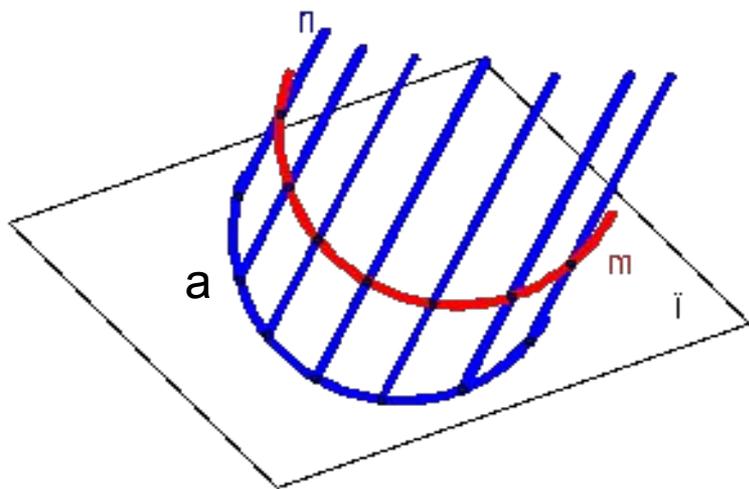
# Коническая поверхность



**Определитель поверхности:** вершина «  $S$  » и криволинейная направляющая «  $m$  ».

**Закон образования:** Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей «  $n$  », закрепленной в точке «  $S$  » по криволинейной направляющей «  $m$  ». Линия «  $a$  » - пересечение поверхности с плоскостью проекций.

# Цилиндрическая поверхность



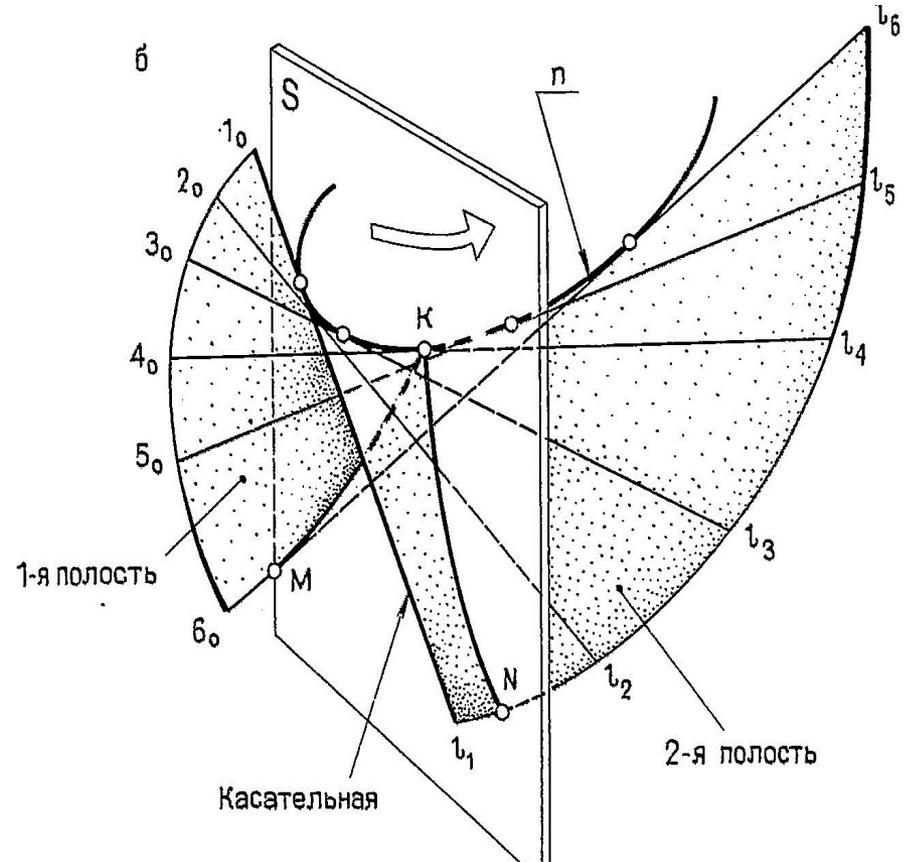
**Определитель:** криволинейная направляющая «  $m$  » и заданное направление.

**Закон образования:** Цилиндрическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей «  $n$  » по криволинейной направляющей «  $m$  » параллельно заданному направлению. Линия «  $a$  » - пересечение поверхности с плоскостью проекций.

# Торсовая поверхность (Поверхность с ребром возврата)

Торсовой поверхностью называется линейчатая поверхность, образованная множеством положений движущейся прямой образующей, касательной к пространственной кривой линии « $n$ ».

**Определитель:** кривая направляющая « $n$ », называемая ребром возврата.



- Для архитектурно-строительной практики важен случай, когда ребром возврата служит **цилиндрическая винтовая линия**. Кривая сечения поверхности горизонтальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, или горизонтальный след поверхности представляют собой плоскую кривую – **эвольвенту**, поэтому данную поверхность называют **эвольвентной поверхностью** или **развертываемым геликоидом**.
- Горизонтальная проекция ребра возврата (окружность) является эволютой этой кривой. Эволюта – это множество центров кривизны эвольвенты (точки 1....12 на окружности)



