

# ЛЕКЦИЯ №9

# Развёртки поверхностей

- Некоторые поверхности можно постепенным изгибанием совместить с плоскостью так, что при этом не возникает ни разрывов, ни складок. Поверхности, обладающие этим свойством, называются ***развертывающимися***, а фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью – ***разверткой*** данной поверхности.

# Развёртки поверхностей обладают следующими свойствами:

1. При разворачивании поверхности на плоскость длины линий, лежащих на ней, сохраняются.
2. Углы, образованные линиями на развертке, и углы между соответствующими линиями на поверхности равны.
3. Замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь. Из этого следует, что площадь развертки равна площади самой поверхности.
4. Прямой на поверхности соответствует прямая на развертке.
5. Параллельным прямым на поверхности соответствуют параллельные прямые на развертке.

# Классификация разверток поверхностей

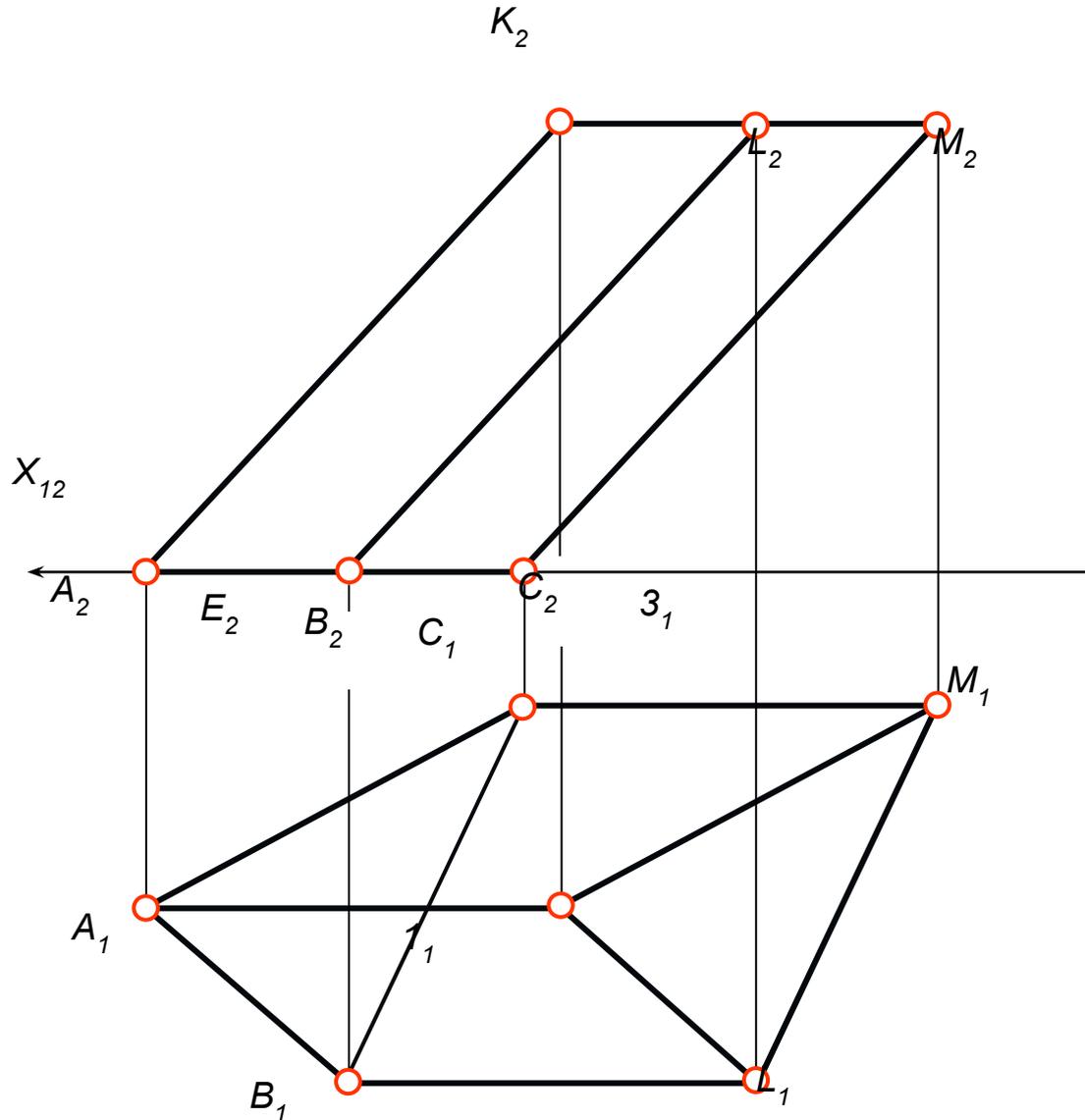
Развертки поверхностей делятся на:

- ***точные*** – развертки многогранников и прямых круговых цилиндров и конусов, если параметры разверток рассчитывались по формулам;
- ***приближенные*** – развертки развертывающихся линейчатых поверхностей;
- ***условные*** – развертки неразвертывающихся поверхностей.

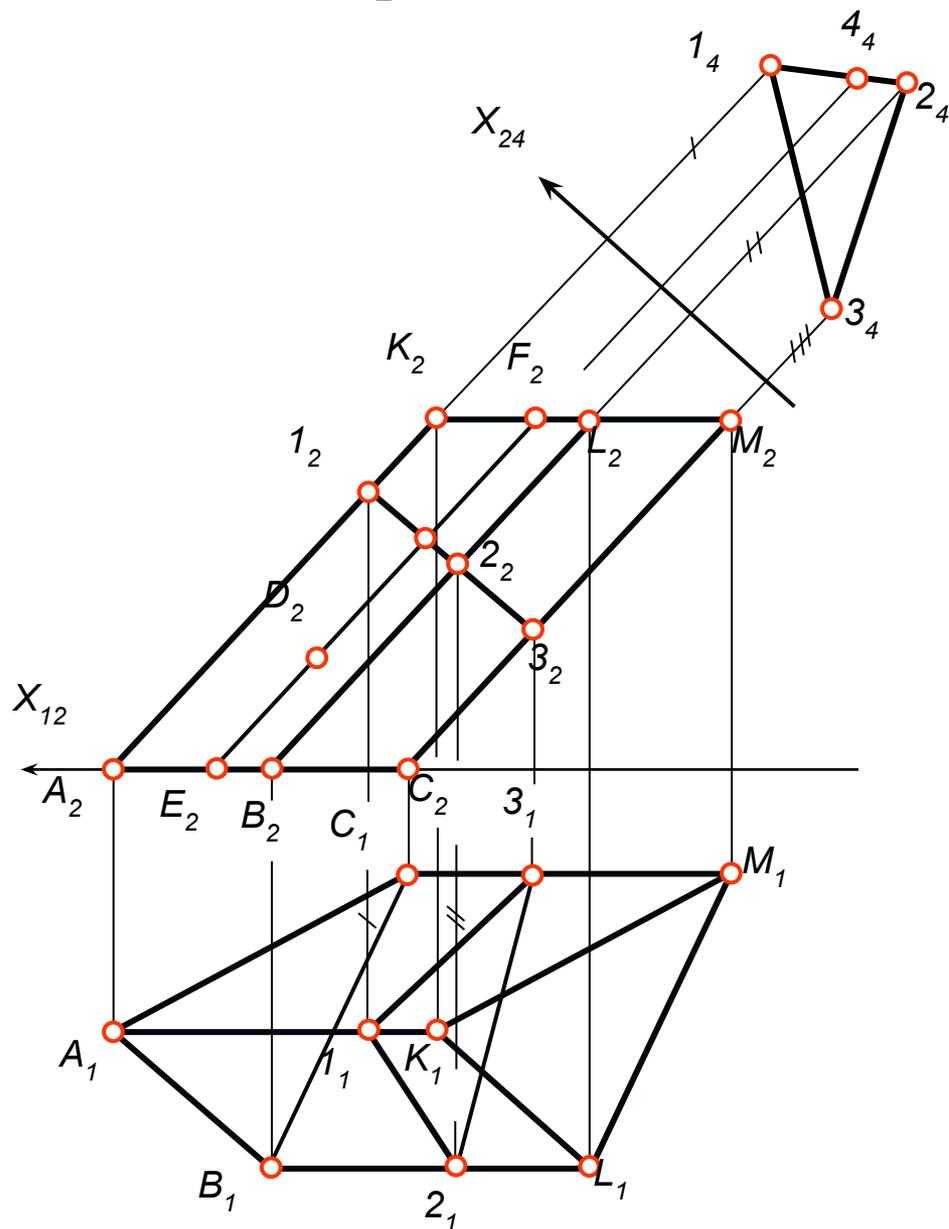
# Построение точных разверток многогранников

- Для построения разверток многогранников применяются следующие способы:
  - **нормального сечения** – для призм;
  - **раскатки** – для призм;
  - **триангуляции (треугольников)** – для любого многогранника

