

**Логические  
универсальные  
учебные действия  
на уроках математики.**

# Логическими универсальными действиями являются:

- Анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных)
- Синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов.
- Выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов.
- Подведение под понятие, выведение следствий.
- Установление причинно – следственных связей, представление цепочек объектов и явлений.
- Построение логической цепочки рассуждений, анализ истинности утверждений.
- Доказательство.
- Выдвижение гипотез и их обоснование.

# Логические

**АНАЛИЗ** – расчленение предмета, явления, ситуации и выявление составляющих их элементов, частей.

**СИНТЕЗ** – соединение частей предметов или явление в одно целое, а также мысленное сочетание отдельных их свойств.

**СРАВНЕНИЕ** – сопоставление предметов с целью выявления признаков сходства или признаков различия.

**ОБОБЩЕНИЕ** – нахождение существенно общего в заданных предметах или явлениях.

**АБСТРАГИРОВАНИЕ** – отчленение, выделение общего, существенного и его противопоставление частному, несущественному.

**КЛАССИФИКАЦИЯ** – распределение предметов и явлений определенного типа по классам и подклассам в зависимости от сходства и различия.

# Алгебра 7 класс

## «Решение уравнений»

Первое  
уравнение:

Если  $x-1=1$  то  
 $x=x$

$$x(x-1)=$$

$$x-1=1 \quad x=$$

$$x=2 \quad 0$$

Второе уравнение:  $x(x^2 -$

$$x^2 - 3) = x \quad x=$$

$$x^2 = 4 \quad 0$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

# Алгебра 7 класс

## «Решение уравнений»

Третье  
уравнение:

$$(x^2 - 9)(x^2 - 2) = 9 - x^2$$

т.к.  $x^2 - 9$  и  $9 - x^2$  противоположные, то  $x^2 - 2 = -1$

$$x^2 - 2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

# Алгебра 7 класс

## «Решение уравнений»

Четвертое  
уравнение:

$$(x^4 - 16) [(x + 2)^2 + 2]^2 = 16 - x^4$$

$x^4 - 16$  и  $16 - x^4$  противоположные, но  $[(x + 1)^2 + 2]^2 \neq -1$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

# Алгебра 7 класс

## «Решение уравнений»

Пятое  
уравнение:

$$(x^2 - 9)^2 (x^2 - 5x + 1) = x^4 - 18x^2 + 81$$

Т.к.  $x^4 - 18x^2 + 81 = (x^2 - 9)^2$ , то

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

$$x^2 - 5x + 1 = 1$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 5$$

# Игра с математическими объектами

1. Прием разбиения при игре с математическими объектами.
2. Прием включения одного объекта в другой.

Найти сумму:  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^6$

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^6 = 1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) = 1 + 2(S - 2^6)$$

$$S = 1 + 2S - 2^7$$

$$S = 2^7 - 1$$

После этого примера ученикам уже легко выйти на **идею частных сумм**:

$$a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots; a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

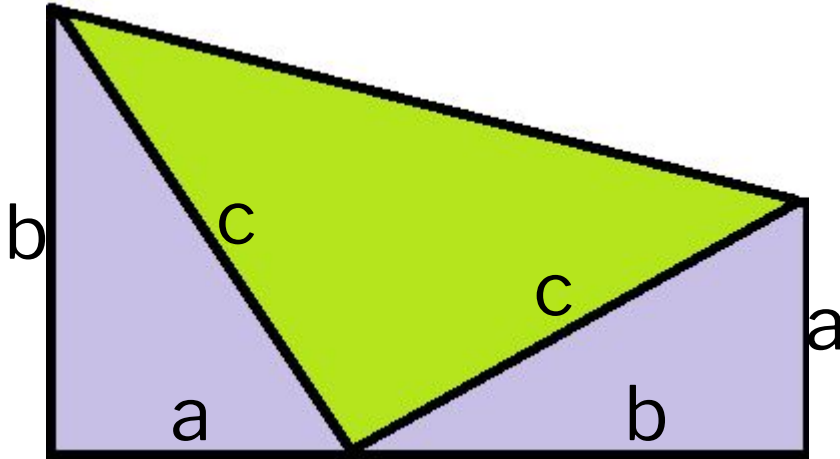
**Задача:** существует ли такое натуральное число, что число **1111...11** (  $n$  единиц) делится на **2007**?