# Винтовая поверхность

Винтовая поверхность образуется винтовым движением образующей линии. Это

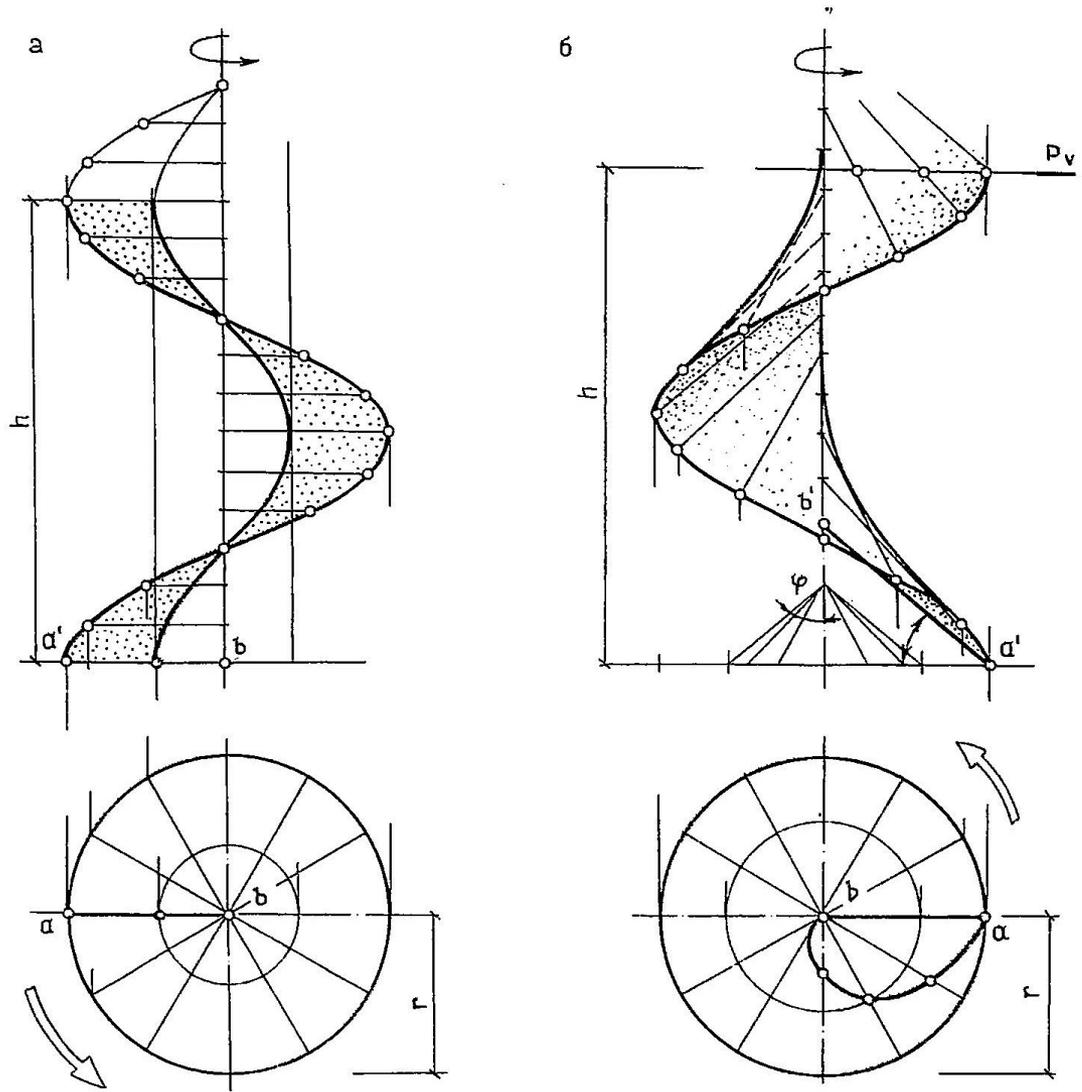
совокупность двух движений образующей – поступательного перемещения вдоль оси поверхности и вращательного вокруг оси.

Если **образующая прямая линия**, винтовую поверхность называют **геликоидом**.

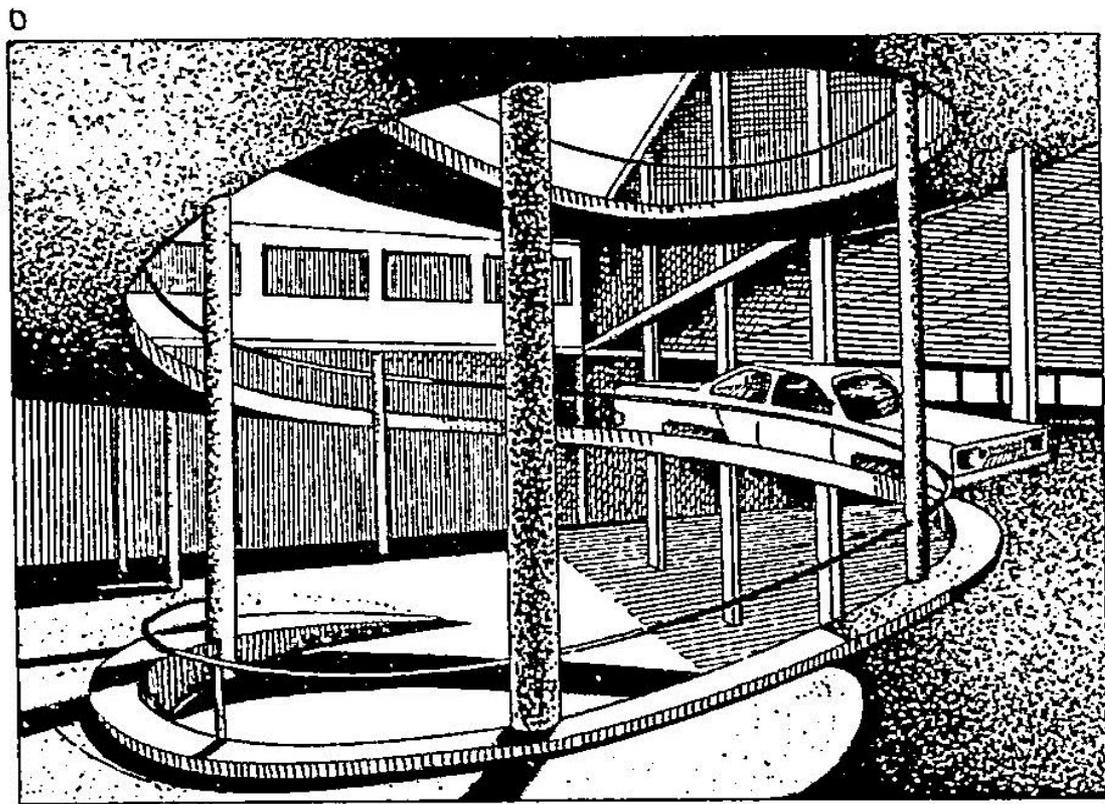
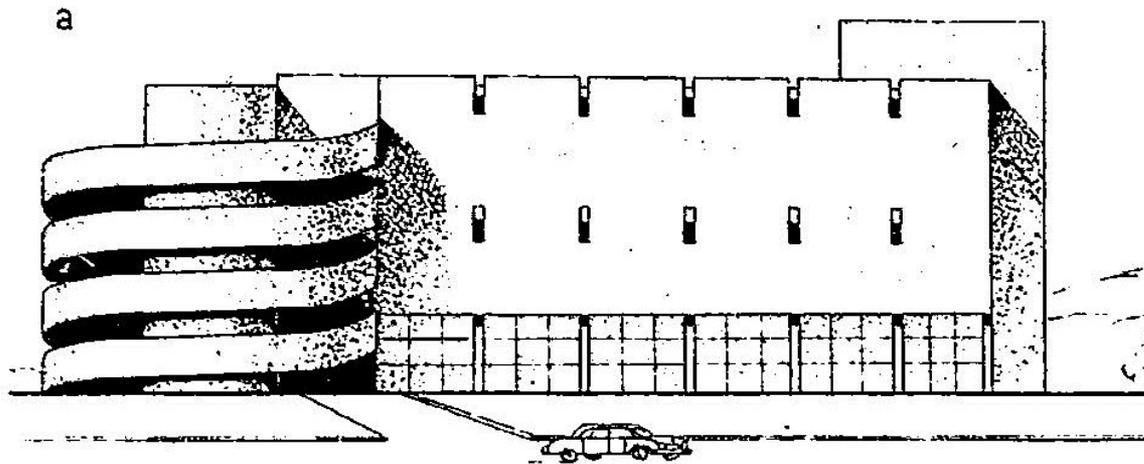
Геликоид называют прямым, если образующая составляет с осью поверхности прямой угол. В других случаях геликоид называют **наклонным**.