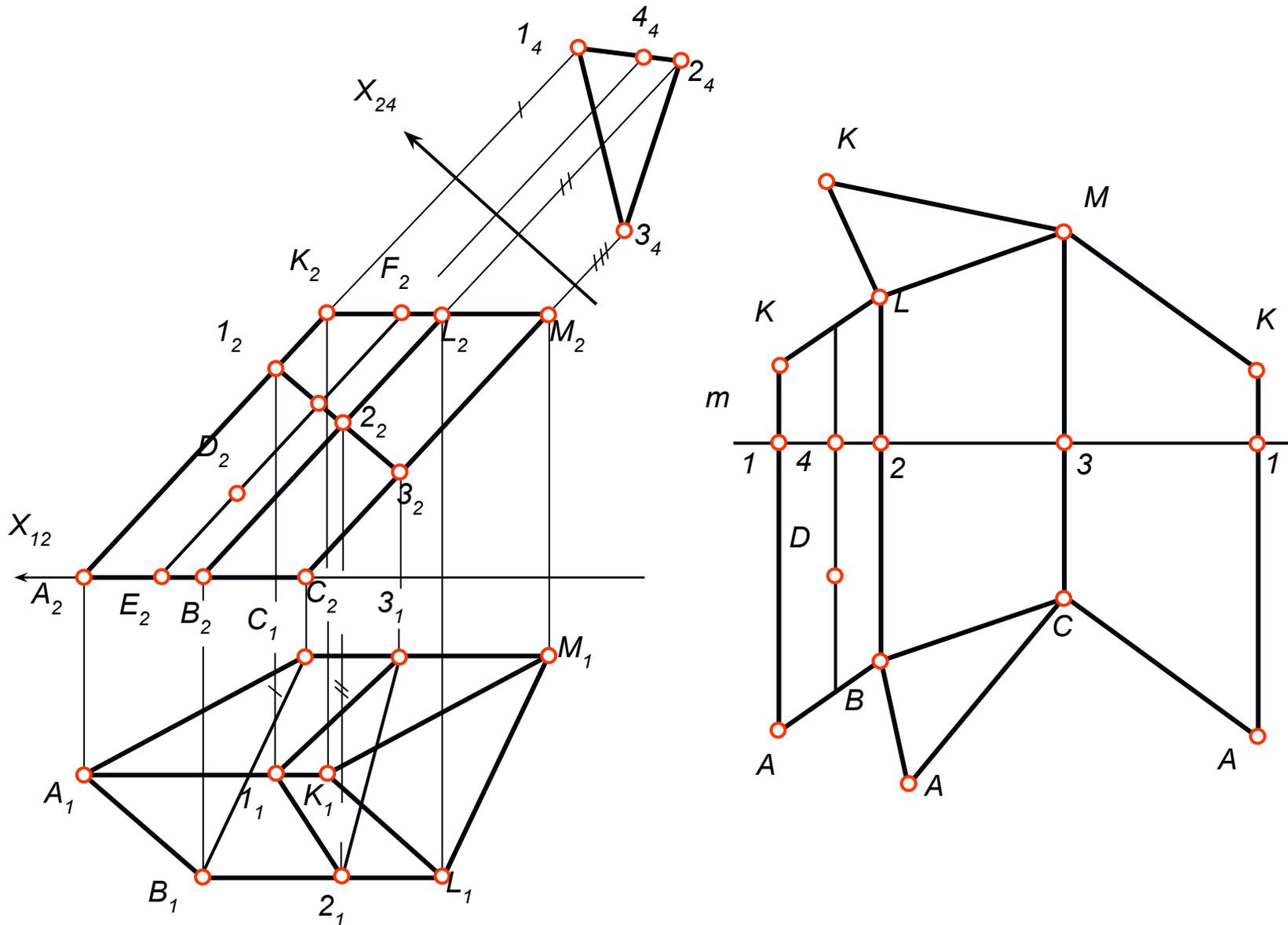
# Способ нормального сечения



# Способ нормального сечения



# Способ нормального сечения



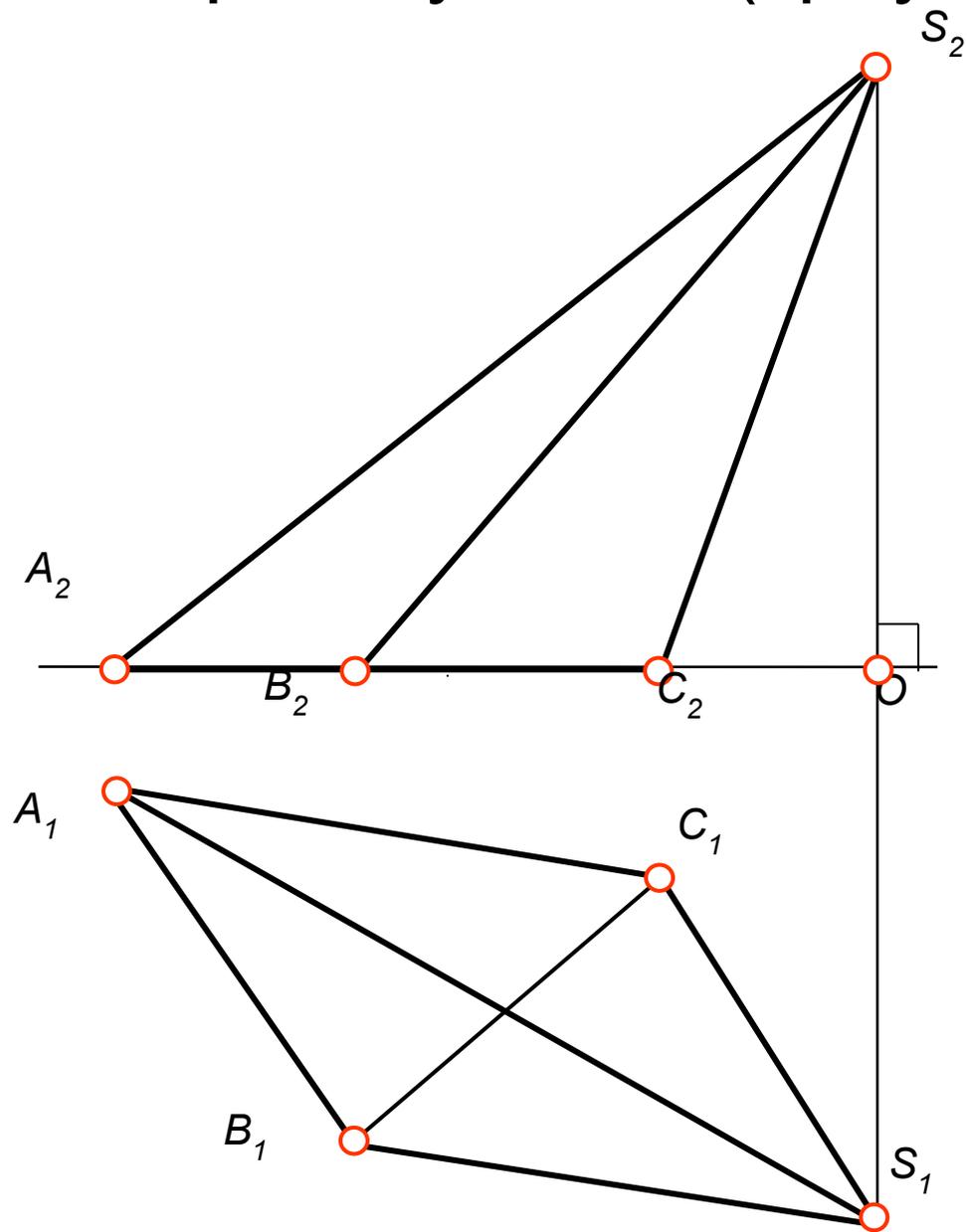
# ***Способ нормального сечения***

- Сущность данного способа построения развертки призмы заключается в следующем. Заданную призму пересекают плоскостью, перпендикулярной боковым рёбрам, и строят проекции и натуральную величину сечения призмы этой плоскостью (нормальное сечение). Также необходимо определить натуральную величину отрезков боковых рёбер призмы, лежащих выше и ниже нормального сечения. Далее на свободном поле чертежа проводят горизонтальную линию и на ней от произвольной точки откладывают друг за другом стороны нормального сечения призмы. Через полученные точки проводят вертикальные прямые линии, на которых вниз откладывают натуральные величины отрезков боковых рёбер призмы, лежащих ниже нормального сечения, а вверх – натуральные величины отрезков боковых рёбер призмы, лежащих выше нормального сечения. Соединив построенные точки между собой отрезками прямых, получим развертку боковой поверхности призмы. Добавив к ней натуральные величины верхнего и нижнего оснований, получим полную развертку поверхности призмы

