Лекция 4

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей. Позиционные задачи

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

Прямая и плоскость:

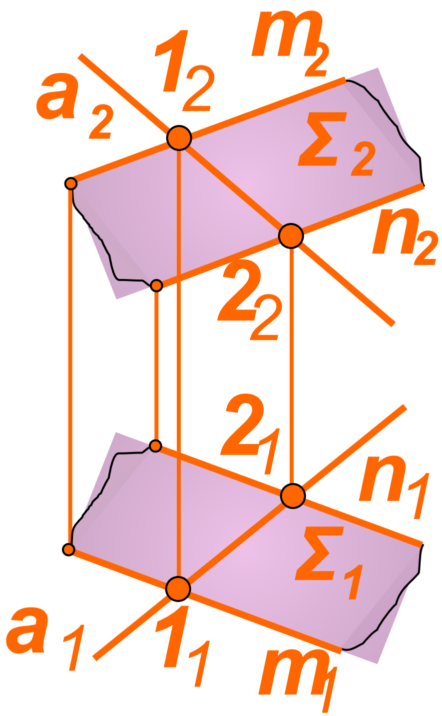
- **Прямая принадлежит плоскости (см. тема 3):** ***все точки прямой являются точками плоскости***
- **Прямая параллельна плоскости:** ***общих точек нет***
- **Прямая пересекает плоскость:** ***одна общая точка***

Две плоскости:

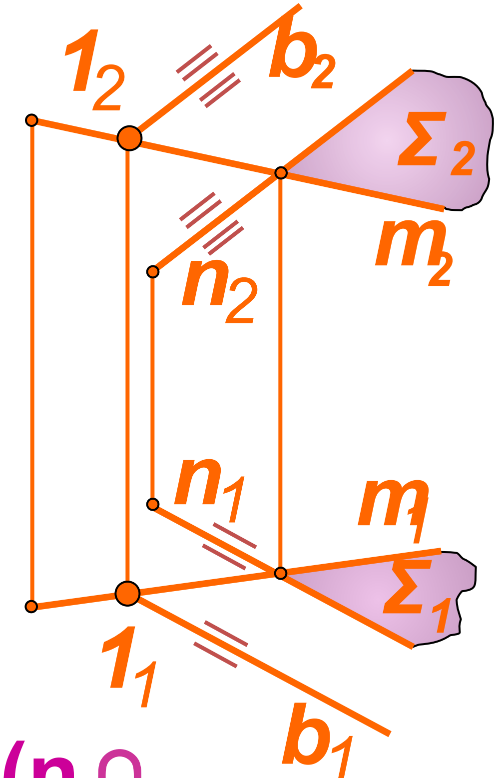
- **Плоскости параллельны:** ***общих прямых нет***
- **Плоскости пересекаются:** ***одна общая прямая***

Принадлежность прямой плоскости

1



2



$\Sigma(n \parallel m)$

$(1 \in m) \in \Sigma;$

$(2 \in n) \in \Sigma$

$a = (1, 2) \Rightarrow$

$a \in \Sigma$

$\Sigma(n \cap m)$

$(1 \in m) \in \Sigma;$

$b \ni 1$

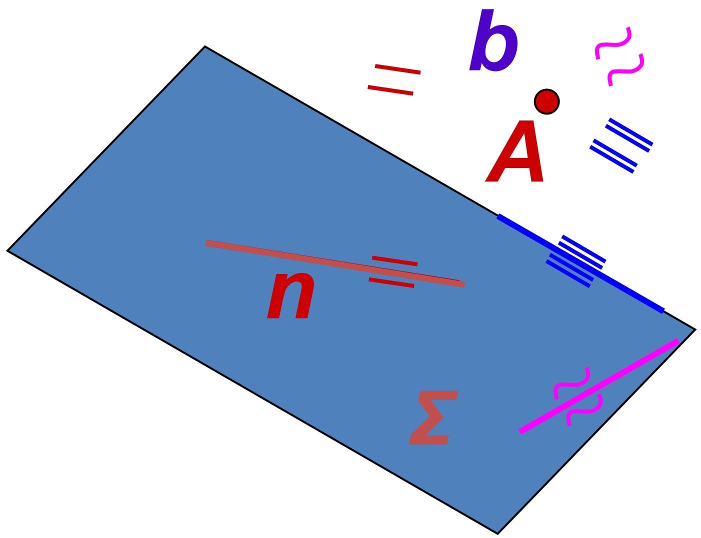
$b \parallel n \Rightarrow$

$b \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

1) через две точки этой плоскости;
2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости

Параллельность прямой и плоскости



Признак параллельности:

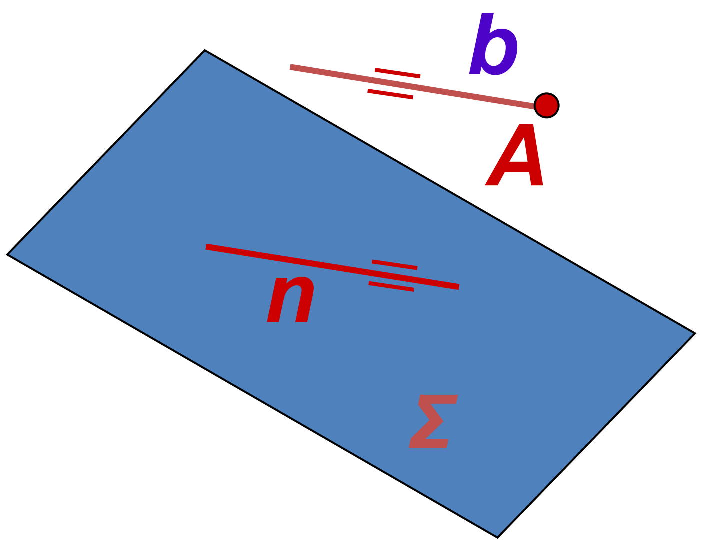
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

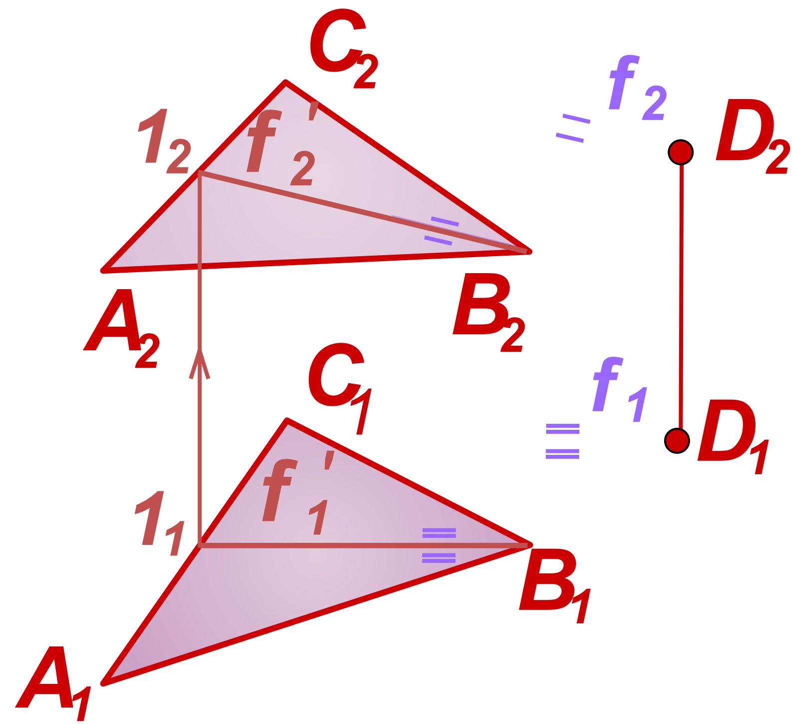
$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

Через точку *A* в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных данной плоскости *Σ*. Для однозначного решения проведем в плоскости прямую *n*

Параллельность прямой и плоскости

Задача: **Через точку D провести фронталь, параллельную плоскости Σ(ΔABC)**

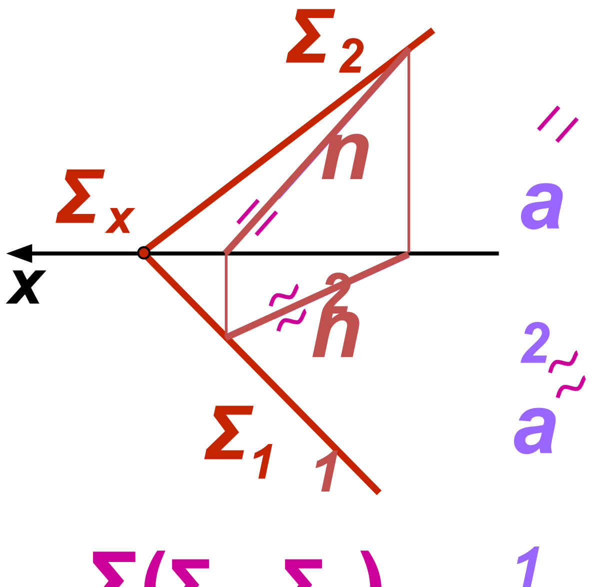




$\mathbf{b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma}$

Построим в плоскости *Σ* (Δ*ABC*) вспомогательную фронталь *f '*. Через точку *D* проводим фронталь *f* , проекции которой параллельны одноименным проекциям фронтали *f '*. Получаем искомую прямую *f* , параллельную заданной плоскости *Σ* (Δ*ABC*)