а - прямой геликоид. Если образующая пересекается с осью поверхности, геликоид называют **закрытым**. Если не пересекается - **открытым**.

б- закрытый наклонный геликоид.



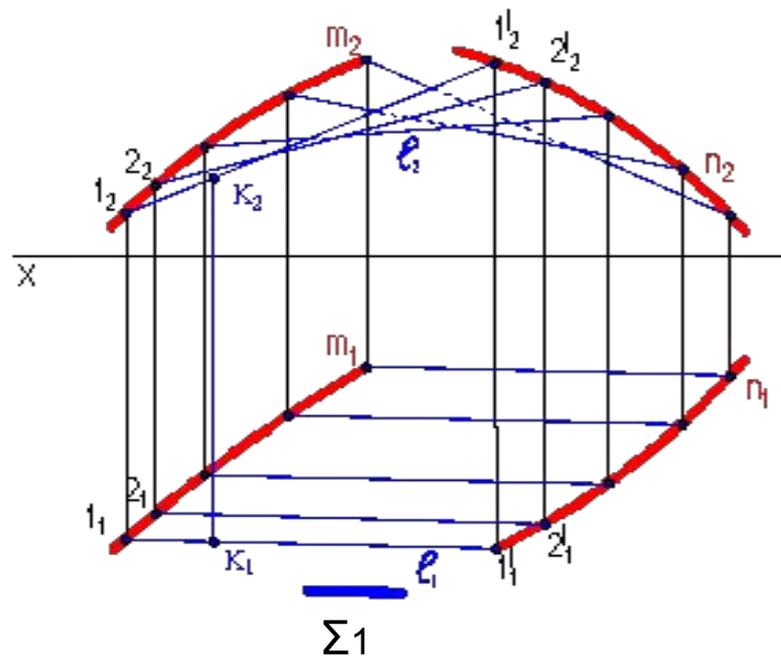
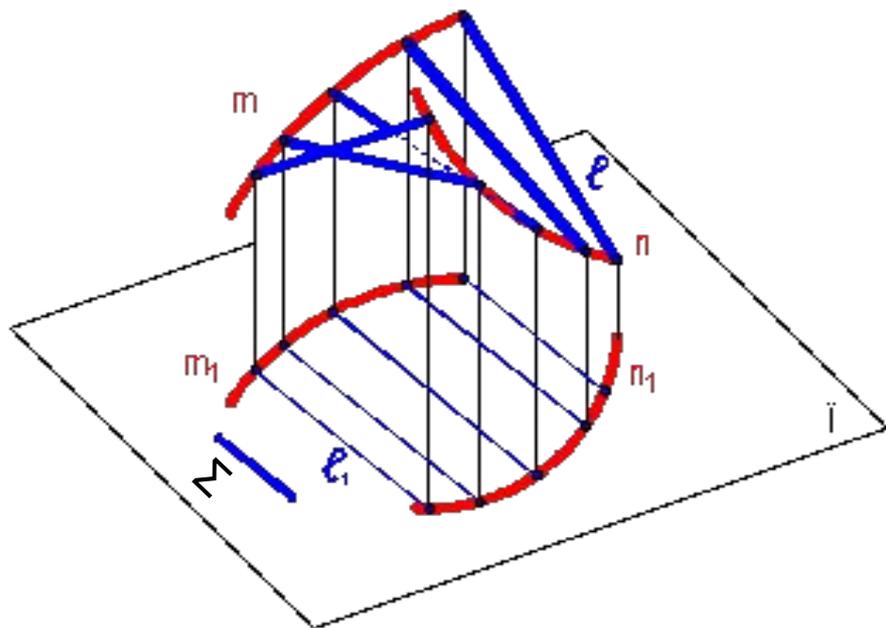
- Поверхность пандусов многоэтажных гаражей и некоторых других зданий представляет собой открытый прямой геликоид



# Поверхности с плоскостью параллелизма (Поверхности Каталана)

- **Определитель:** две направляющих и плоскость параллелизма
- **Закон образования:** Прямая образующая движется по двум направляющим одновременно параллельно некоторой плоскости, называемой плоскостью параллелизма
- В зависимости от вида направляющих различают три вида поверхностей:
  1. **Цилиндроид** – обе направляющих кривые
  2. **Коноид** – одна направляющая кривая, вторая прямая
  3. **Косая плоскость** – две скрещивающихся прямых направляющих