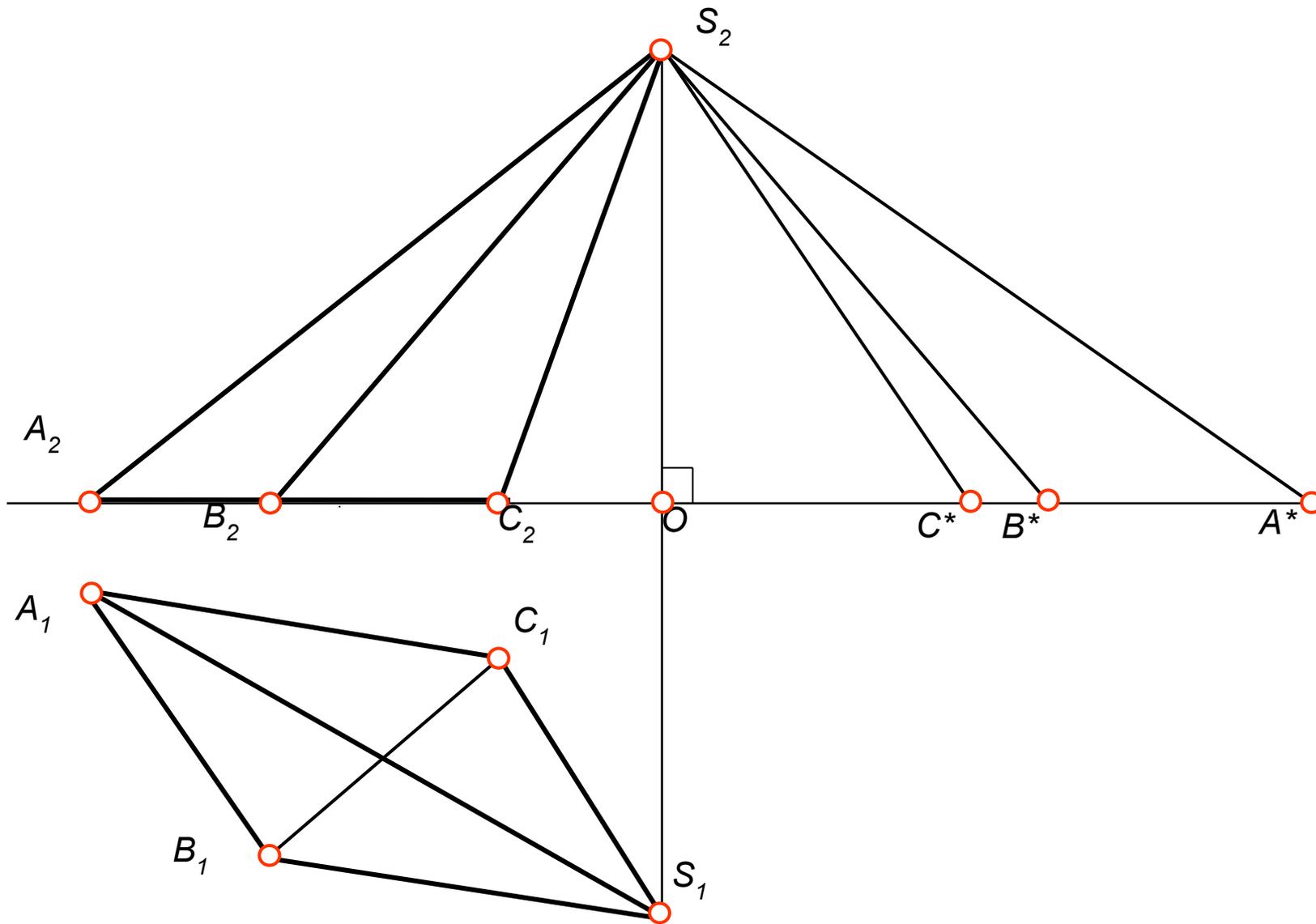
# Способ триангуляции (треугольников)

- Этот способ позволяет строить развёртки любого многогранника. Для этого боковые грани многогранника разбиваются диагоналями на треугольники (для призм и призматоеидов, у пирамид грани уже треугольные). Одним из известных способов необходимо найти натуральные величины всех боковых ребер и оснований многогранника

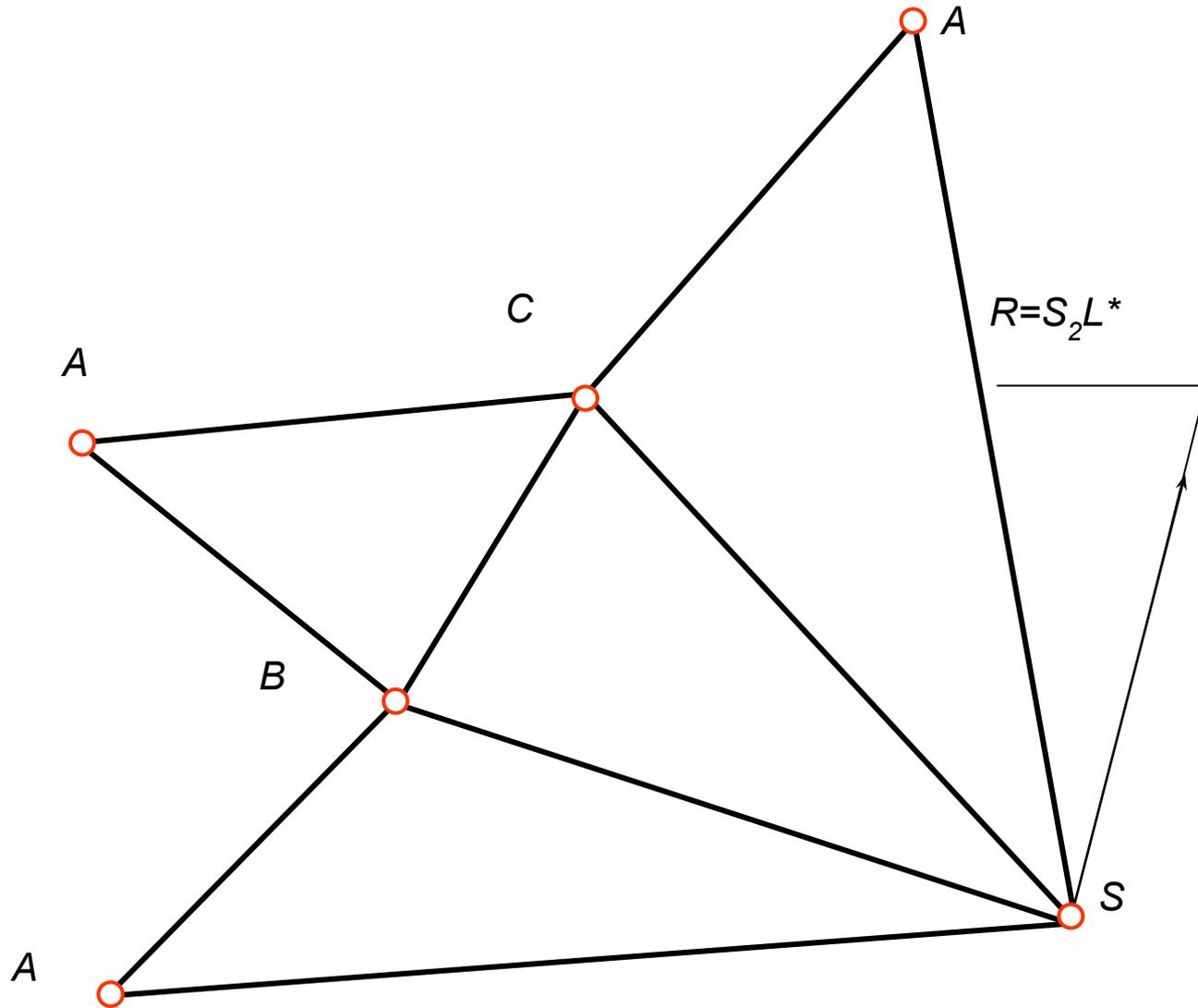
# Способ триангуляции (треугольников)