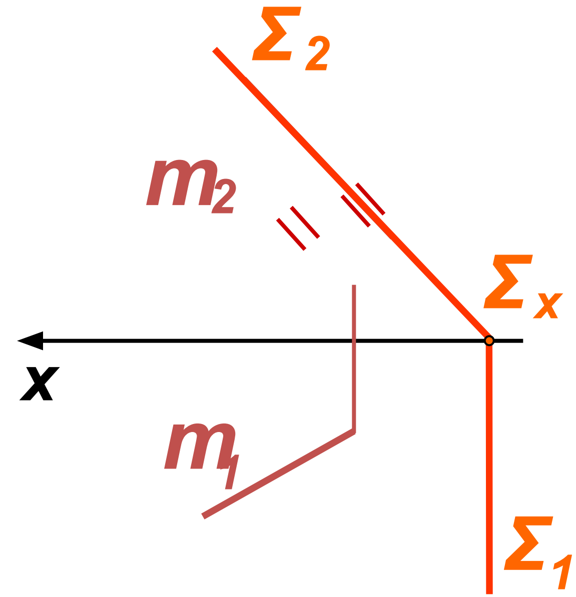
Параллельность прямой и плоскости



$\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$

$n \in \Sigma$

$a \parallel n$ $\Rightarrow$ $a \parallel \Sigma$

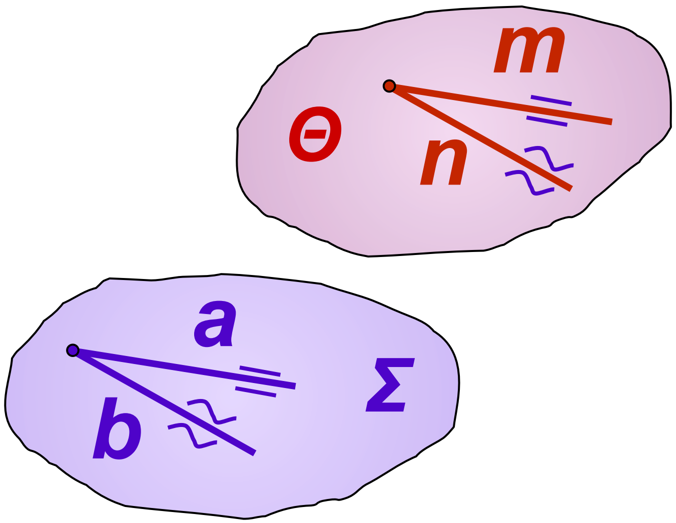


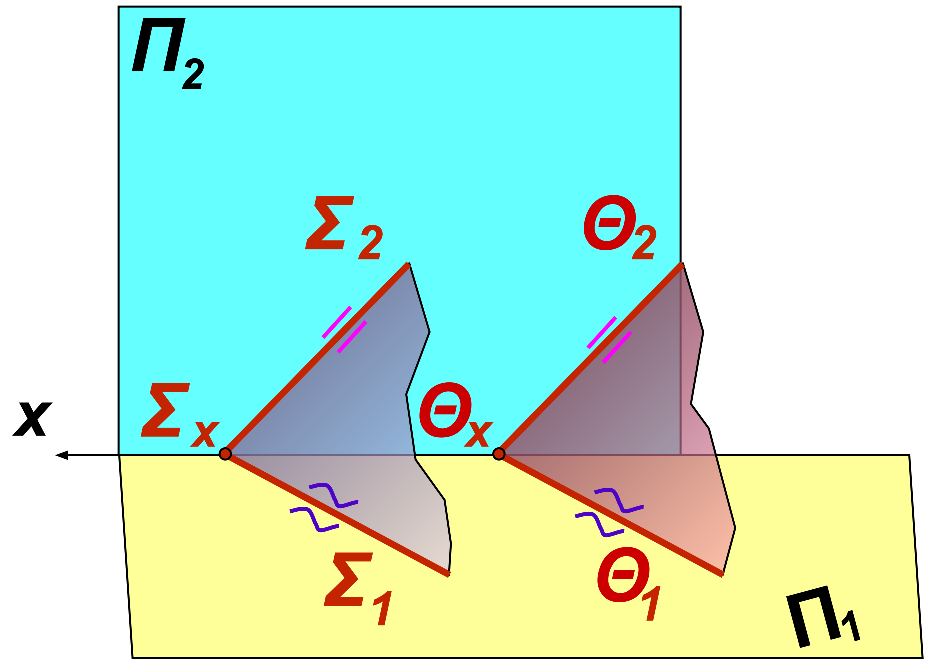
$\Sigma \perp \Pi_2$

$m_2 \parallel \Sigma_2 \Rightarrow m \parallel \Sigma$

Если прямая *a* параллельна плоскости общего положения, то в плоскости строят вспомогательную прямую *n* и выполняют условие параллельности одноименных проекций прямых *a* и *n*. Если плоскость проецирующая, то одна из проекций искомой прямой *m* параллельна следу плоскости

Параллельность двух плоскостей





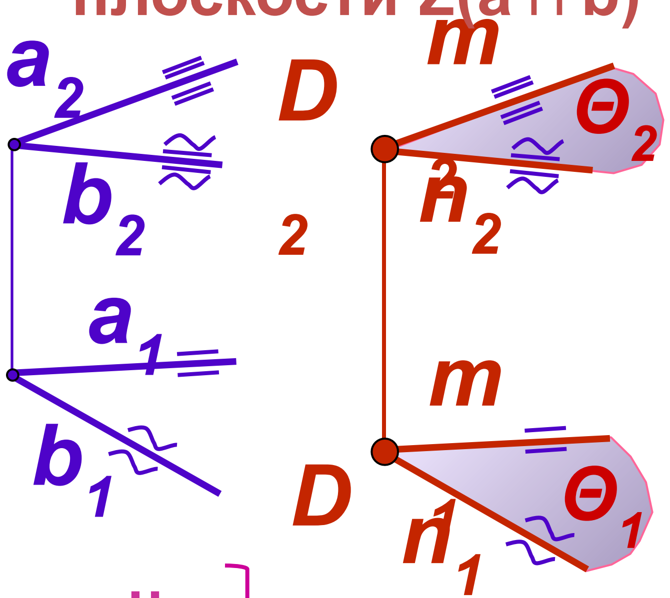