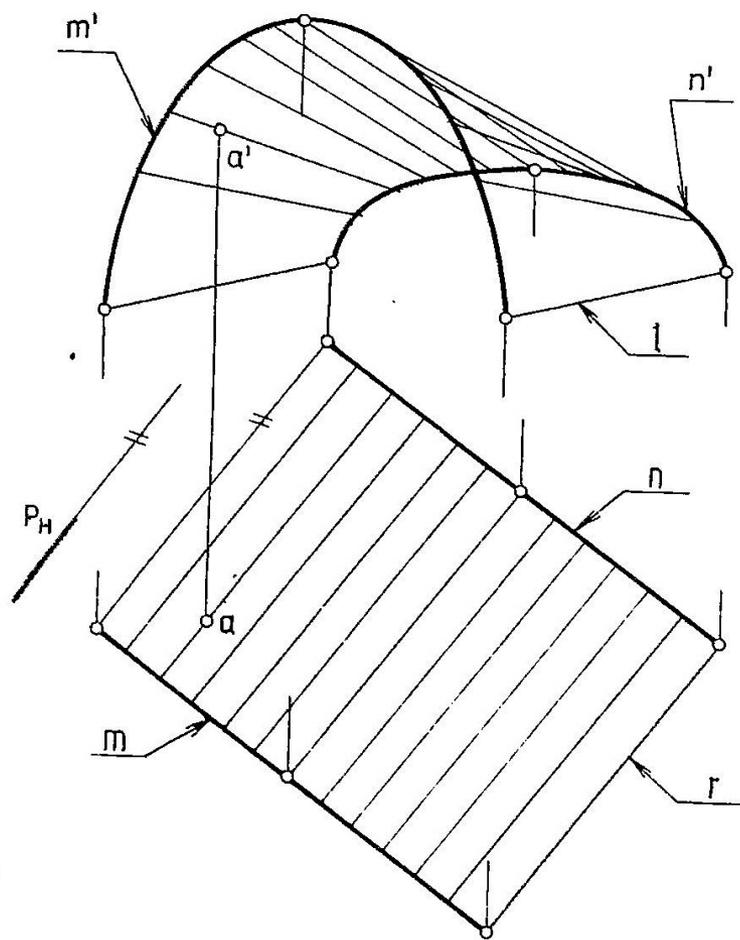
# Цилиндроид



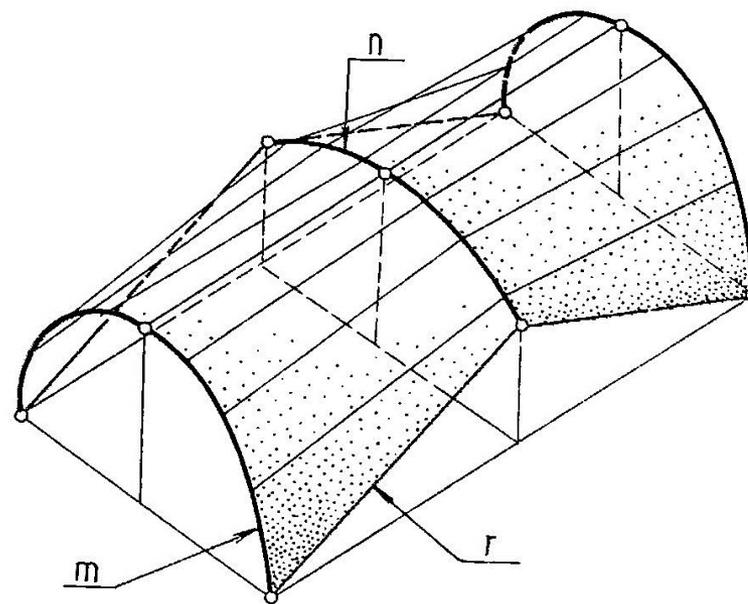
Цилиндроид образуется движением прямолинейной образующей ( $l$ ) по двум криволинейным направляющим ( $m, n$ ) параллельно некоторой плоскости параллелизма  $\Sigma$ .

# Цилиндроид.

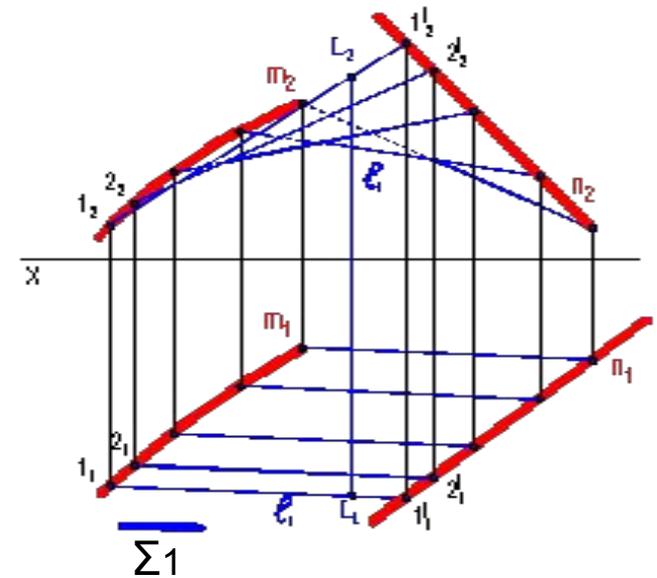
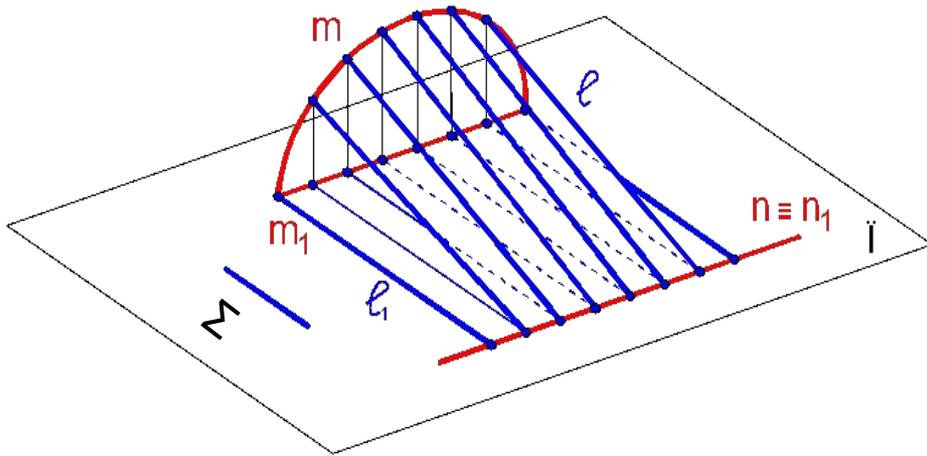
## Моделирование поверхностей