# Способ триангуляции (треугольников)



# Способ триангуляции (треугольников)

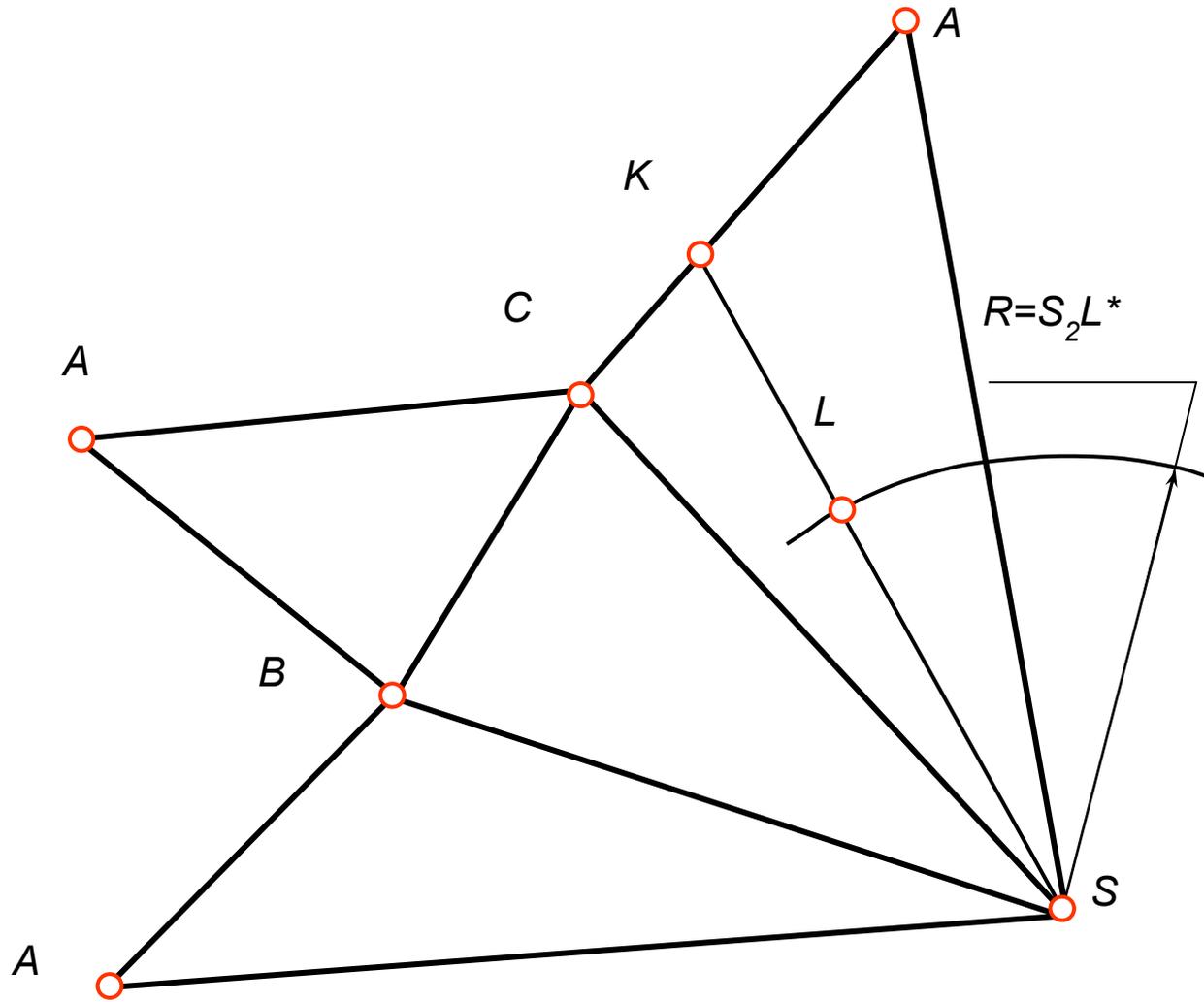


## Способ триангуляции (треугольников)

- Построение на развёртке точки  $L$ , лежащей на поверхности пирамиды. Для этого проведена вспомогательная прямая  $SK$ , проходящая через точку  $L$ . Затем на развёртке сначала строится эта прямая  $SK$ , а затем и точка  $L$ .



# Способ триангуляции (треугольников)

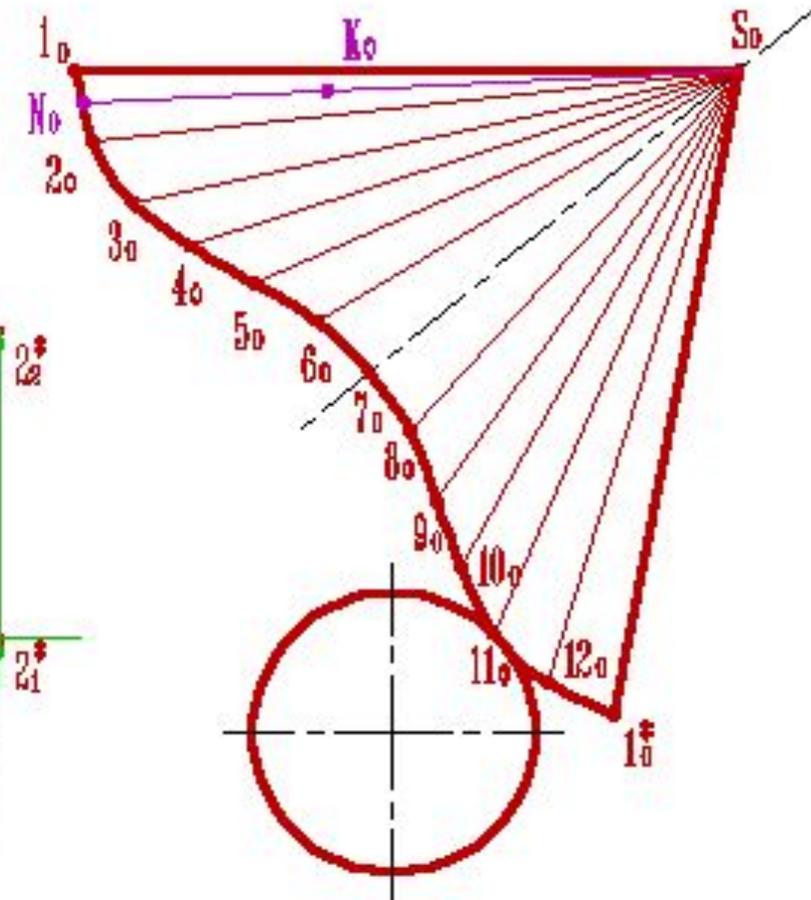
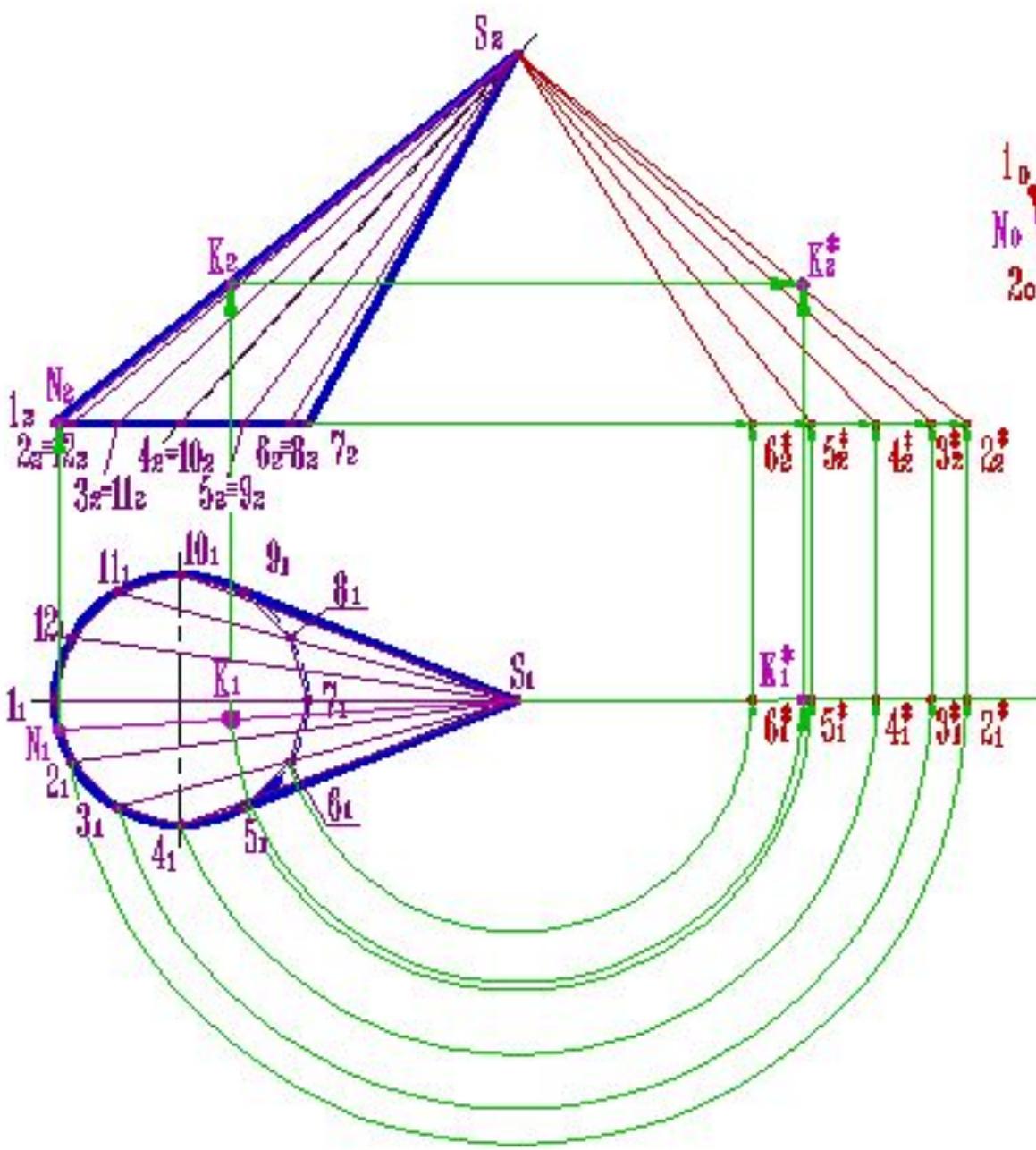


# Построение приближенных разверток развертывающихся линейчатых поверхностей

- Для развертывающихся линейчатых поверхностей строят приближенные развертки потому, что в процессе построения развертки заданную поверхность заменяют (аппроксимируют) вписанной в неё или описанной вокруг неё многогранной поверхностью (цилиндрические поверхности заменяют призмами, конические поверхности – пирамидами). Для этого замкнутую направляющую линейчатой поверхности заменяют многоугольником, а разомкнутую направляющую – ломаной. Через вершины многоугольника (или ломаной) проводят боковые рёбра многогранника. Точную развертку этого многогранника принимают за приближенную развертку данной развертываемой поверхности. Точность построенной развёртки во многом зависит от того, насколько близок многогранник к исходной линейчатой поверхности. Развёртку многогранника строят любым из рассмотренных способов. После построения развёртки боковой поверхности заменяющей пирамиды или призмы концы боковых рёбер необходимо соединить между собой плавной линией.

# Развертка конической поверхности

- Развертка конической поверхности выполняется аналогично развертке пирамиды, предварительно вписав в конус  $n$ -угольную пирамиду
- Если задана поверхность прямого конуса, то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности  $l$ , а центральный угол  $\varphi = 360^\circ r / l$ , где  $r$  – радиус окружности основания конуса.

