Дискретная математика

Введение

Периоды развития математики

В истории цивилизации можно выделить три крупных периода:

- **сельскохозяйственный, или аграрный** — до XVII в.;
- **индустриальный** — с XVII по XX в.;
- **информационный** — с XX в.

Эти периоды определялись научно-техническими революциями и, следовательно, характером тех систем и явлений природы, которые вовлекались в сферу главных производственных интересов и потребностей людей. В каждый период создавались новые технологии производства, новая картина реального мира, новые системы знаний (науки) и, в частности, новая математика.

Периоды развития математики

Новый период развития математики

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов.

Фундаментом дискретной математики являются:

- Теория множеств;
- Математическая логика;
- Теория графов;
- Теория кодирования;
- Теория автоматов.

Новый период развития математики

Стимулы развития дискретной математики:

- растущий поток информации и проблемы ее передачи, обработки и хранения привели к возникновению и развитию **теории кодирования**;
- различные экономические задачи, задачи электротехники стимулировали создание и развитие **теории графов**;
- связь релейно-контактных схем с формулами алгебры логики и их использование для описания функционирования автоматов дали начало развитию и применению **математической логики** и **теории автоматов**.

Обозначения

Кванторы:

- Квантор общности: $\forall$ - «любой», «всякий», «каждый»;
- Квантор существования: $\exists$ - «существует», «найдется», «можно найти»;
- $\Leftrightarrow$ «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»;
- $\Rightarrow$ «следует», «выполняется»;
- **:** или **|** «такой, что»

- Пример:

$$(\forall x \in \mathrm{M})\ (\exists y \in \mathrm{N}: y < x)$$

«для любого x из множества M существует y из множества N такой что y меньше, чем x»

Дискретная математика

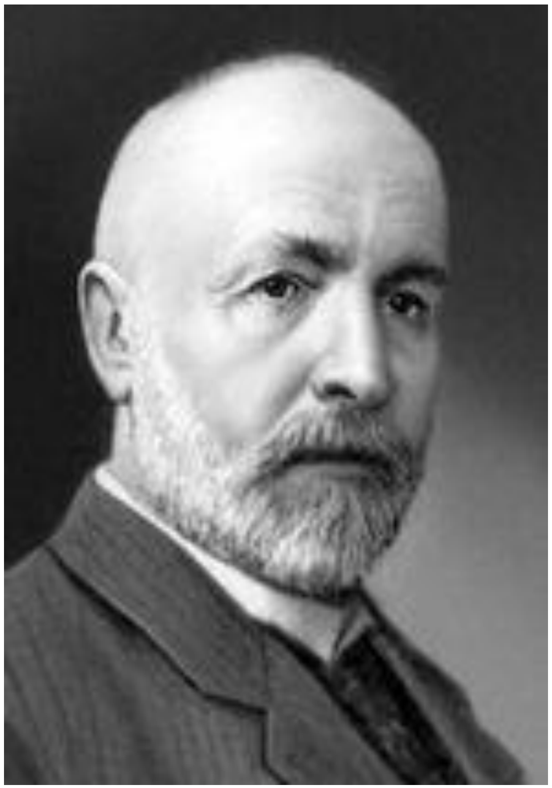
Теория множеств

Основные понятия

*«Под многообразием, или **множеством**, я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, то есть всякую **совокупность определённых элементов**, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона...»*

Георг Кантор

Основные понятия



Георг Кантор (1845-1918)

Понятие **множества** является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором.

Множество, элементы множества – первичные базисные неопределяемые понятия, на которых строится теория множеств.

Объекты, составляющие множество, называются **элементами множества**.

Пустое множество

Примеры множеств:

- *Множество решений уравнения;*
- *Множество студентов в группе;*
- *Множество предметов мебели в кабинете;*
- *Множество натуральных чисел.*

Среди множеств выделяют особое множество - **пустое множество. Пустое множество** - множество, не содержащее ни одного элемента. $\varnothing$

Примеры неочевидных пустых множеств:

- множество четырехугольников, все углы которых прямые и одновременно диагонали различной длины.
- Множество решений уравнения $x^2 - 17x + 73 = 0 \ \ (D < 0)$
- Множество чудовищ озера Лох-Несс…

Универсальное множество

Множество U, содержащее все возможные элементы, обладающие некоторым признаком, называется **универсальным** (универсумом).

Пример:

В математическом анализе:

- Все действительные числа.
- Все непрерывные функции на отрезке.

В алгебре:

- Все определители второго порядка,
- Все трехмерные векторы

Основные понятия

Множества обозначают большими буквами латинского алфавита. Элементы множества – строчными буквами.

$a \in M$ ⟹

«элемент, a принадлежит множеству M»
«a является элементом множества M»
«элемент, a содержится во множестве M».