б

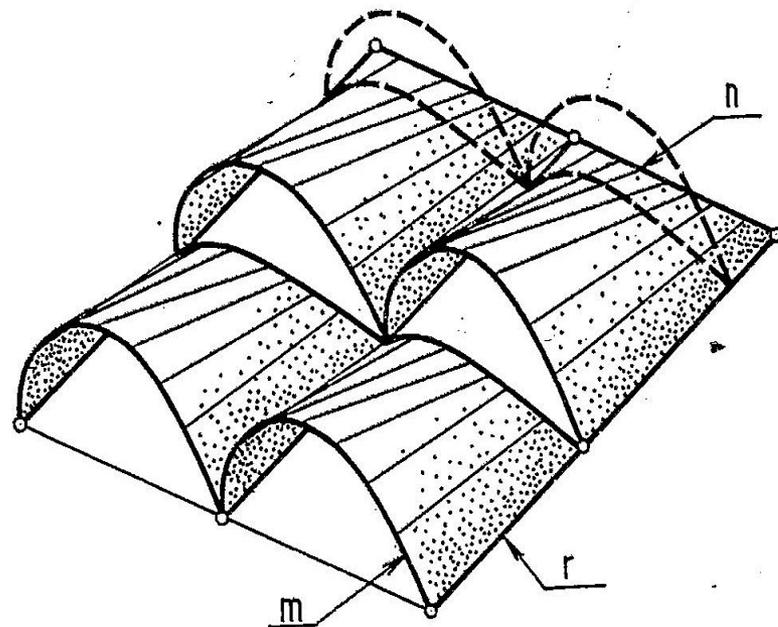
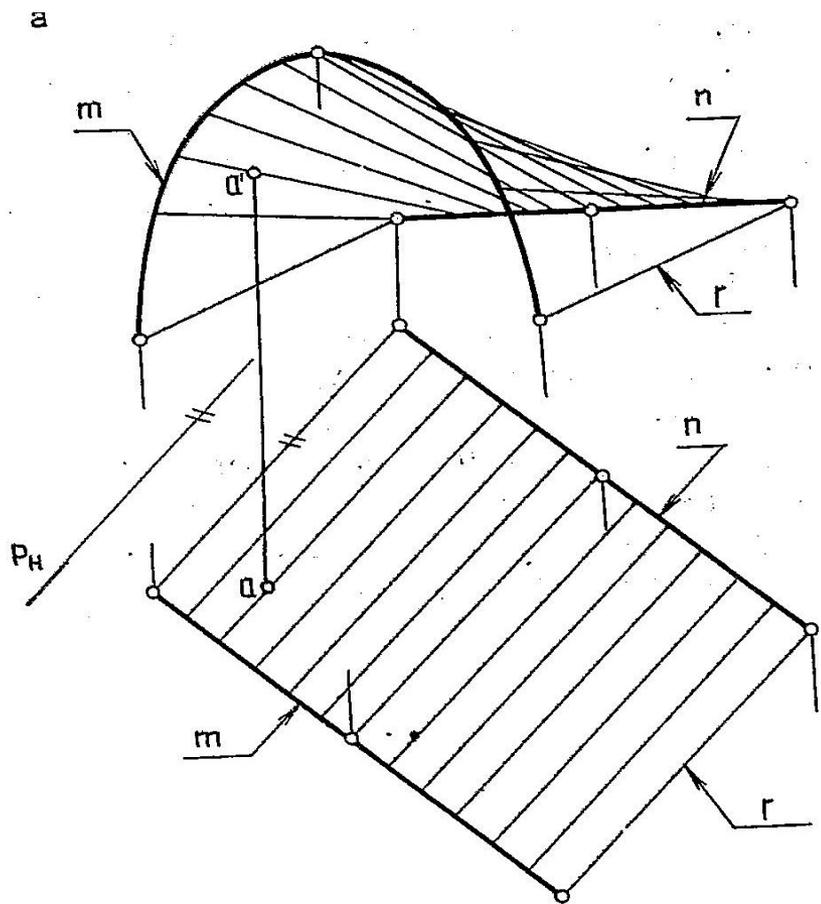


# Коноид

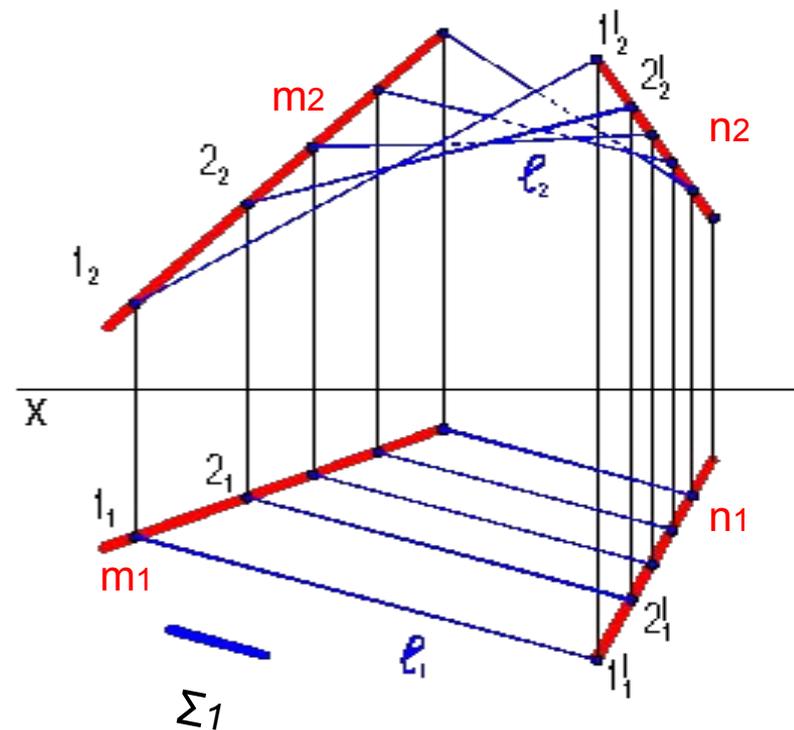
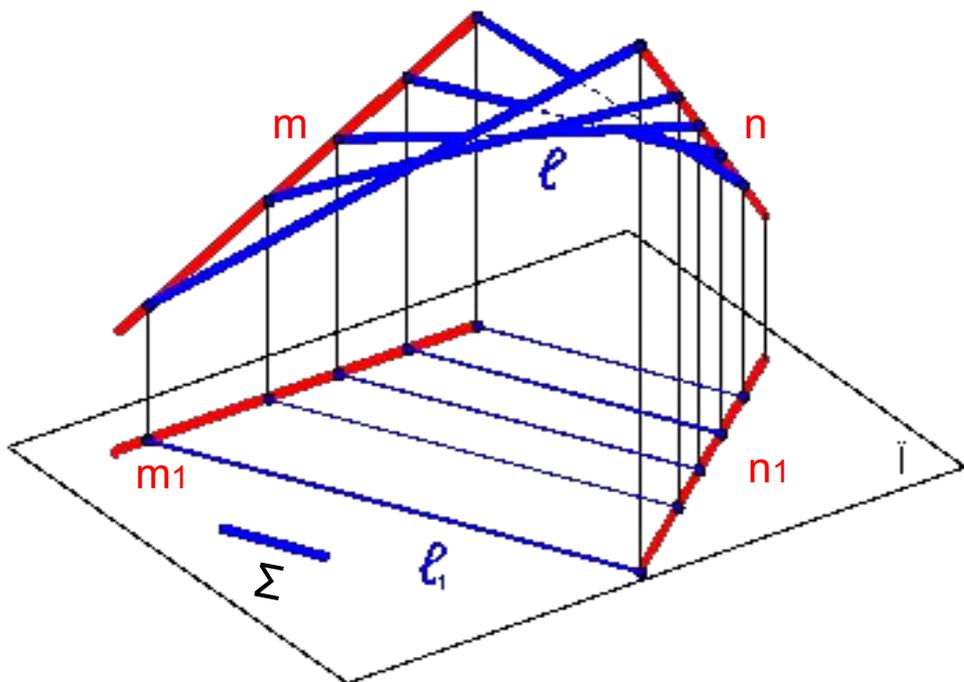


Коноид образуется движением прямолинейной образующей ( $l$ ) по двум направляющим ( $m, n$ ), одна из которых – прямая линия, а другая – кривая, параллельно некоторой плоскости параллелизма  $\Sigma$ .