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel m \\ b \parallel n \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 \parallel \Theta_1 \\ \Sigma_2 \parallel \Theta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

Признак параллельности: плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. В качестве прямых могут быть использованы следы плоскостей

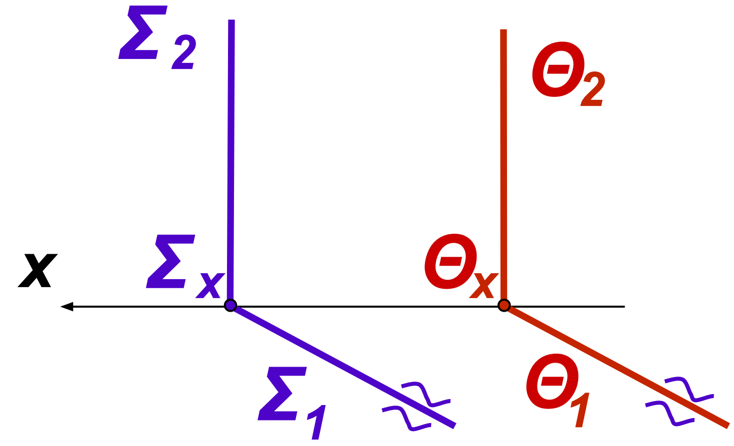
Параллельность двух плоскостей

Задача 1: **Через точку D провести плоскость Θ, параллельную плоскости Σ(a ∩ b)**



$$\left.\begin{matrix} m_1 \parallel a_1 \\ n_1 \parallel b_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

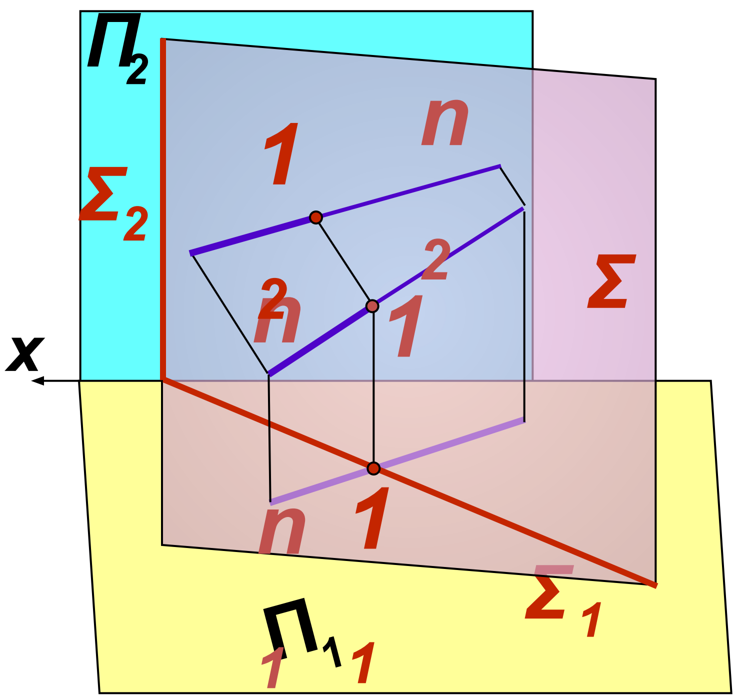
Задача 2: **Построить плоскость Θ || Σ ⊥ П$_1$**