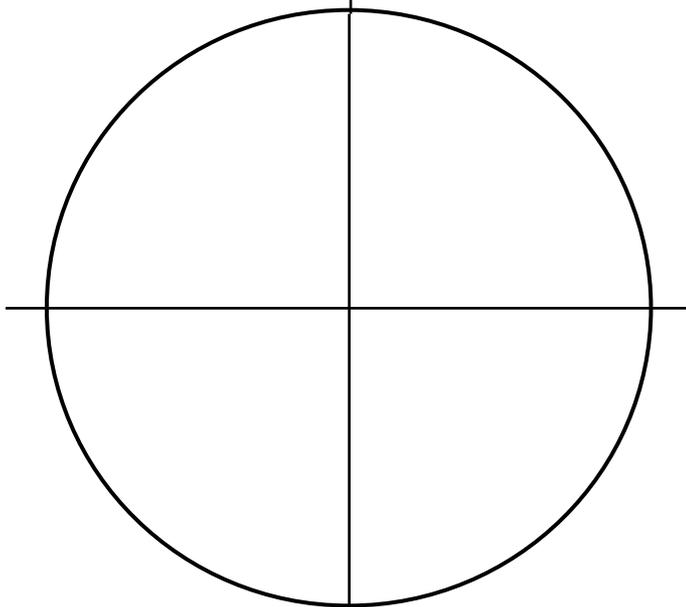
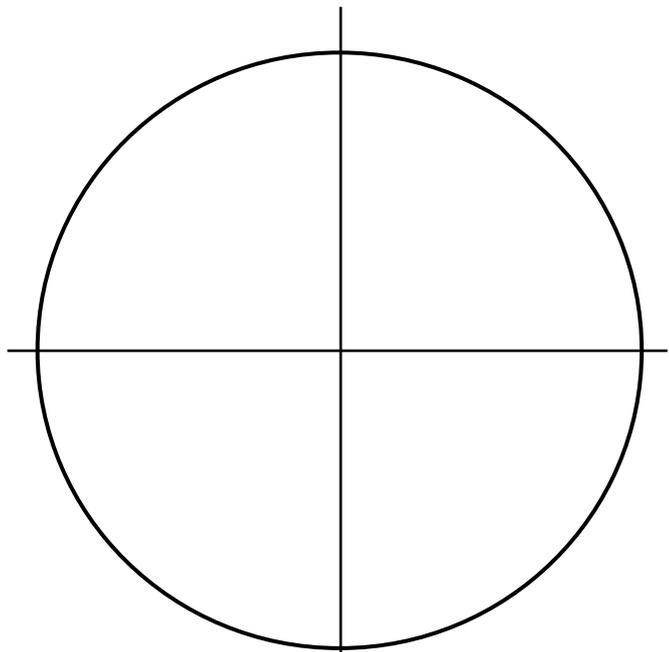


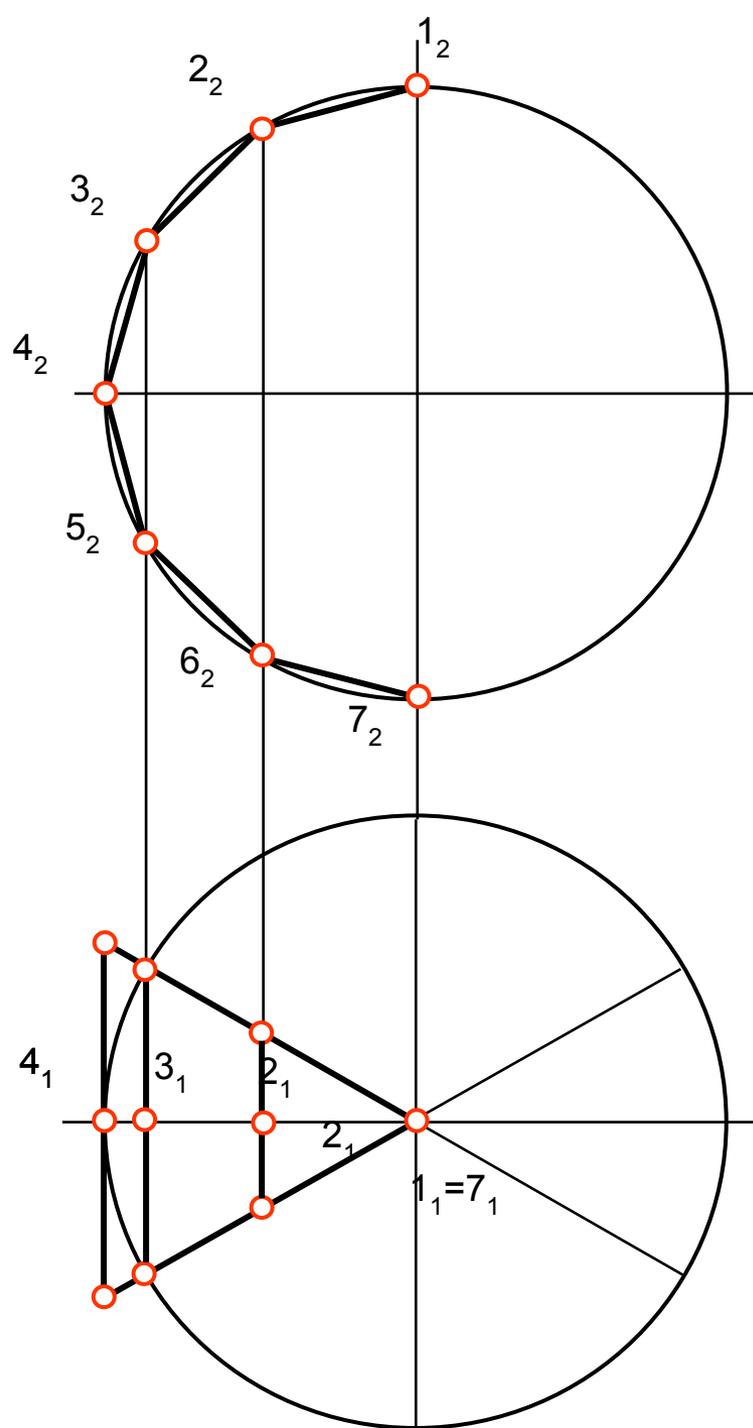
# Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

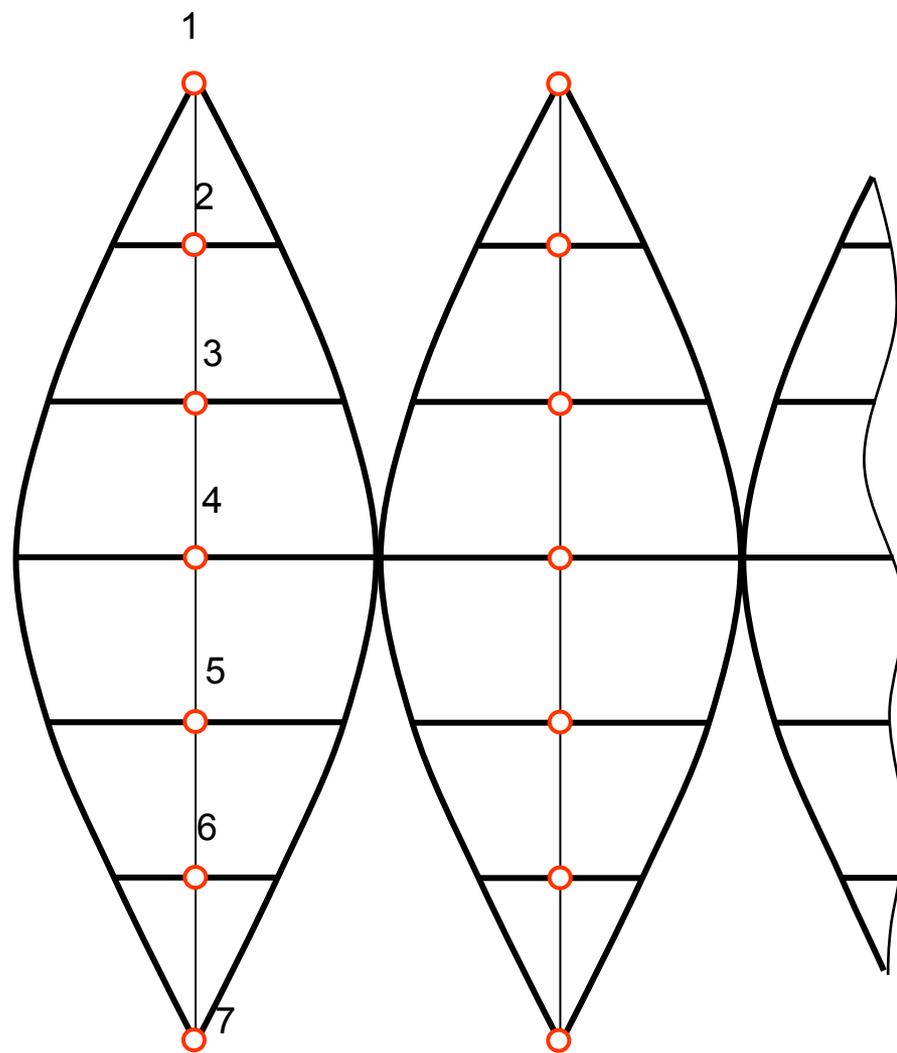
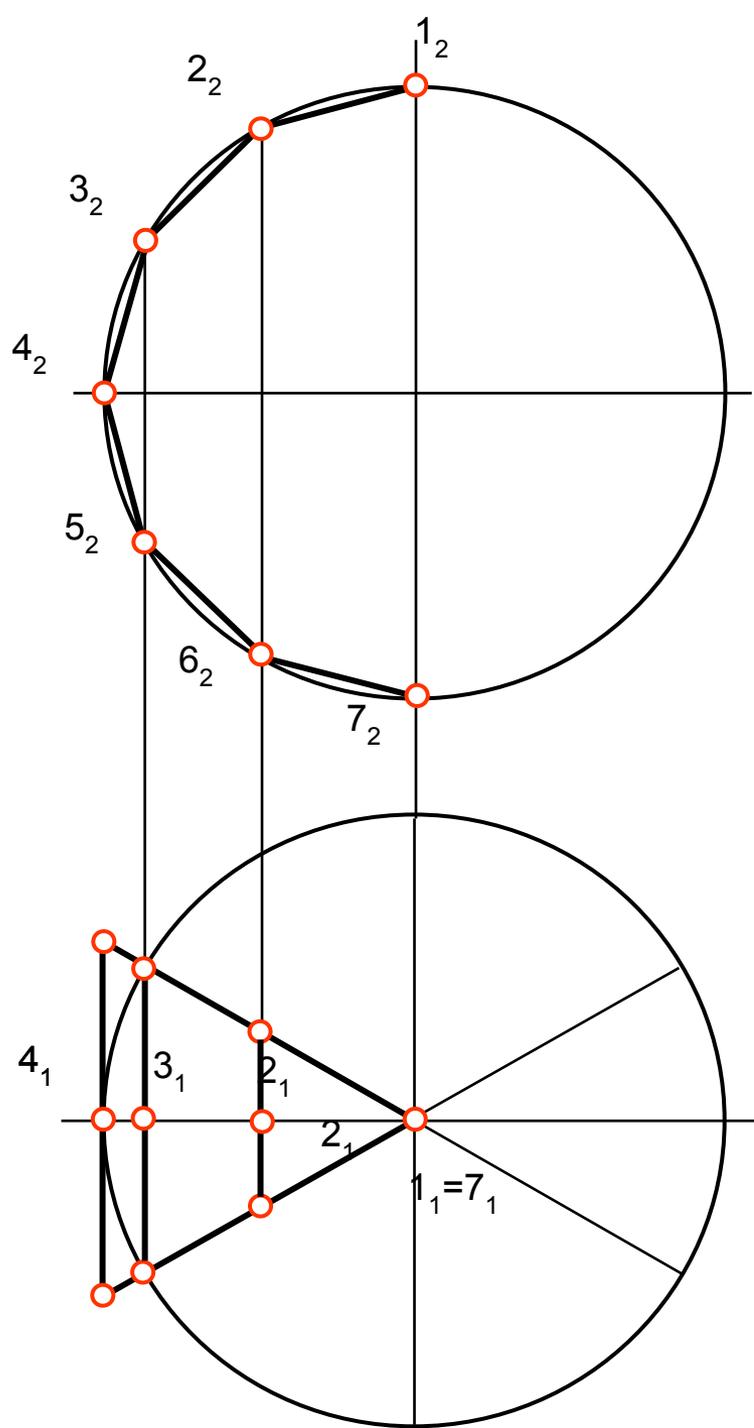
Условные развертки неразвертывающихся поверхностей строят в такой последовательности:

- - данную поверхность «разрезают» (разделяют) на несколько примерно равных частей;
- - каждую из этих частей аппроксимируют отсеком развертывающейся линейчатой поверхности (конуса или цилиндра);
- - выполняют приближенные развертки отсеков аппроксимирующих конусов или цилиндров, совокупность которых принимают за условную развертку данной поверхности.

- Рассмотрим сущность способа несоосных цилиндров на примере построения развёртки сферы
- Сначала сфера разделяется горизонтально проецирующими плоскостями, проходящими через ось сферы, на несколько равных частей аналогично долькам мандарина (в примере на шесть частей).
- Каждая такая часть поверхности вращения заменяется цилиндрической проецирующей поверхностью, направляющей которой является средняя линия этой части поверхности, а образующие перпендикулярны плоскости направляющей.







# Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

- Построение развёртки многогранной поверхности выполняется в следующей последовательности.
- 1. На свободном поле чертежа проводится вертикальная линия и на ней от произвольной точки откладываются друг за другом натуральные величины отрезков *12*, *23*, *34*, *45*, *56* и *67* средней линии многогранной поверхности, взятые на *П<sub>2</sub>*.
- 2. Через точки *2*, *3*, *4*, *5* и *6* проводятся горизонтальные прямые, на которых откладывают отрезки, равные натуральным величинам боковых рёбер многогранной поверхности, взятые на *П<sub>1</sub>*.
- 3. Найденные точки соединяют плавной линией. Получим точную развёртку многогранной поверхности, которая принимается за приближённую развёртку цилиндрической поверхности, заменяющей 1/6 часть поверхности сферы.
- 4. Для построения условной развёртки всей поверхности сферы необходимо достроить ещё пять таких развёрток «лепестков» сферы.

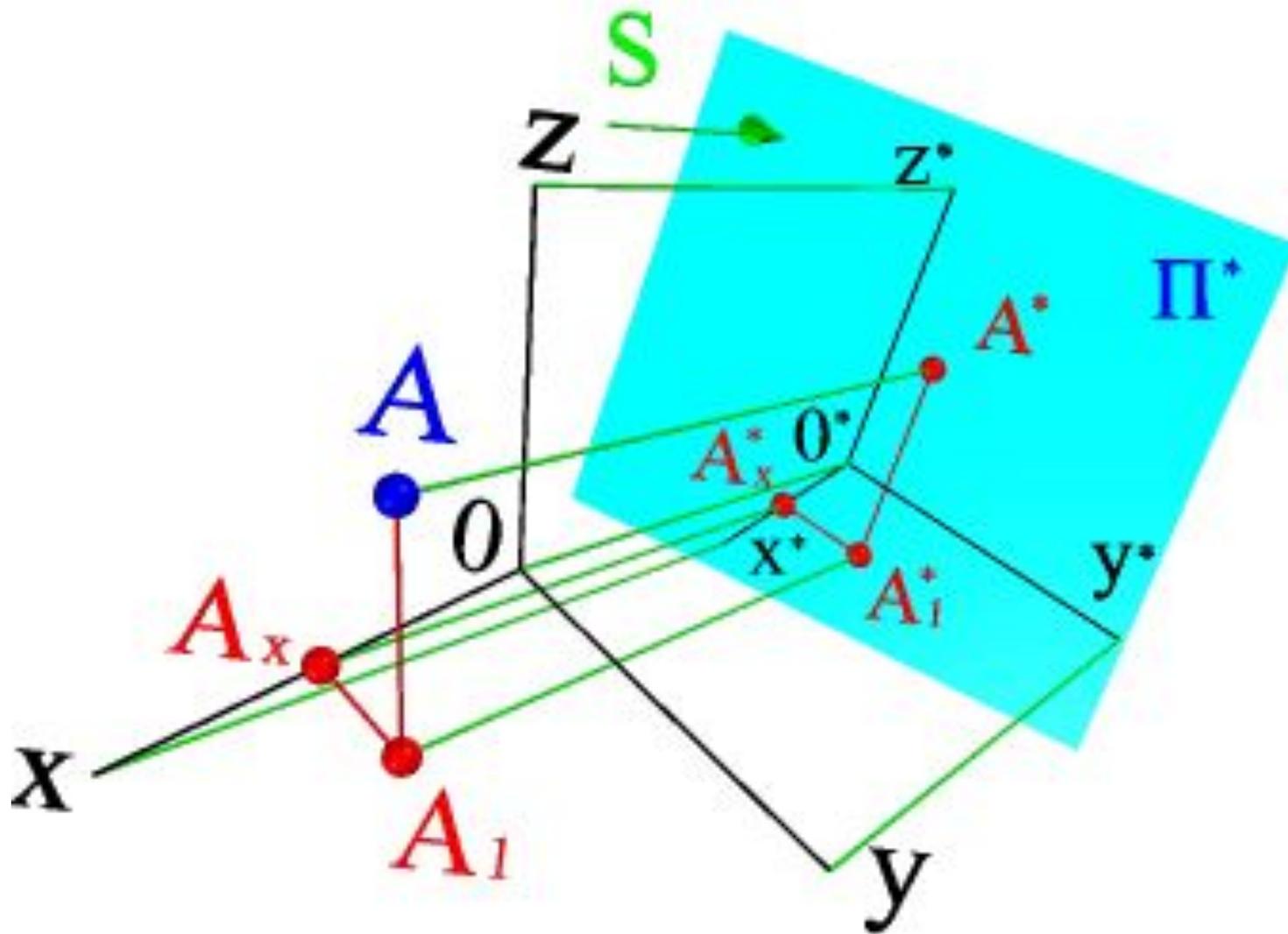
# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- Слово «аксонометрия» в переводе с греческого означает измерение по осям. Аксонометрический метод может сочетаться и с параллельным, и с центральным проецированием при условии, что предмет проецируется вместе с координатной системой.

# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- *Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что предмет относят к некоторой системе координат и затем проецируют параллельными лучами на плоскость вместе с координатной системой.*

# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ



# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- показана точка  $A$ , отнесенная к системе прямоугольных координат  $xuz$ . Вектор  $S$  определяет направление проецирования на плоскость проекций  $\Pi^*$ .
- ***АксонOMETрическую проекцию  $A1^*$  горизонтальной проекции точки  $A$  принято называть вторичной проекцией.***
- Искажение отрезков осей координат при их проецировании на  $\Pi'$  характеризуется так называемым коэффициентом искажения.
- ***Коэффициентом искажения называется отношение длины проекции отрезка оси на картине к его истинной длине.***

# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Так по оси  $x^*$  коэффициент искажения составляет  $u = \theta^* x^* / \theta x$ , а по оси  $y^*$  и  $z^*$  соответственно  $v = \theta^* y^* / \theta y$  и  $\omega = \theta^* z^* / \theta z$ .