**Пример:** схема покрытия пром. здания составной поверхностью (шедовое покрытие), обеспечивает естественное освещение и вентиляцию

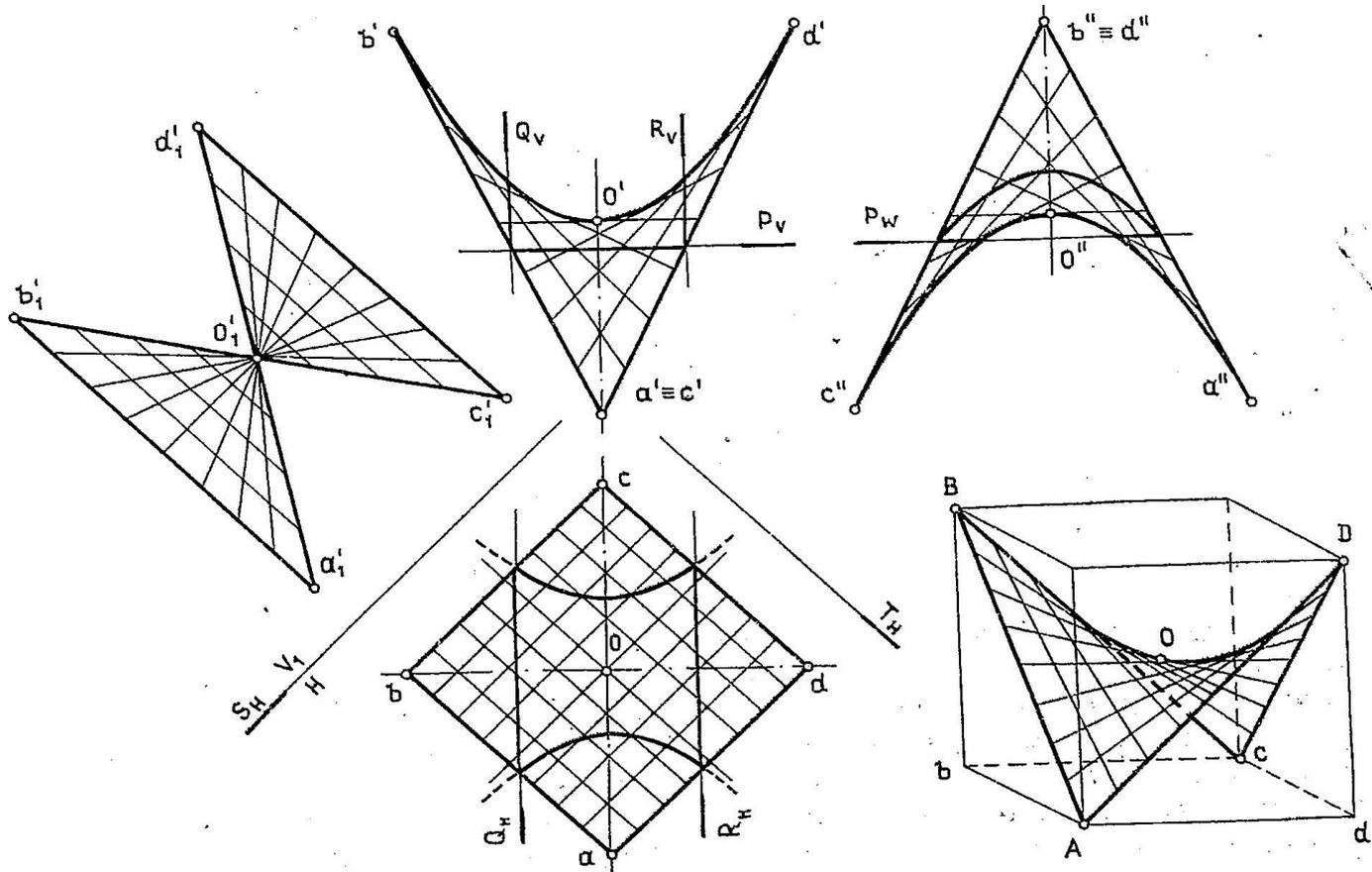


# Гиперболический параболоид (Косая плоскость)



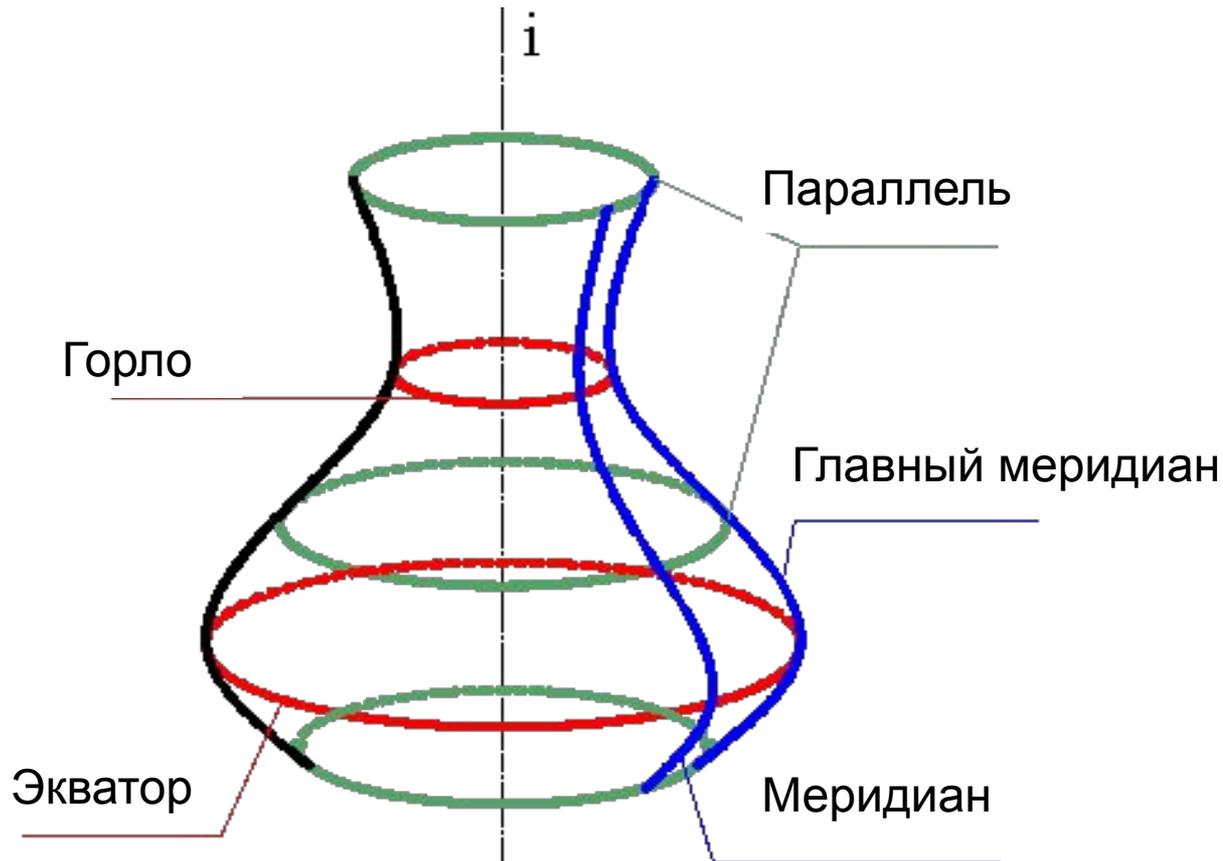
Гиперболический параболоид образуется движением прямолинейной образующей ( $l$ ) по двум прямолинейным направляющим ( $m, n$ ) – (скрещивающимся прямым) параллельно некоторой плоскости параллелизма  $\Sigma$ .

Гиперболический параболоид – поверхность дважды линейчатая. Она содержит два семейства прямолинейных образующих. Если принять за направляющие прямые  $AB$  и  $CD$ , а плоскость параллелизма  $S \perp \Pi_1$ , получим первое семейство образующих. Если принять за направляющие  $BC$  и  $AD$  и другую плоскость параллелизма  $T \perp \Pi_1$ , то получим второе семейство образующих