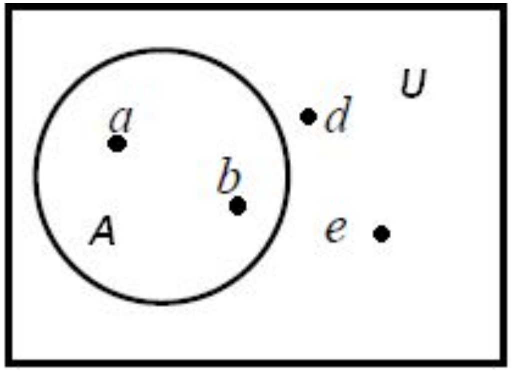
$a \notin M$ ⟹ «элемент a не принадлежит множеству M»

Диаграммы Эйлера-Венна

Множества удобно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна).

Леонард Эйлер
(1707 – 1783г.)

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств, где множества изображаются в виде совокупностей точек на плоскости ограниченных некоторой замкнутой кривой, а универсум – в виде большого прямоугольника.



a, b ∈ A
d, e ∉ A

Равные множества

Определение равенства множеств 1.

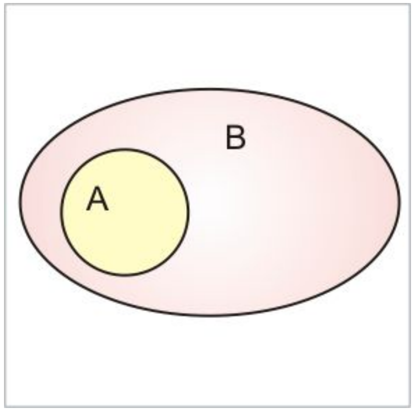
Два множества называются равными ($A=B$) в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Примеры:

- Множества решений уравнений $4x-8=16$ и $x/15=2/5$ равны, так как их решением является одно и то же число 6.
- Равны множества букв, из которых составлены слова «навес» и «весна».

Подмножество

Множество A называют **подмножеством** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент множества A является элементом множества B:



$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Множество A называется **собственным подмножеством** множества B, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Обозначение: $A \subset B$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Все рассматриваемые в задаче множества являются подмножествами универсального множества.

Равные множества

Определение равенства множеств 2.

Множества A и B **равны** (A=B) тогда и только тогда, когда A $\subseteq$ B , и B $\subseteq$ A, т. е. элементы множеств A и B совпадают.

Булеан множества

Булеаном множества М называется множество β(М), элементами которого являются все возможные подмножества множества М.

Конечные и бесконечные

Множество, состоящее из конечного числа элементов называется **конечным** множеством.

Бесконечное множество- непустое множество, не являющееся конечным.

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Обозначение: $|A|, |B|$.

$$|\varnothing| = 0$$

Способы задания множеств

Множества могут быть заданы

- списком;
- порождающей процедурой;
- описанием характеристических свойств элементов;
- графическим представлением.

Способы задания множеств

1. Задание *множеств* **списком** предполагает перечисление элементов.

Например:

- множество A состоит из букв a,b,c,d. Обозначается: A={a,b,c,d}
- множество N включает цифры 0,2,3,4 $\rightarrow$ N={0,2,3,4}

2. Задание множества **описанием характеристических свойств** элементов: $X=\{x|\ H(x)\}$, т. е. множество X содержит такие элементы x, которые обладают свойством $H(x)$.

Например:

- $B=\{b|\ b=\pi/2\pm k\pi,\ k\in N\}$, где N - множество всех натуральных чисел;
- M_2^n - это множество чисел, являющихся степенями двойки или $M_2^n=\{m|\ m=2^n,\ n\in N\}$, где N- множество всех натуральных чисел.
- $C=A+B=\{x:\ x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$.

Способы задания множеств

3. Задание *множеств* **порождающей процедурой**, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов.

Например:

a) (1) $5 \in M$;

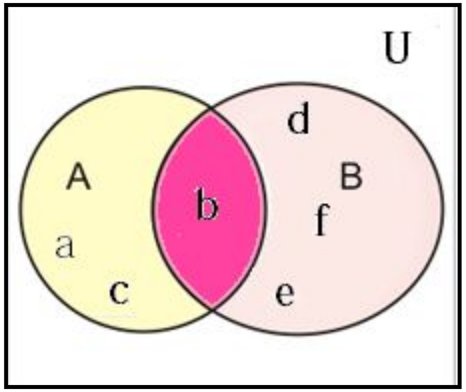
(2) если $a \in M$, то $1/a \in M$;

(3) если $a \in M$, то $(1-a) \in M$.

b) (1)$1 \in N$; (2) если $n \in N$, то $n+1 \in N$.