# Метод удвоения объекта

Пример 1.

Еще одно доказательство теоремы



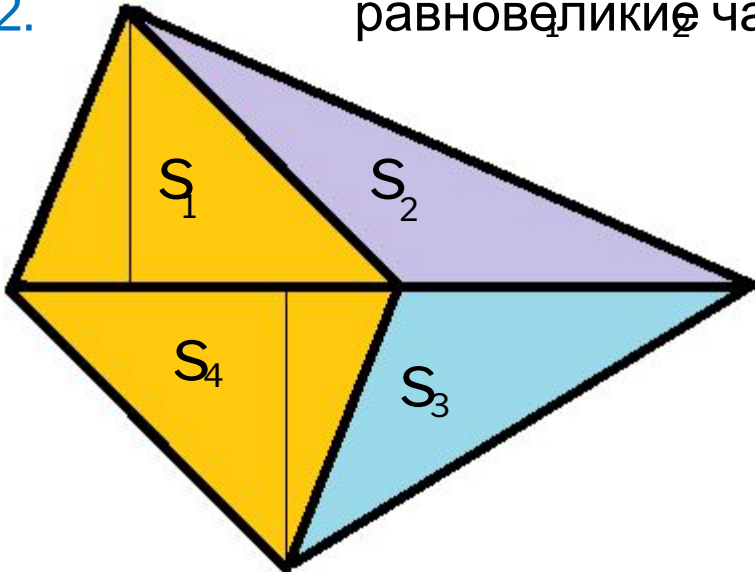
$$S = 1/2 (a + b) (a + b) =$$

$$= 1/2 ab + 1/2 ab + 1/2 c^2$$

$$\text{Значит } a^2 + b^2 = c^2$$

Пример  
2.

Способ разбиения четырехугольника на  
равновеликие части ( $S_4 = S = S = S$ )



Пример  
3.

$$x^2 - 6x + 9$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 6x + 9)$$

$$(x^2 - 6x + 9) + 2(x^2 - 6x + 9)$$

$$x^8 - 6x^7 + 9x^6 + x^2 - 6x + 9$$

Решите  
неравенство:

$$x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$$

# Следствия в тригонометрии

## 1. Рассмотрение частных случаев

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Замена  $b = a$ , то  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Замена  $b = \pi/4$  (любое табличное значение), то

$$\cos(a + \pi/4) = \cos a \cos \pi/4 - \sin a \sin \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a - \sin a)$$

Выходим на **идею вспомогательного угла**

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

Замена  $b = 3a$ , то  $\cos a + \cos 3a = 2 \cos 2a \cos a$ , откуда следует формула косинуса тройного угла  $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

## 2. Рассмотрение общих случаев

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

1). Заменяв тригонометрические функции в формуле буквами  $a, b, c, d$ , получаем, что  $|ab - cd| \leq 1$ , если  $|a| \leq |b| \leq 1, |c| \leq 1$ . В результате ученики выходят на идею тригонометрической подстановки (которую целесообразно использовать при доказательстве данного неравенства).

2). Если в данной формуле сделать только две замены:  $\cos a = x, \sin b = y$ , тогда получаем задачу: Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения  $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$

Здесь даже не пришлось указывать, что  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ , ибо оно следует из условия задачи.

Сам факт замены тригонометрических функций буквами подсказывает перспективный методический прием. В каком-либо тригонометрическом тождестве ученик делает подобные замены и полученные равенства предлагает одноклассникам для угадывания формул.

Например:  $a^2 + b^2 = 1$

$$(a + b)^2 = 1 + 2ab$$

$$b^2 = (1 - a)(1 + a)$$

$$(a + b - 1)(a + b + 1) = 2ab$$

$$b = \frac{2a}{1 + a^2}$$

### 3. Соотнесение формул

Например, соотнося  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$  и тригонометрическую единицу  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ , ученики получают сразу несколько полезных фактов:

1). Формулы понижения степени:

$$\cos^2 a = (1 + \cos 2a) / 2 \quad \sin^2 a = (1 - \cos 2a) / 2$$

2). Если равенства почленно перемножить или разделить, то

получим тождества

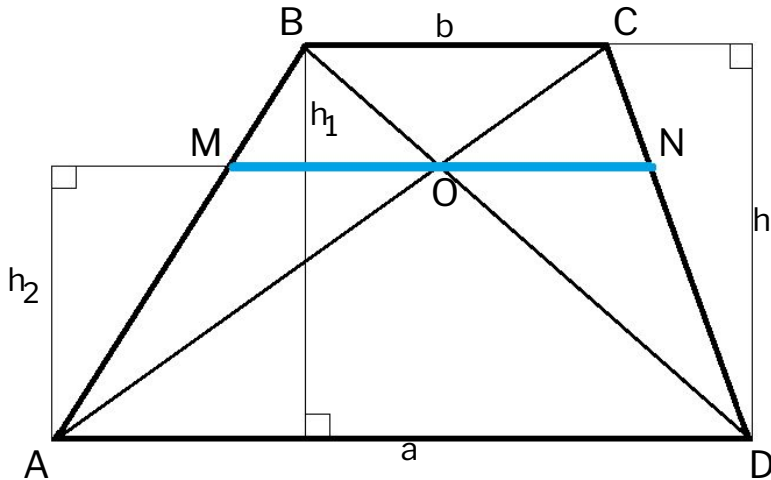
$$\frac{\cos 2a}{1} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{\operatorname{ctg}^2 a + 1}$$

$$\cos 2a (\cos^2 a + \sin^2 a) = \cos 2a \cos^2 a + \cos 2a \sin^2 a$$

Замечаем, что если бы вместо  $\cos 2a$  взять  $\cos a$ , то получили бы однородное выражение третьей степени.

# Урок одной задачи

**Задача 1.** В трапеции, основания которой  $a$  и  $b$ , проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами.



Из подобия треугольников  $ABD$  и  $ABC$ ,  $MBO$  и  $ABD$  получаем равенства  $x/b = h_2/h$ ,  $x/a = h_1/h$ , где  $x = MO$ .

Сложив эти равенства, получаем  $x/a + x/b = (h_1 + h_2)/h = 1$ , т.е.

$$x = ab/(a + b)$$

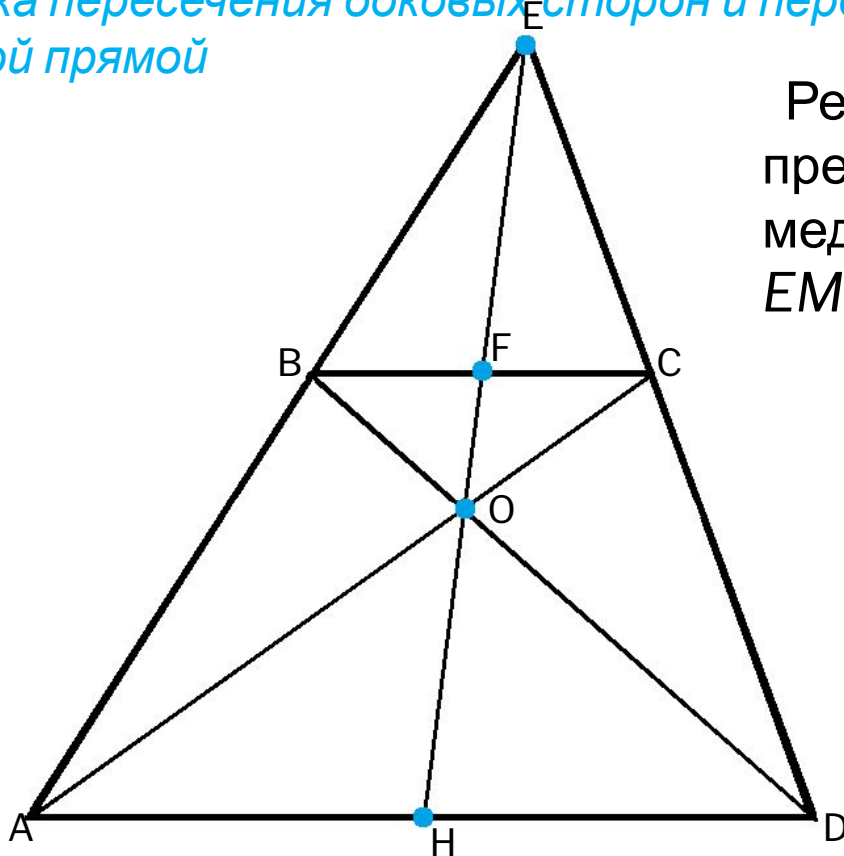
Аналогично  $ON = ab/(a + b)$

Откуда и ответ  $MN = 2ab/(a + b)$

## Задачи на доказательство:

**Задача 2.** Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельной основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам.