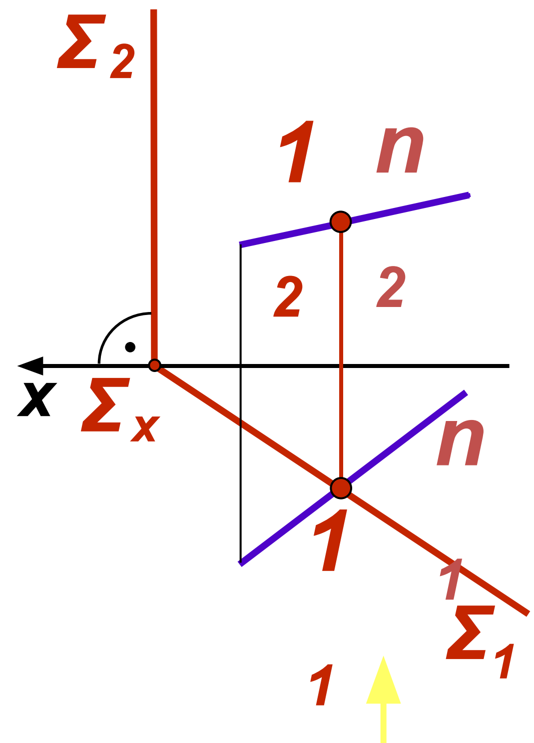


$$\Theta_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

1. Искомая плоскость *Θ* задается двумя пересекающимися прямыми *m* и *n*, проекции которых соответственно параллельны проекциям прямых *a* и *b* заданной плоскости.
2. У параллельных плоскостей *Θ* и *Σ* следы параллельны

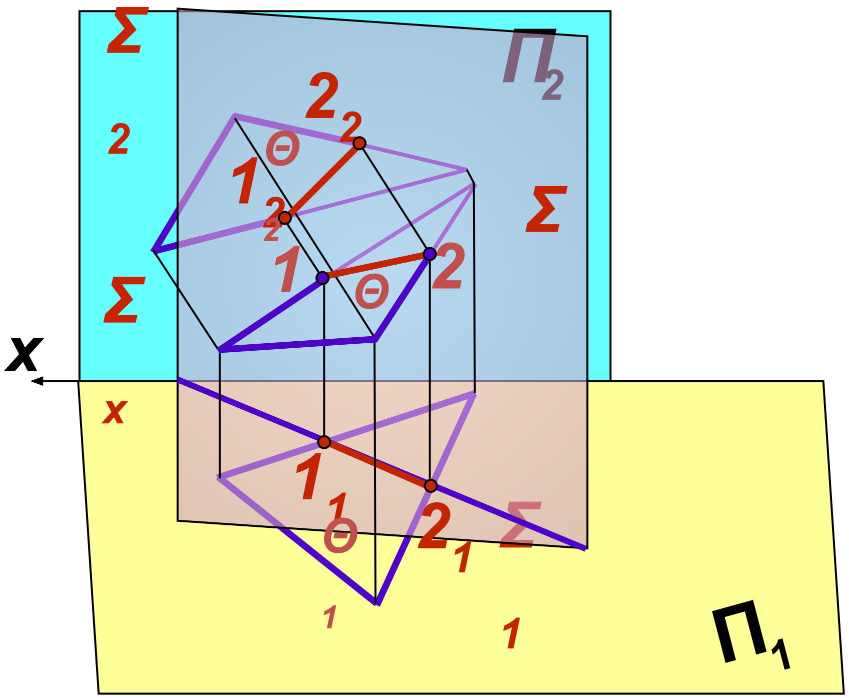
Пересечение прямой с проецирующей плоскостью





Одна из проекций точки 1 (пересечения прямой *n* с проецирующей плоскостью *Σ*) находится на пересечении следа плоскости Σ_1 с проек-цией прямой n_1. Видимость прямой определяется по направлению взгляда наблюдателя, плоскость считается непрозрачной