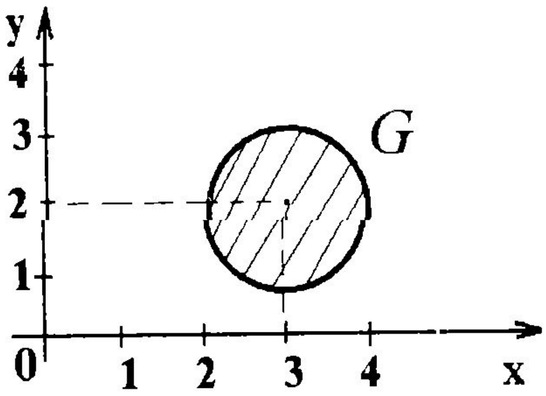
4. Графическое задание множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Например,

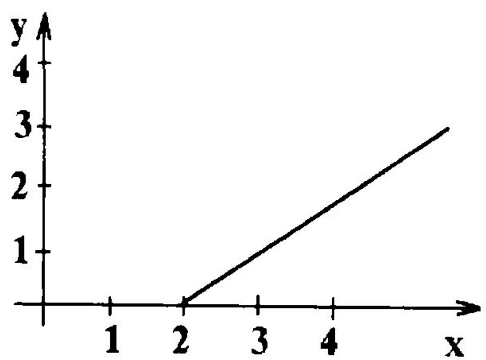


Следовательно, A={a,b,c}, B={b,d,e,f}

Пример 1. Пусть G – множество всех пар действительных чисел (x, y), удовлетворяющих соотношению $(x-3)^2+$ $+(y-2)^2 \le 1$.



Пример 2. Пусть G – множество точек прямой линии, удовлетворяющей соотношению $x - 2 = y$ при $x, y \ge 0$



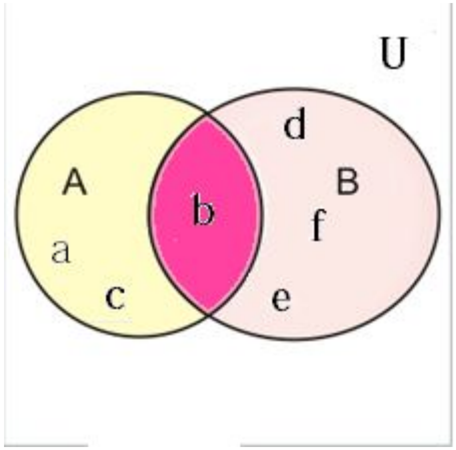
Способы задания множеств

3. Задание *множеств* **порождающей процедурой**, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов.

- Например:
- а) $2 \in M_{2n}$; б) если $m \in M_{2n}$, то $2m \in M_{2n}$.
- а) $1 \in N$; б) если $n \in N$, то $n+1 \in N$.

4. Графическое задание множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Например,



Следовательно, A={a,b,c}, B={b,d,e,f}

Способы задания множеств

1. Задайте списком множество:
- 1) букв в слове «алгебра»;
- 2) четных однозначных натуральных чисел;
- 3) нечетных однозначных натуральных чисел;
- 4) однозначных простых чисел.

2. Запишите множество описанием характеристических свойств :
- а) натуральных делителей числа 12;
- б) натуральных делителей числа 30;
- в) целых делителей числа 6;
- г) простых делителей числа 12.

Способы задания множеств

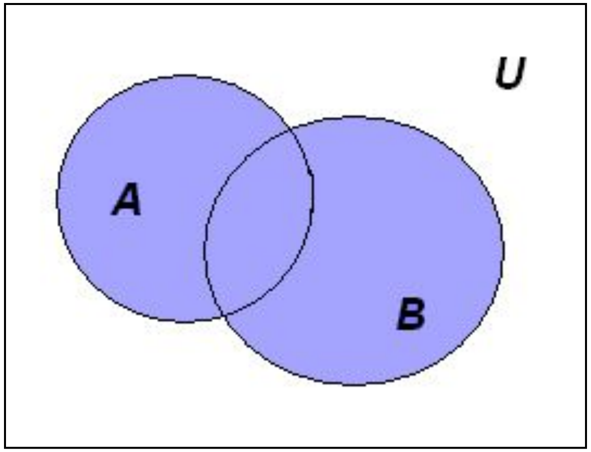
3. По какому характеристическому свойству записаны такие множества:

- {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};
- {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь};
- {до, ре, ми, фа, соль, ля, си};
- {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

4. *A* — множество четных натуральных чисел, расположенных между числами 25 и 35. Задайте это множество списком, характеристическим свойством, порождающей процедурой.

Операции над множествами

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

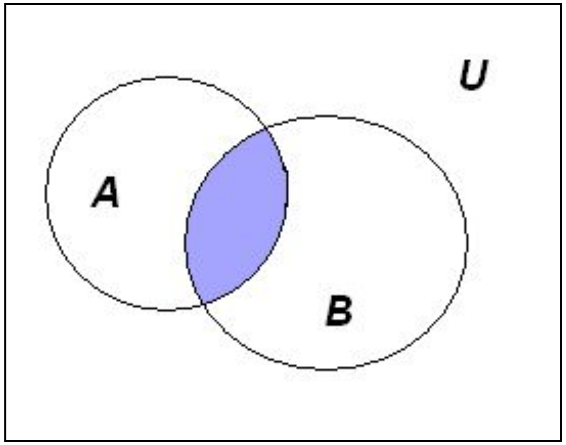
Пример. $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Пример. Даны два множества $A=\{1,2,4,6\}$ $B=\{0,3,4,6\}$. Найти $C=A \cup B$.