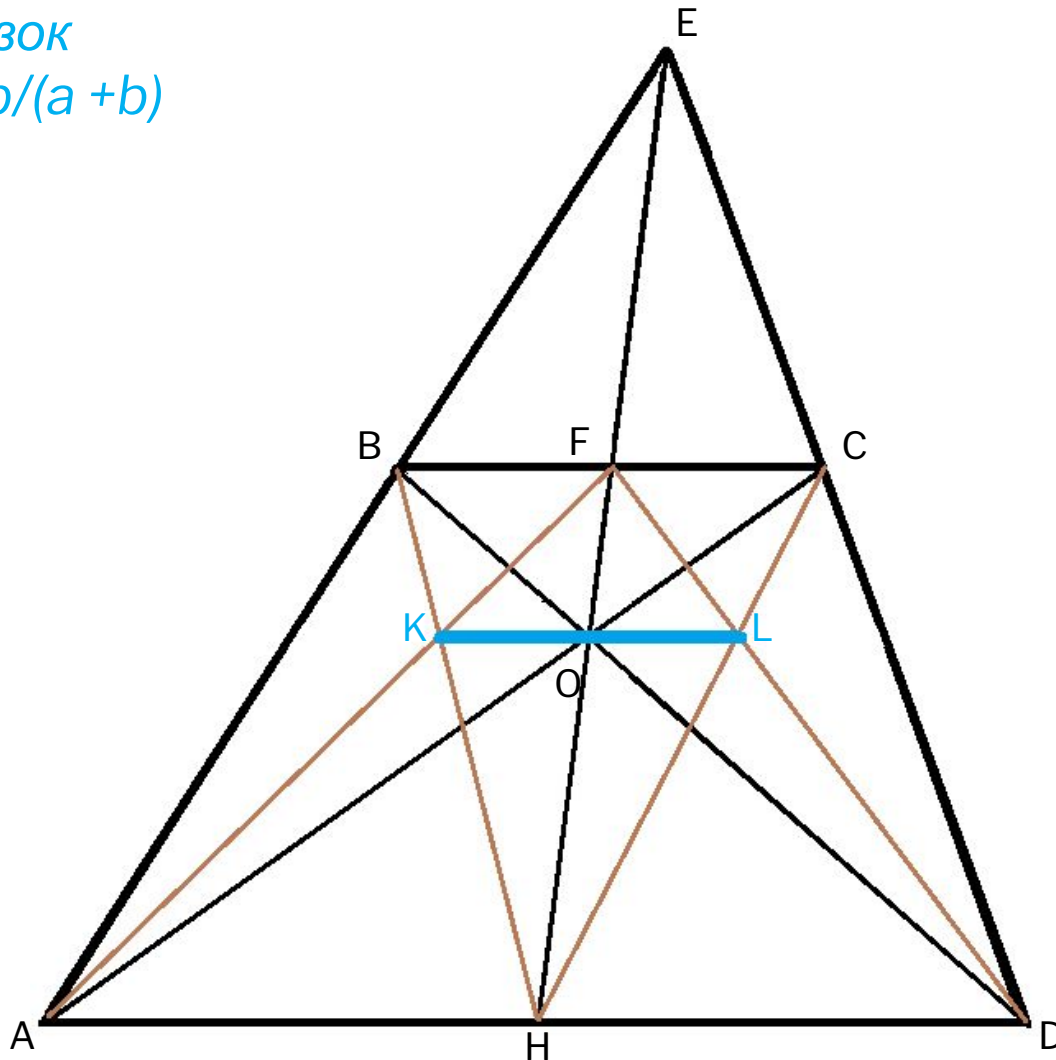
**Задача 3.** Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и пересечения диагоналей лежат на одной прямой



Решение следует из предыдущей задачи, т.к.  $EH$  – медиана в треугольниках  $EBC$ ,  $EMN$ ,  $EAD$ .