- Образующие одного семейства-скрещивающиеся прямые
- Каждая образующая одного семейства пересекает все образующие другого семейства. Т.о. гиперболоид имеет непрерывный сетчатый каркас из двух семейств пересекающихся образующих. Это свойство придает поверхности большую **пространственную жесткость** и хорошую **технологичность возведения**
- Криволинейные очерки поверхности на фронтальной и профильной проекциях являются **параболами**

# Поверхность вращения

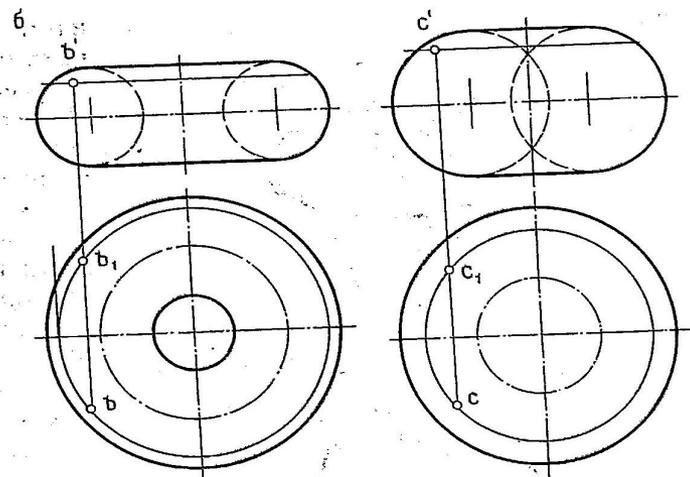
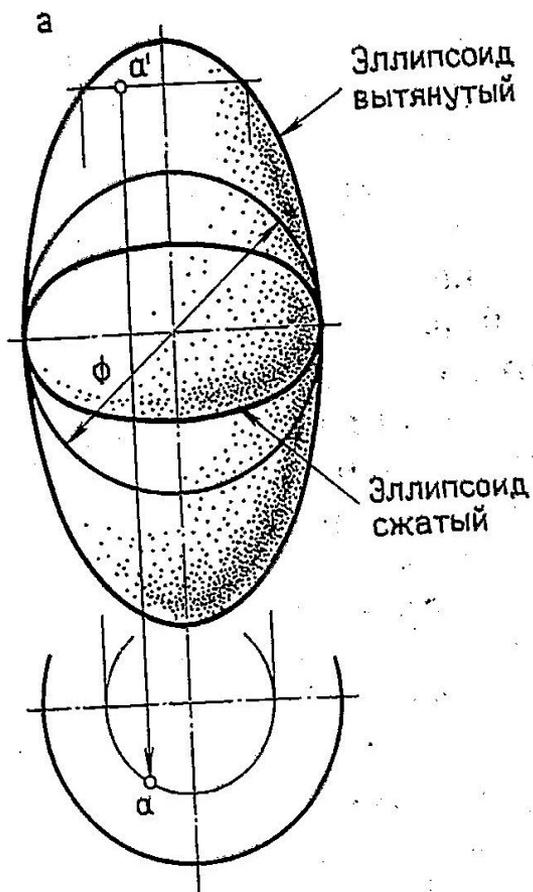


**Определитель поверхности:** ось вращения и образующая

**Закон образования:** Поверхность образуется вращением образующей (прямой или кривой) вокруг неподвижной прямой – оси вращения.