$C=\{0,1,2,3,4,6\}$

Операции над множествами

Пересечением множеств А и В называется множество (А∩В), состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно.



$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

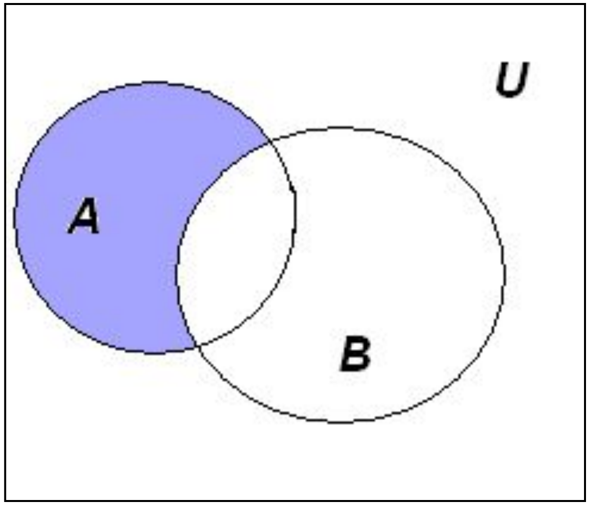
Пример. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

Пример. Даны два множества $A=\{1,2,4,6\}$ $B=\{0,3,4,6\}$. Найти $C=A \cap B$.

$C=\{4,6\}$

Операции над множествами

Разностью множеств A и B (A\B) называется множество всех элементов множества A, которые не содержатся в B.



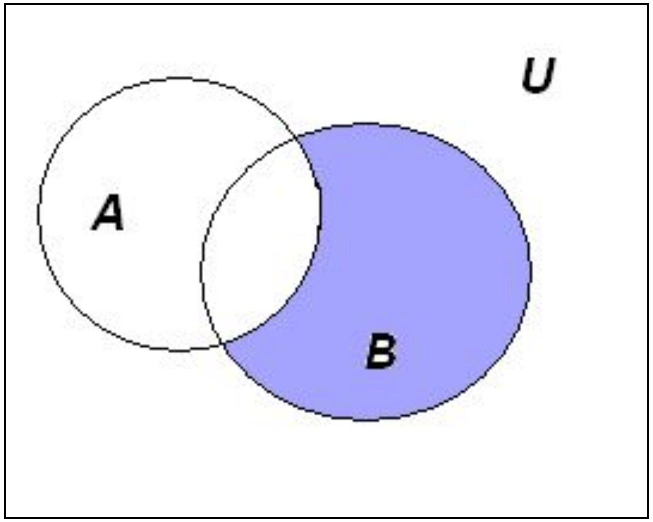
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Пример. $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$.

Пример. Даны два множества
$A=\{1,2,4,6\}$ и $B=\{0,3,4,6\}$. Найти $C=A \setminus B$. $C=\{1,2\}$

Операции над множествами

Разностью множеств B и A (B\A) называется множество всех элементов множества B, которые не содержатся в A.



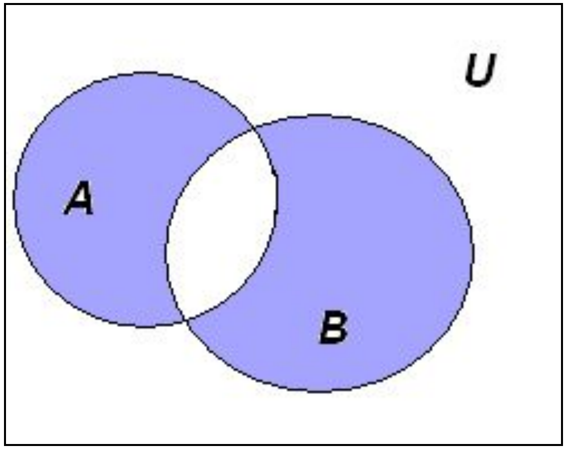
$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$

Пример. $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$.

Пример. Даны два множества
$A=\{1,2,4,6\}$ и $B=\{0,3,4,6\}$. Найти $C=B \setminus A$. $C=\{0,3\}$

Операции над множествами

Симметрической разностью множеств A и B (**A Δ B** или **A ⊕ B**) называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: либо A, либо B, но не являются общими элементами.



$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B); \qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

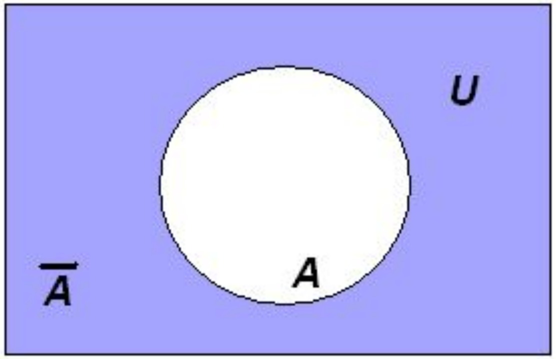
Пример. Пусть A = {1,2,3,4,5}, B = {3,4,5,6,7}.
Тогда $A\Delta B$ = (A∪B) \ (A∩B) = {1,2,3,4,5,6,7} \ {3,4,5} = {1,2,6,7}.