В зависимости от отношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции могут быть:

*Изометрическими*, если коэффициенты искажения по всем трем осям равны между собой; в этом случае  $u = v = \omega$ ;

*Диметрическими*, если коэффициенты искажения по двум любым осям равны между собой, а по третьей – отличается от первых двух;

*Триметрическими*, если все три коэффициента искажения по осям различны.

Аксонометрические проекции различаются также и по тому углу  $\varphi$ , который образуется проецирующим лучом с плоскостью проекций. Если  $\varphi \neq 90^\circ$ , то аксонометрическая проекция называется *косоугольной*, а если  $\varphi = 90^\circ$  – *прямоугольной*.

# ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРИИ (теорема ПОЛЬКЕ)

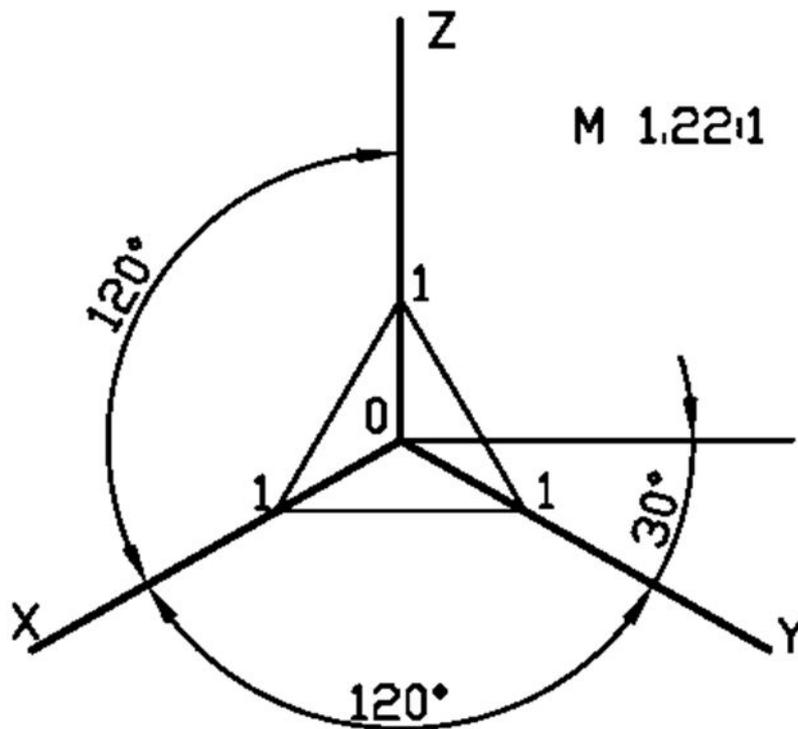
- Рассмотрев общие сведения об аксонометрических проекциях, можно сделать следующие выводы:
- - ***аксонометрические чертежи обратимы;***
- - ***аксонометрическая и вторичная проекции точки вполне определяют её положение в пространстве.***

# ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРИИ (теорема ПОЛЬКЕ)

- Немецкий ученый Карл Польке (1810-1876) сформулировал основную теорему аксонометрии: ***три отрезка прямых произвольной длины, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на координатных осях от начала.***

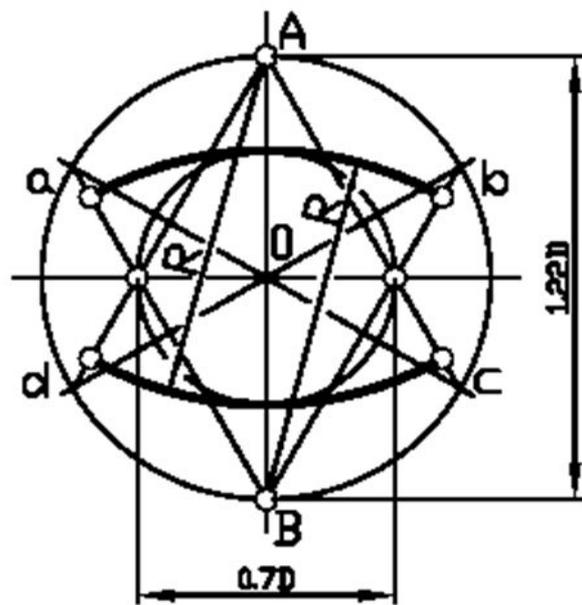
# АксонOMETрические проекции

## Изометрическая проекция

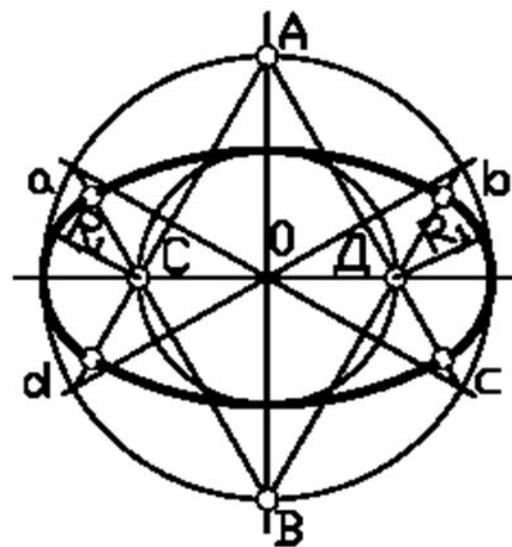


# АксонOMETрические проекции

## Изометрическая проекция



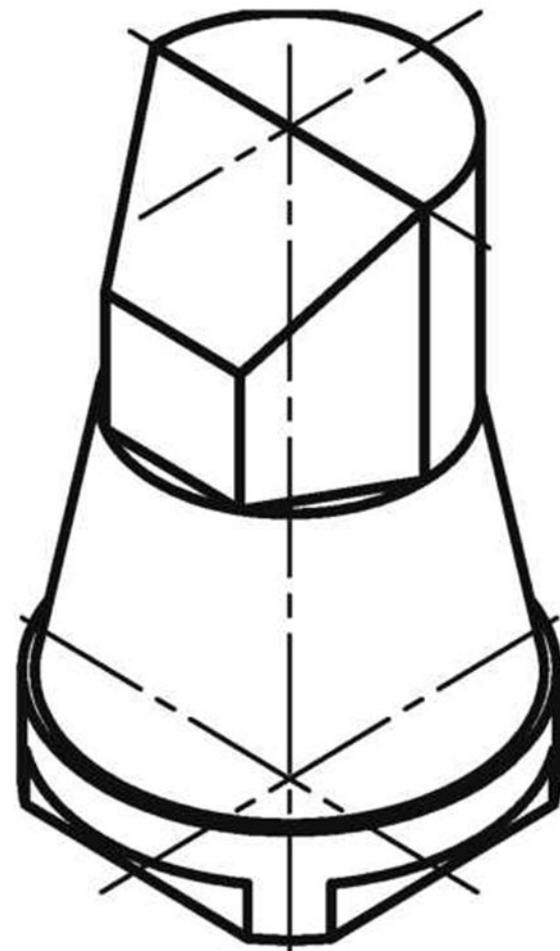
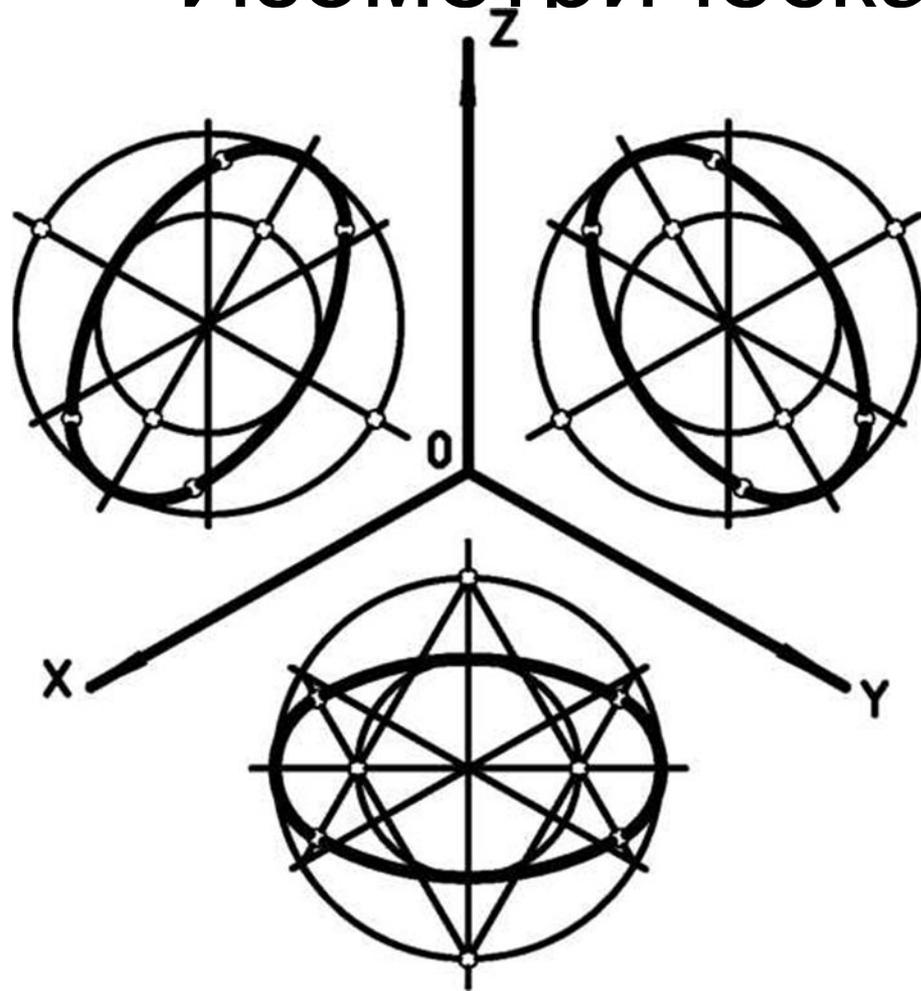
a)



b)