- Сечение поверхности перпендикулярно оси вращения называется **параллелью**. Максимальная параллель – **экватор**. Минимальная- **горло** поверхности.
- Сечение поверхности вдоль оси – **меридианы**. Главный меридиан расположен параллельно плоскости проекций (проецируется в натуральную величину на данную плоскость проекций)

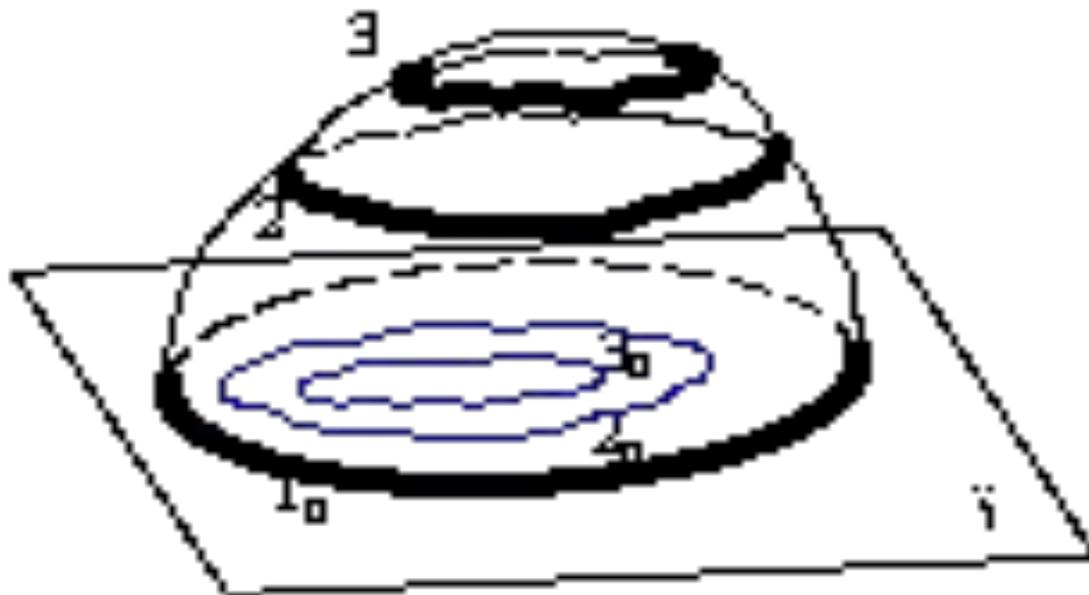
**Тор** – образуется вращением окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности. Если окружность не пересекает ось вращения- открытый тор или кольцо. Если ось касается окружности – закрытый тор. Если пересекает- самопересекающийся тор.



# Каркасные поверхности

- Поверхности, к которым нельзя применить математические или геометрические закономерности, задают сеть линий, заполняющих поверхность и являющихся линейчатым каркасом поверхности.
- Поверхности, заданные графически семейством линий, принадлежащих поверхности, называют **каркасными**
- Каркас поверхности в этом случае называют **дискретным** в отличие от непрерывного каркаса поверхностей, заданных кинематическим способом. Точки и линии, не лежащие на линиях дискретного каркаса, могут быть построены только приближенно.

**Пример:** земная поверхность, заданная дискретным каркасом линий уровня- горизонталями и называемая топографической поверхностью. Поверхности такого вида называют графическими, т.к. их можно задать только чертежом.



# Построение кривой линии, лежащей на поверхности вращения

Точка « A » лежит на **главном меридиане**.

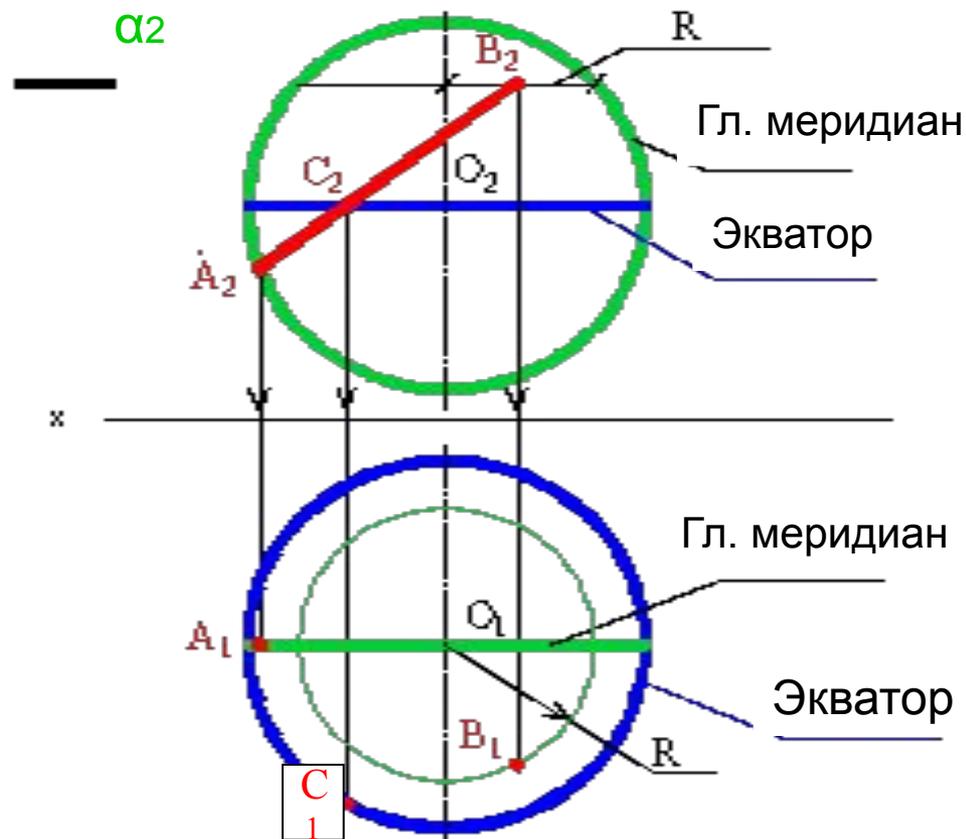
$A_2 \rightarrow A_1$

Точка « C » лежит на **экваторе**.

$C_2 \rightarrow C_1$

Для построения точки « B » пересекаем сферу плоскостью «  $\alpha$  », строим параллель радиуса « R » и указываем на ней точку « B »

$R \rightarrow B_2 \rightarrow B_1$



## Построение кривой линии, лежащей на поверхности вращения

Для построения точки « **D** » пересекаем сферу плоскостью «  $\alpha$  », строим параллель радиуса «  $R_1$  » и указываем на ней точку « **D** ».

$$R_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_1$$

Чтобы построить точку « **E** » пересекаем сферу плоскостью «  $\beta$  ». Строим параллель радиуса «  $R_2$  » и указываем на ней точку « **E** ».

$$R_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$$

На горизонтальной плоскости проекций соединяем проекции точек **B**<sub>1</sub>, **D**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub>, **E**<sub>1</sub>, **A**<sub>1</sub>. Часть проекции кривой линии **B**<sub>1</sub>**D**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub> - видима, так как лежит выше экватора. Точка « **C** » - граница видимости. Часть линии **A**<sub>1</sub>**E**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub> – не видима, так как находится ниже экватора.