Пример. Даны два множества: A={1,2,4,6} и B={0,3,4,6}. Найти C=A Δ B.

C= ({1,2,4,6} ∪ {0,3,4,6}) \ ({1,2,4,6} ∩ {0,3,4,6}) = {0,1,2,3,4,6} \ {4,6} = {0,1,2,3}

Операции над множествами

Дополнением (до универсального множества) множества A ($\overline{A}$) называется множество всех элементов, не принадлежащих множеству A, но принадлежащих универсальному множеству.



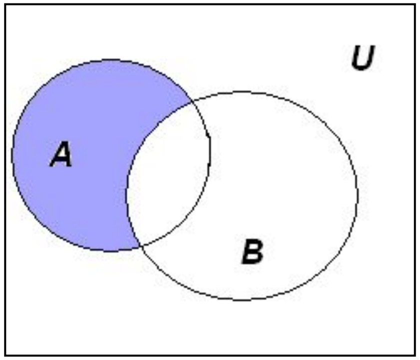
$\overline{A}=\{x|\ x \notin A \ \text{и}\ x \in U\}$

Пример. Пусть A = {1,2,4,5}, U = {1,2,3,4,5,6,7}.

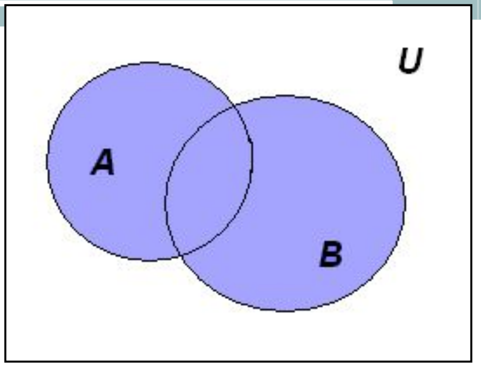
Тогда $\overline{A}$=U\A = {1,2,3,4,5,6,7} \ {1,2,4,5} = {3,6,7}

Пример. Пусть A = {a,d,f}, U ={a,b,c,d,e,f}. Найти Ā.

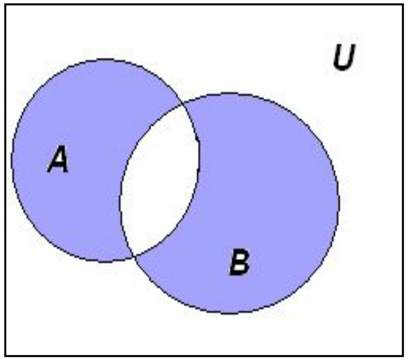
Ā = {a,b,c,d,e,f} \ {a,d,f} = {b,c,e}

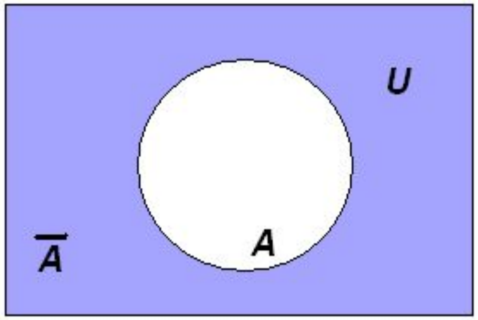


$$A \cap B = \{x | x \in A \ \ \& \ \ x \in B\}$$

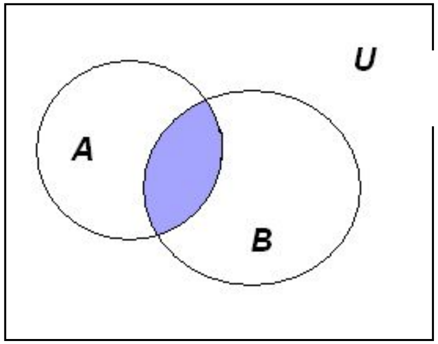


$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

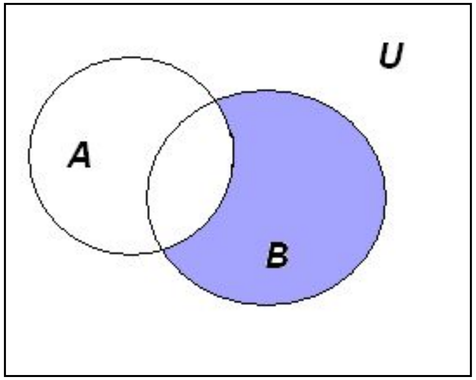




$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$$A \setminus B = \{x | x \in A \ \ \& \ \ x \notin B\}$$



Операции над множествами

Кортежем длины n (n-кой) называется упорядоченная последовательность из n элементов. Элемент, занимающий первое место, называется *первой компонентой n-ки*, элемент, занимающий второе место, называется *второй компонентой n-ки и т.д.* *Обозначение:* $(a_1, a_2, \dots a_n)$ *или* $\langle a_1, a_2, \dots a_n \rangle$.