# АксонOMETрические проекции

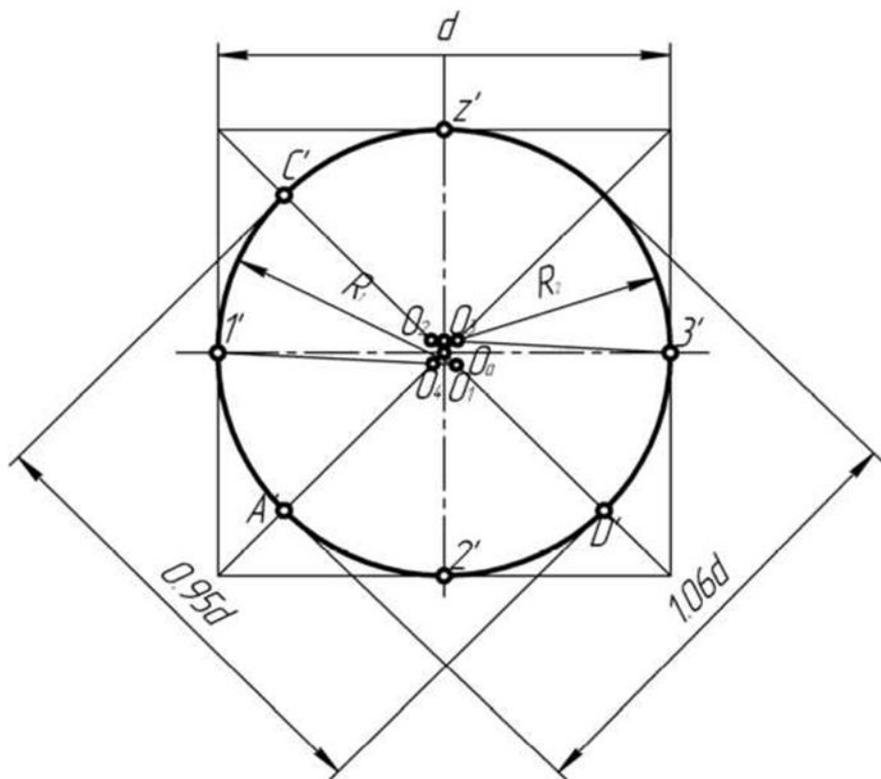
## Изометрическая проекция



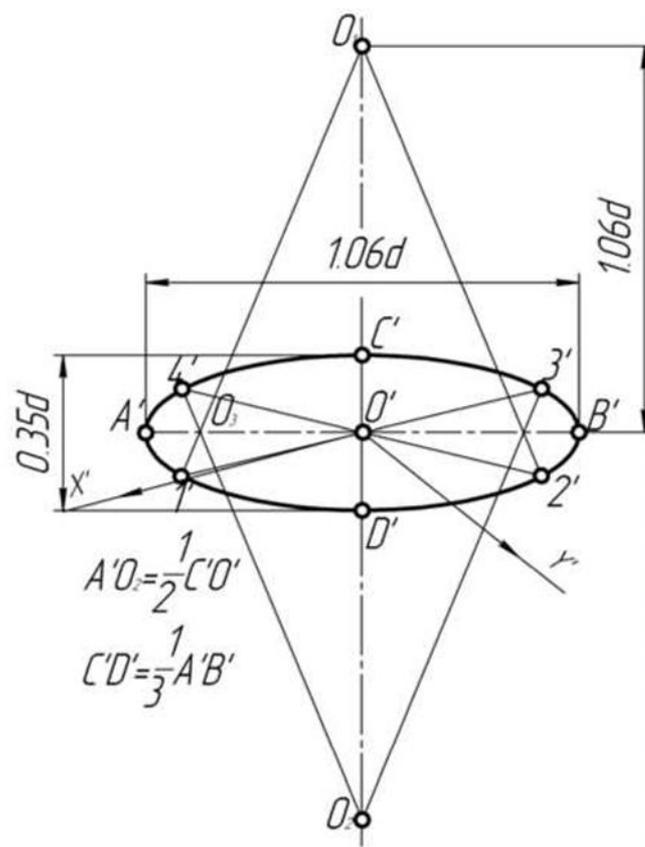


# АксонOMETРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

## Диметрическая проекция



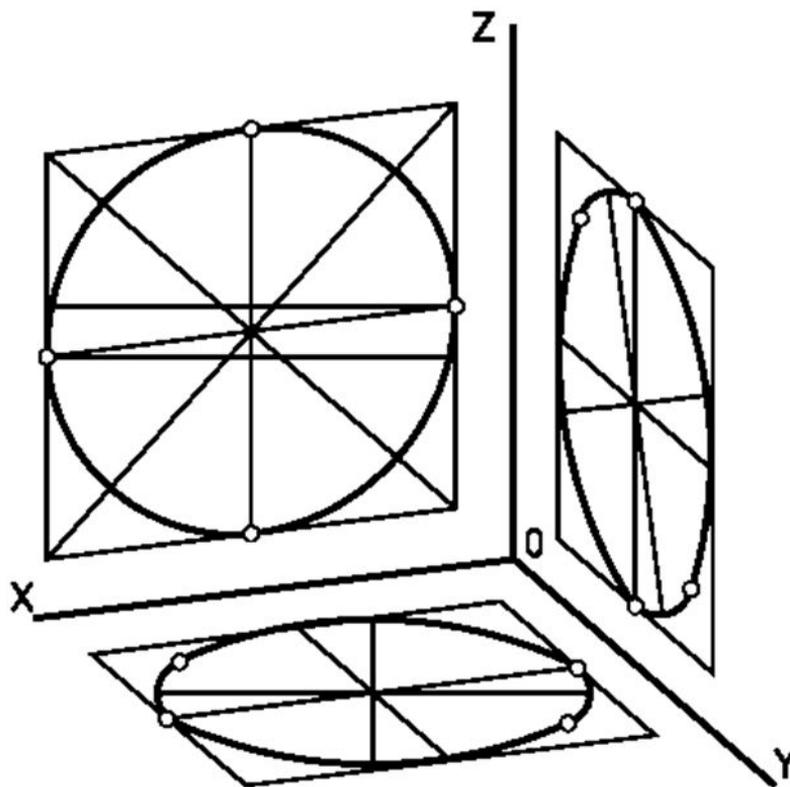
a)



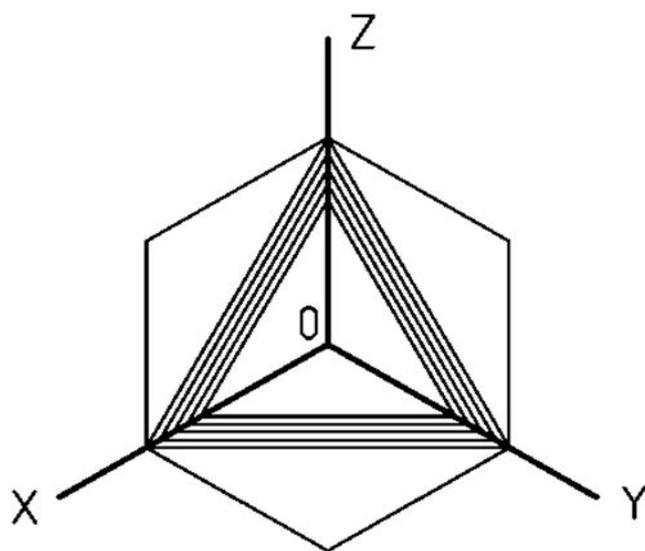
б)

# АксонOMETрические проекции

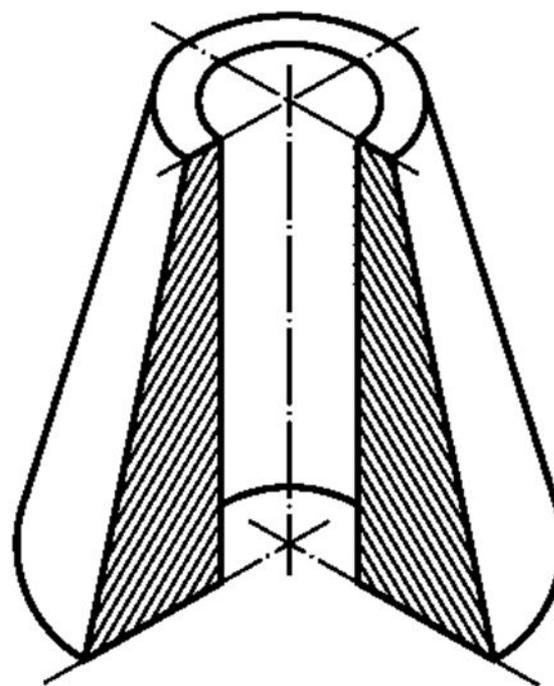
## Диметрическая проекция



# Штриховка разрезов в аксонометрии



a)



b)

# Штриховка разрезов в аксонометрии