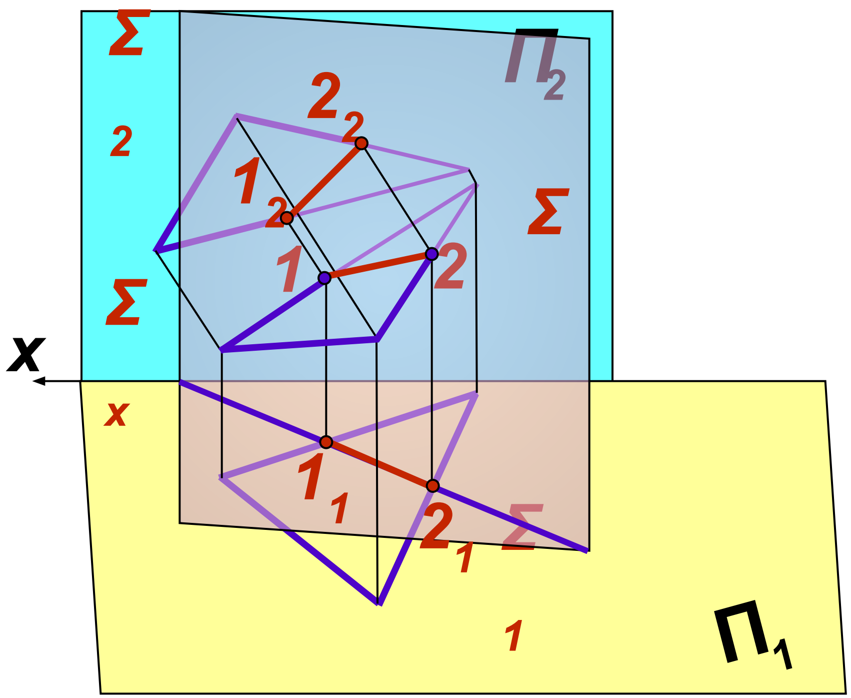
Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью

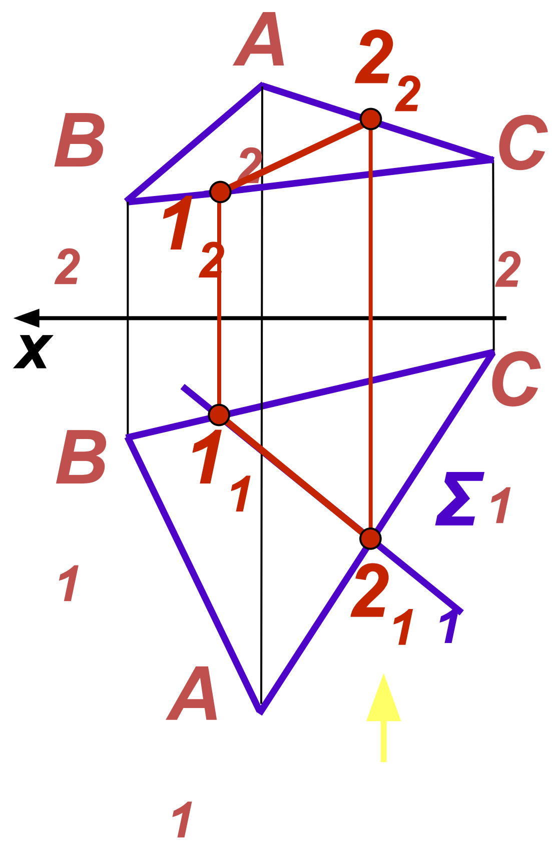


Σ – горизонтально проецирующая плоскость;
$\Theta(\Delta)$ – плоскость общего положения

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Необходимо найти две точки искомой линии пересечения, которые принадлежат одновременно двум плоскостям