Кортеж длины 2 называют двойкой или парой.

Прямым произведением двух множеств A и B называется множество всевозможных пар (a,b), таких, что: $a \in A$, $b \in B$. Символическая запись:

$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

Пример: A={a,b}; B={1,2}; $A \times B = \{\langle a,1 \rangle, \langle a,2 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle b,2 \rangle\}$.

$B \times A = \{\langle 1,a \rangle, \langle 1,b \rangle, \langle 2,a \rangle, \langle 2,b \rangle\}$.

Операции над множествами

1. Известно, что $M = \{1;2;5\}$, $N = \{1;4;5;7;9\}$, $K = \{4;7;9\}$. Найдите:

1) пересечение M и N;
2) пересечение M и K;
3) пересечение N и K;
4) объединение M и K;
5) объединение N и K;
6) разность M и N;
7) разность M и K;
8) разность N и K;
9) дополнение K до N;

10) дополнение M, N, K до универсума, если U –все цифры.

11) Прямое произведение K и N, N и K;

12) Симметрическую разность M и K, M и N, $\overline{K}$ и N

Операции над множествами

1. Дано:

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,4\}$

Найти: $A \times B$, $B \times A$, $(A \times B) \cap (B \times A)$

Решение:

По определению прямого произведения:

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3,3), (3,4)\}$

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(3, 3)\}$

Операции над множествами

2. Найти булеан множества M={a,b,c}.
β(M)={∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}.

3. Найти булеан множества M={1,3,5,7}

β(M)={∅,{1}, {3}, {5}, {7}, {1,3}, {1,5}, {1,7}, {3,5}, {3,7},

{5,7}, {1,3,5}, {1,3,7}, {1,5,7}, {3,5,7} {1,3,5,7} }

4. Объясните, почему выполняется равенство:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

Домашнее задание

1. Дано: $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{1,3,7\}$.
   Найти: а) $A \cup C$; б) $B \setminus (C \Delta \overline{A})$; в) $A \times B$;
   г) $(C \cup B) \cap (A \setminus B)$; д) $\overline{(A \cap B)} \setminus C$.
2. Выписать булеан множества А, если А – множество нечетных однозначных чисел.

Свойства операций над множествами

Пусть U — универсальное множество; A, B,C— его подмножества. Тогда имеют место следующие тождественные равенства:

1.
$$\left.\begin{array}{l} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{array}\right\}$$

ассоциативность объединения и пересечения

2.
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

Дистрибутивность объединения относительно пересечения

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Дистрибутивность пересечения относительно объединения

3.
$$\left.\begin{array}{l} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{array}\right\}$$

коммутативность объединения и пересечения

Свойства операций над множествами

4. $A \cap A = A,$ $A \cup A = A.$ — Идемпотентность объединения и пересечения

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — законы де Моргана

6. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ — тождества поглощения

7. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ — Свойства пустого множества.

$A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cup \overline{A} = U$ — Свойства универсума

$\overline{\varnothing} = U$ $\overline{U} = \varnothing$

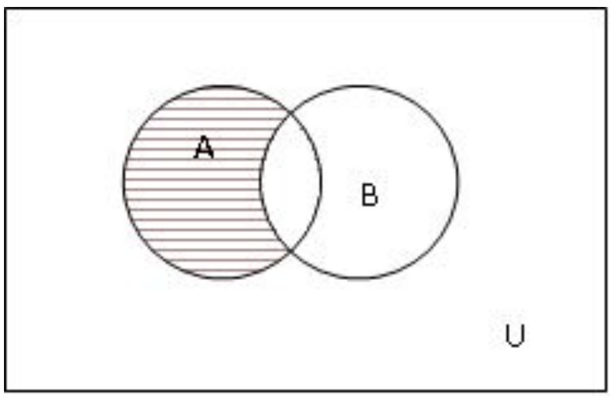
Доказательства

Доказательства используются в любой аксиоматической теории, например в любом разделе классической и высшей математики, дискретной математики, в том числе теории множеств и др.

под доказательством будем понимать способ получения (вывод) новых соотношений (знаний) из уже имеющихся путем корректных преобразований, гарантирующих получение истинных знаний в той мере, в какой можно гарантировать истинность исходных знаний.

