Модели простых сплошных сред

- Под простыми моделями сплошных сред понимаются идеализированные представления реальных деформируемых сред, учитывающие какое-либо одно из основных механических свойств. К числу простых относятся следующие четыре модели: модель идеальной среды (идеальная жидкость или идеальный газ, не способные оказывать сопротивление формоизменению); модель вязкой жидкости (учитывается лишь свойство вязкости); модель упругой среды (принимается во внимание лишь проявление свойства упругости); модель жесткопластической среды (проявляется только свойство пластичности).

- Построение модели сплошной среды заключается в составлении такой замкнутой системы уравнений и соотношений, которая бы описывала движение и состояние деформируемых сред с учетом их физико-механических свойств, действия внешних сил, тепловых и других факторов и позволяла определять зависимости характеризующих движение и состояние физических величин от координат и времени

$$u(x^i, t),\ v(x^i, t), \qquad \varepsilon_{ij}(x^i, t),\ \rho(x^i, t)$$

и т.п.

Постановка любой задачи механики сплошных сред включает следующие пять этапов:

- — выбор системы отсчета и системы координат, по отношению к которым будет описываться движение материального континуума;
- — выбор моделей сплошных сред для участвующих в исследуемом процессе реальных деформируемых сред;
- — составление системы исходных уравнений для выбранных моделей и исследуемого процесса;
- — выбор основных неизвестных характеристических функций и переход к так называемой системе разрешающих уравнений;
- — формулировка начальных и граничных условий для решаемой задачи.

- Для формирования модели сплошной среды необходимо: выбрать систему отсчета и систему координат, по отношению к которым будет описываться движение материального континуума, исходя из принципа наибольшего удобства формулирования математических соотношений, описывающих среду; составить систему исходных уравнений исследуемого процесса; выбрать основные неизвестные характеристические функции и перейти к так называемой системе разрешающих уравнений; сформулировать начальные и граничные условия для решаемой задачи. На примере идеальной жидкости рассмотрим этапы формирования модели сплошной среды.

Система исходных уравнений

- Система исходных уравнений – это замкнутая система уравнений и соотношений, которая полностью описывает движение и состояние деформируемых сред с учетом их физико-механических свойств. Согласно нашему предыдущему рассмотрению в самом общем виде система исходных уравнений имеет следующий вид:

- Система исходных уравнений в обязательном порядке включает основные общие для всех сплошных сред дифференциальные уравнения механики, выражающие фундаментальные законы сохранения массы (1), импульса (2), энергии (3), а также общие для всех сред кинематические соотношения (4) – выражение для координат перемещения, и (5) – выражение для тензора скоростей деформаций, а также геометрические соотношения (6) – выражение для тензора деформаций в случае линейных деформаций (в нашем случае).

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_i v^i = 0, \quad (1)$$

$$\rho\frac{dE}{dt} = \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \nabla_i q^i, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right), \quad (5)$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = F_i + \nabla_j\sigma_i^j, \quad (2)$$

$$\frac{du_i}{dt} = v_i, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \quad (6)$$

- Индивидуальные особенности рассматриваемой деформируемой среды в отношении оказания сопротивления деформированию учитываются физическими соотношениями (7), обязательно включаемыми в систему исходных уравнений согласно выбранной модели сплошной среды. В следующем разделе остановимся подробнее на выборе конкретного вида соотношений (7).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T\right). \quad (7)$$

- Начальные и граничные условия. Неотъемлемым и важнейшим элементом постановки любой задачи механики сплошных сред является формулировка начальных и граничных условий. Их значение определяется тем, что та или иная система разрешающих уравнений описывает целый класс движений соответствующей деформируемой среды, и лишь задание отвечающих исследуемому процессу начальных и граничных условий позволяет выделить из этого класса представляющий интерес частный случай, соответствующий решаемой практической задаче.
- Начальные условия — это условия, которыми задаются значения искомых характеристических функций в момент начала рассмотрения исследуемого процесса. Количество задаваемых начальных условий определяется количеством основных неизвестных функций, входящих в систему разрешающих уравнений, а также порядком входящей в эту систему высшей производной по времени. Например, адиабатическое движение идеальной жидкости или идеального газа описывается системой шести уравнений с шестью основными неизвестными — тремя компонентами вектора скорости и давлением

$$\upsilon_i = \upsilon_i(x^i, t) \qquad p = p(x^i, t)$$

- Плотностью $\rho = \rho(x^i, t)$ и удельной внутренней энергией $A = A(x^i, t)$
- при этом порядок производных этих физических величин по времени не превышает первый порядок. Соответственно этому в качестве начальных условий должны быть заданы начальные поля этих шести физических величин: при t =0 $\upsilon_i = \upsilon_i(x^i, 0)$ $p = p(x^i, 0)$
- $\rho = \rho(x^i, 0)$ $A = A(x^i, 0)$ В некоторых случаях (например, в динамической теории упругости) в качестве основных неизвестных в системе разрешающих уравнений используются не компоненты вектора скорости а компоненты вектора перемещений движения содержит производные второго порядка компонент перемещения,
- что требует задания двух начальных условий для искомой функции: при t = 0

$$u_i = u_i(x^i, 0) \qquad du_i / dt = \upsilon_i(x^i, 0)$$

- Более сложным и разнообразным образом при постановке задач механики сплошных сред задаются граничные условия. Граничные условия — это условия, которыми задаются значения искомых функций (или их производных по координатам и времени) на поверхности S области, занимаемой деформируемой средой. Различают граничные условия нескольких типов: кинематические, динамические, смешанные и температурные.
- Кинематические граничные условия соответствуют случаю, когда на поверхности S тела (или ее части) задаются перемещения $u(x_s^i, t)$
- или скорости $v(x_s^i, t)$ где $x_s^i = x_s^i(t)$ — координаты
- точек поверхности S, изменяющиеся в общем случае в зависимости от времени.

- Динамические граничные условия (или граничные условия в напряжениях) задаются, когда на поверхности S действуют поверхностные силы p. Как следует из теории напряжений, в этом случае на любой элементарной площадке поверхности с единичным вектором нормали n вектор удельных поверхностных сил pn принудительно задает вектор полного напряжения σn = pn, действующий в сплошной среде в точке на данном участке поверхности, что приводит к взаимосвязи тензора напряжений (σ) в этой точке с поверхностной силой и ориентацией вектора n соответствующего участка поверхности: (σ) · n = pn или $\sigma_{ij} n^j = p_{ni}$

- Смешанные граничные условия соответствуют случаю, когда на поверхности S задаются значения и кинематических, динамических величин или устанавливаются взаимосвязи между ними.
- Температурные граничные условия подразделяются на несколько групп (родов). Граничные условия первого рода задают на поверхности S деформируемой среды определенные значения температуры T. Граничные условия второго рода задают на границе вектор теплового потока q, что с учетом закона теплопроводности Фурье q = — λ grad T, по существу, накладывает ограничения на характер температурного распределения в окрестности граничной точки

$$q_i = -\lambda \nabla_i T$$

- Граничные условия третьего рода устанавливают зависимость между вектором теплового потока q, направленным к данной среде со стороны окружающей среды, и температурным перепадом между этими средами и т.д.
- Следует отметить, что постановка и решение большинства задач физики быстропротекающих процессов, как правило, осуществляются в адиабатическом приближении, поэтому температурные граничные условия используются достаточно редко, в основном в различных сочетаниях применяются кинематические, динамические и смешанные граничные условия

Спасибо за внимание