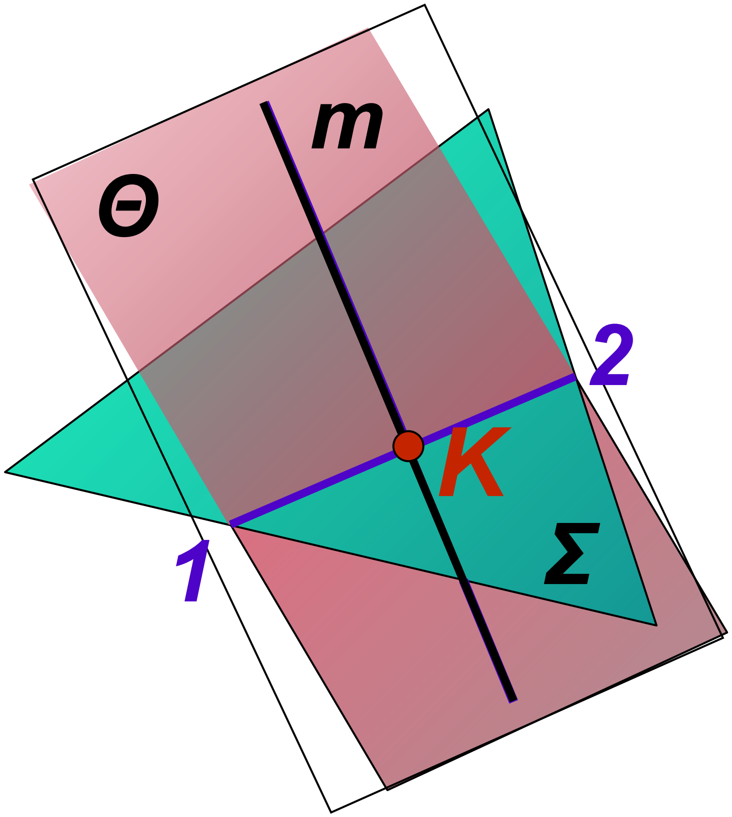
Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью





Горизонтально проецирующая плоскость *Σ* проецируется на Π_1 в виде следа, которому принадлежит проекция $1_1 2_1$ искомой линии пересечения. Часть треугольника, находящаяся перед плоскостью *Σ* , будет видима на Π_2. Линия $1_2 2_2$ служит границей видимости

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

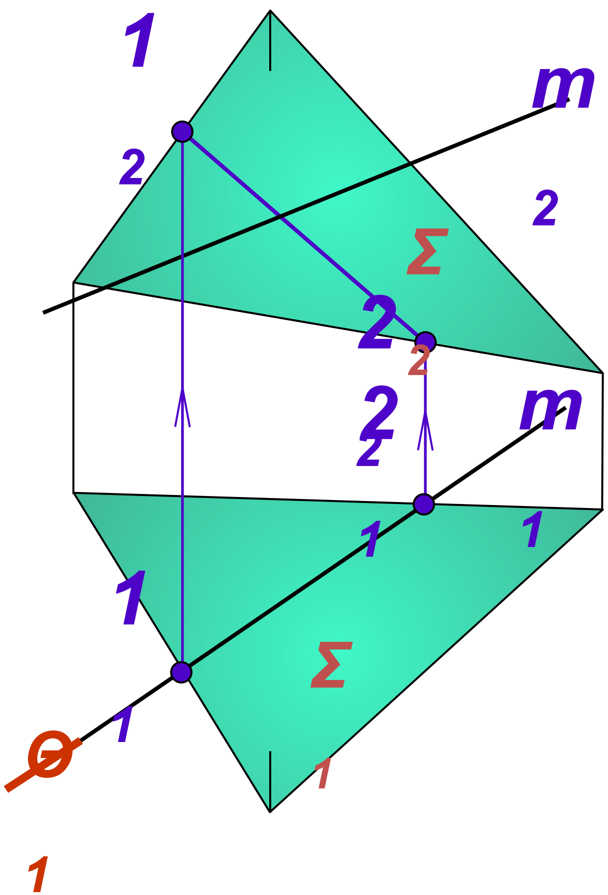


Алгоритм:

1. $m \in \Theta$
2. $\Theta \cap \Sigma = 1\text{-}2$
3. $1\text{-}2 \cap m = K$
4. Видимость m

1. Через данную прямую *m* проводят вспомогательную плоскость *Θ* .
2. Находят линию пересечения 1-2 плоскостей: заданной *Σ* и вспомогательной *Θ* . 3. На полученной линии пресечения 1-2 находят общую точку *K* с заданной прямой *m* . 4. Определяют видимость прямой *m*