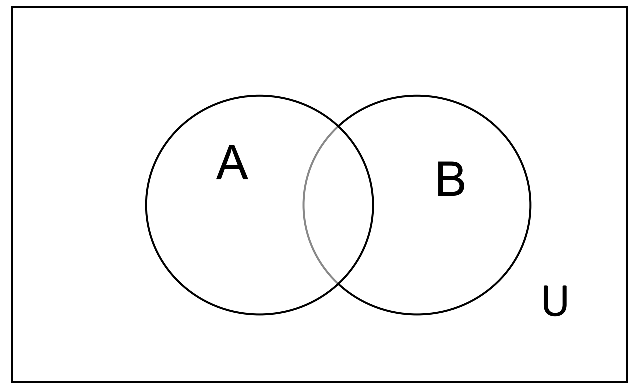
Доказательства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера-Венна равенство A \ B = $A \cap \overline{B}$



A \ B

=



$A \cap \overline{B}$

-- A \ B

A

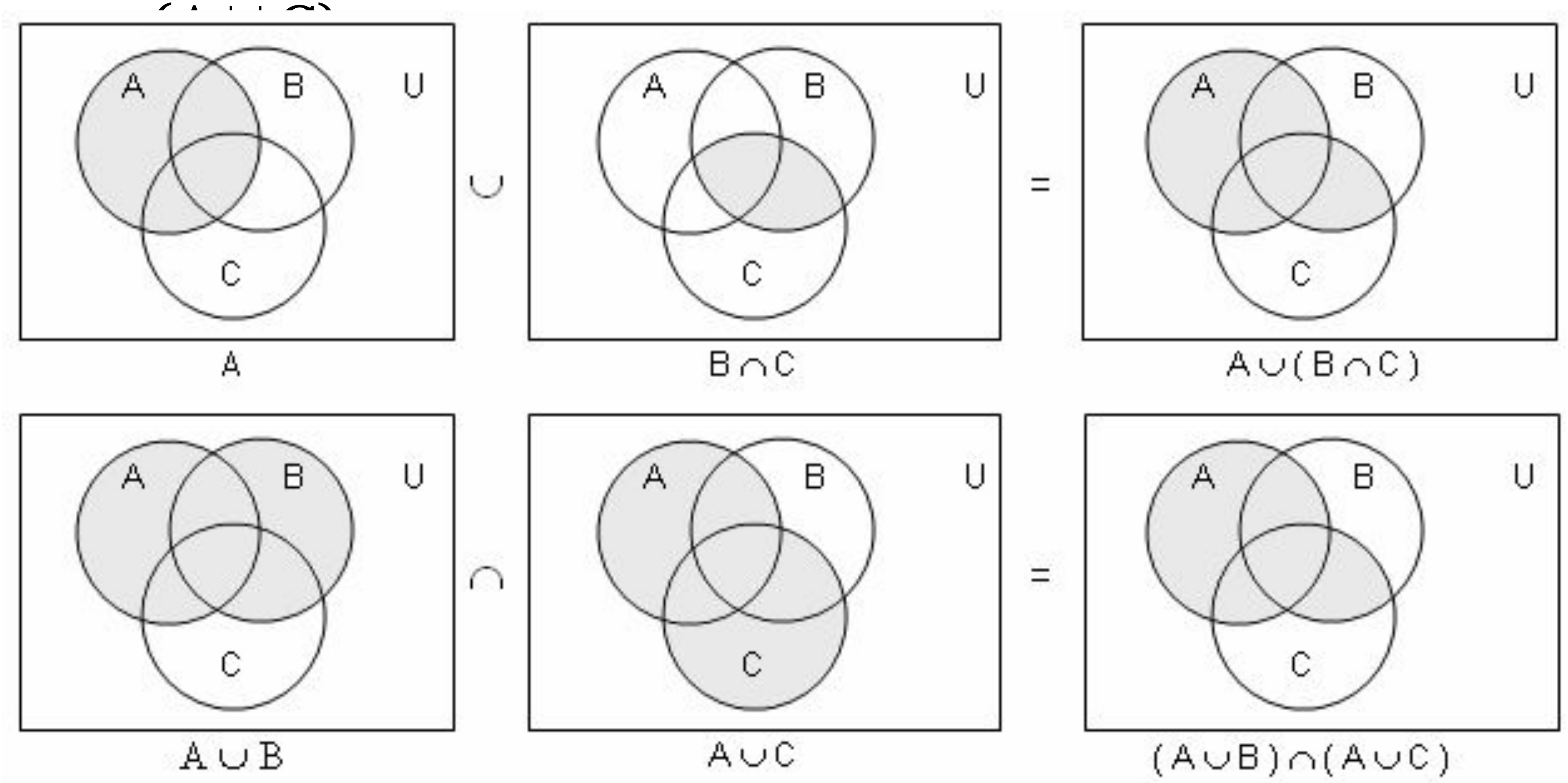
$\overline{B}$

$A \cap \overline{B}$

Т.к. диаграммы Эйлера-Венна для множества A \ B и множества $A \cap \overline{B}$ совпадают, то эти множества равны.

Свойства операций над множествами

- Докажем равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Доказательства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Докажите тождество, используя диаграммы Венна.
A\(B\C) = (A\B) ∪ (A∩C).