## Задачи на построение:

**Задача 4.** На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезку длиной  $a$  и  $b$ . С помощью одной линейки построить отрезок  $x = ab/(a + b)$



### Построение.

1.  $AB \cap CD = E$
2.  $AC \cap BD = O$
3.  $OE \cap BC = F$   
 $OE \cap AD = H$
4.  $DF \cap CH = L$   
 $AF \cap BH = K$
5.  $KL$  -  
искомый



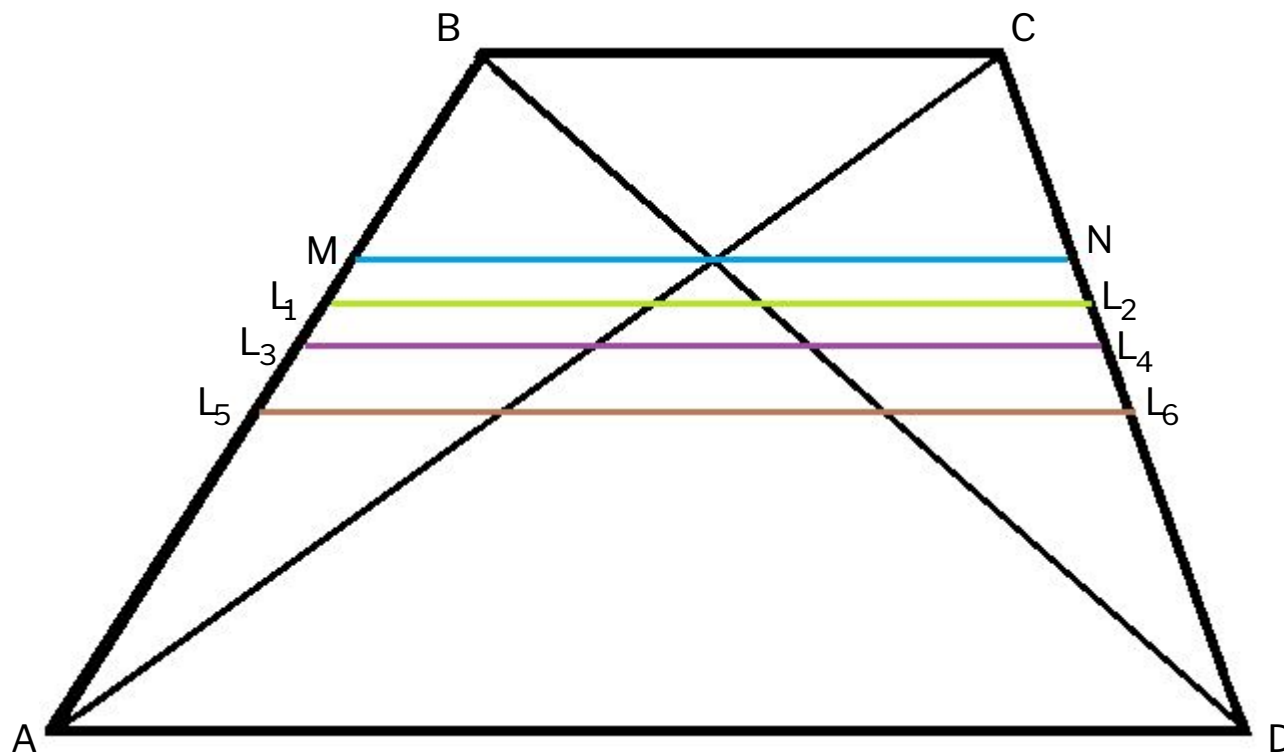
## Связь задачи с неравенствами:

$MN$  - среднее гармоническое чисел  $a$  и  $b$  (здесь они основания трапеции).

$MN < L_1 L_2$  - среднее геометрическое чисел  $a$  и  $b$

$MN < L_3 L_4$  - средняя линия трапеции - среднее арифметическое чисел  $a$  и  $b$ .

$MN < L_5 L_6$  - среднее квадратичное двух чисел  $a$  и  $b$



$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

СПАСИ  
БО

СПАСИ  
БО

СПАСИ  
БО