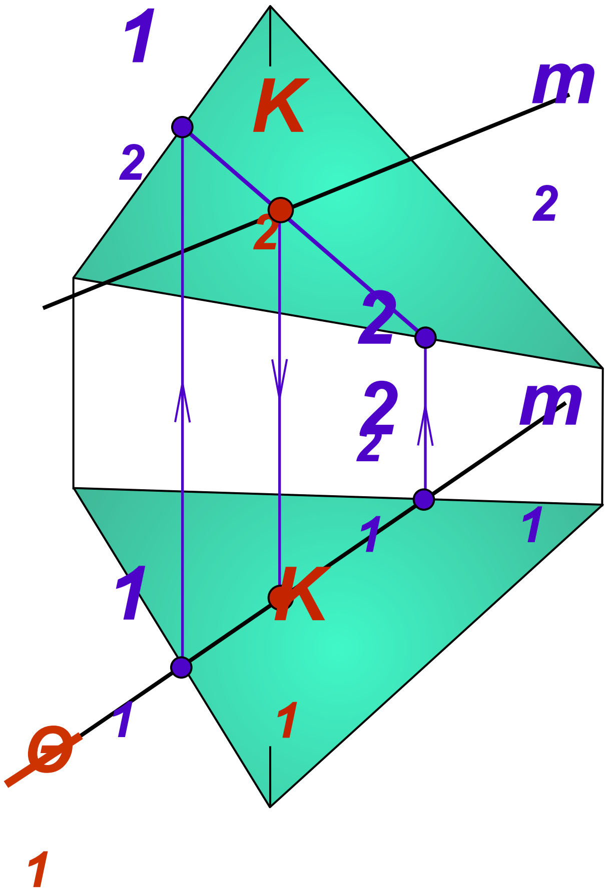
1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta)=1\text{-}2$;
   $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

В качестве вспомогательной выбираем горизонтально проецирующую плоскость *Θ* (*Θ_1*), проходящую через заданную прямую *m* . Строим горизонтальную $1_1 2_1$, а затем фронтальную $1_2 2_2$ проекции линии пересечения вспомогательной плоскости *Θ* с данным треугольником *Σ*

1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



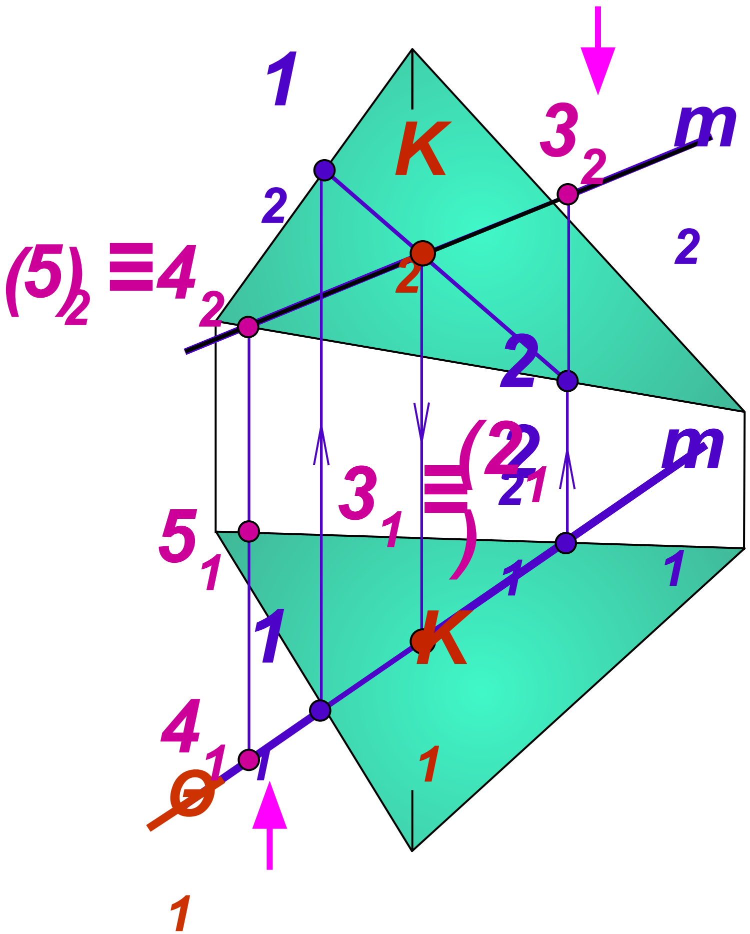
1. $m \in \Theta$;

   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1\text{-}2$;

   $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1\text{-}2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$

Находим фронтальную проекцию K_2 точки пересечения *К* линии 1-2 и данной прямой *m* . Горизонтальная проекция K_1 искомой точки пересечения будет принадлежать горизонтальной проекции m_1 прямой *m*

1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1\text{-}2$;
   $1_1 2_1 \to 1_2 2_2$
3. $1\text{-}2 \cap m = K$; $K_2 \to K_1$
4. Видимость m
   (по конкурирующим точкам)

Видимость горизонтальной проекции прямой определяют по горизонтально конкурирующим точками 3 и 2 ($3 \in m$; $2 \in \Sigma$). Видимость фронтальной проекции прямой определяют по фронтально конкурирующим точками 4 и 5 ($4 \in m$; $5 \in \Sigma$). Видимость прямой *m* меняется в точке