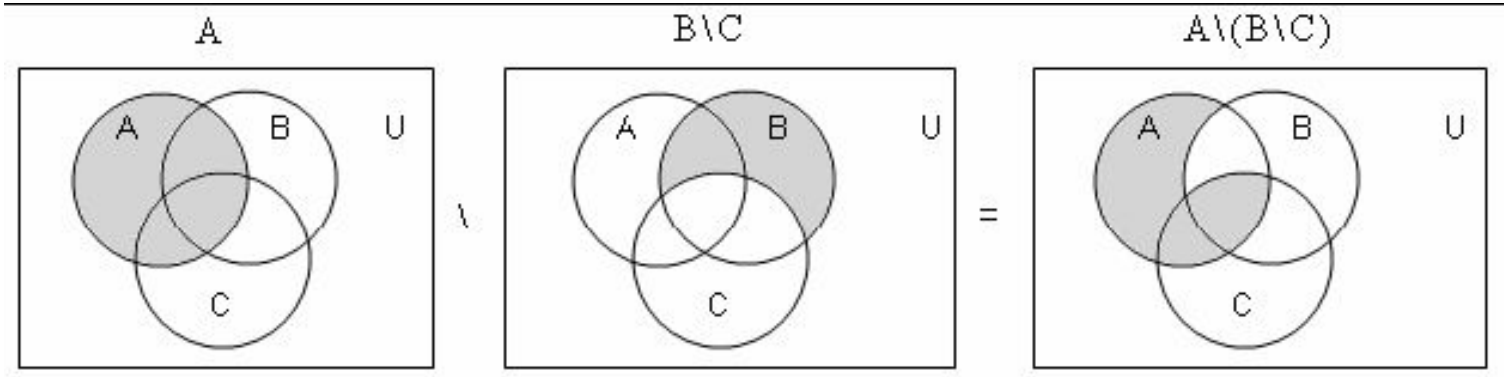


Диаграмма Венна A\(B\C)

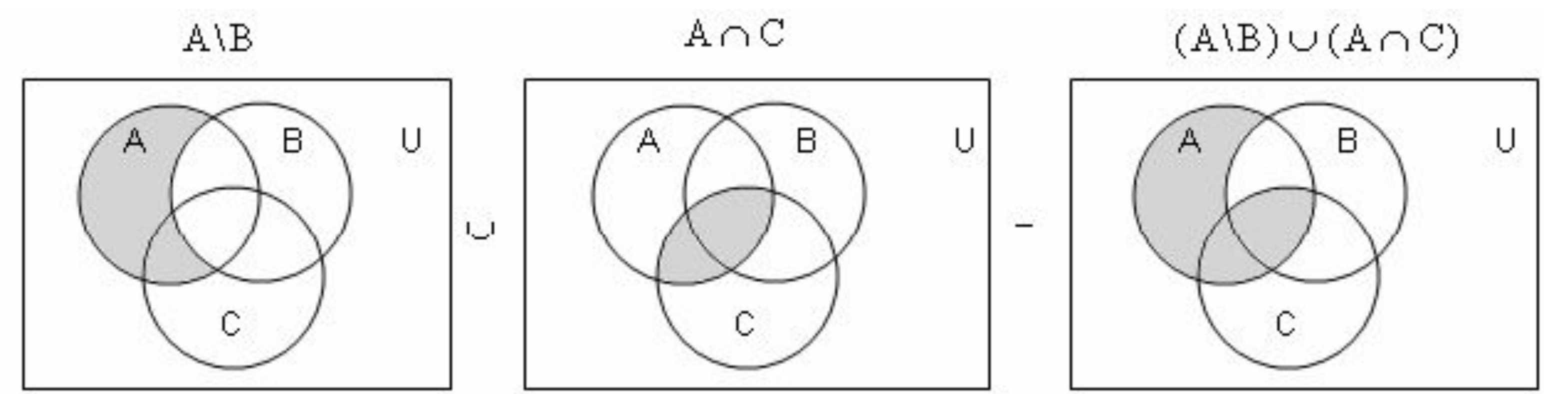
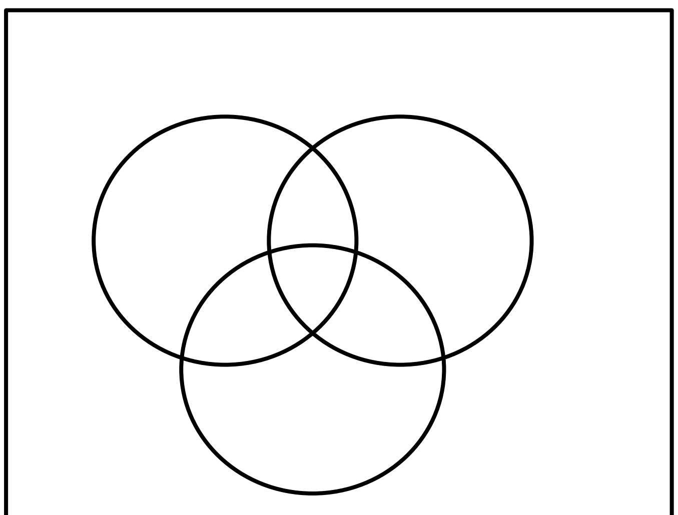


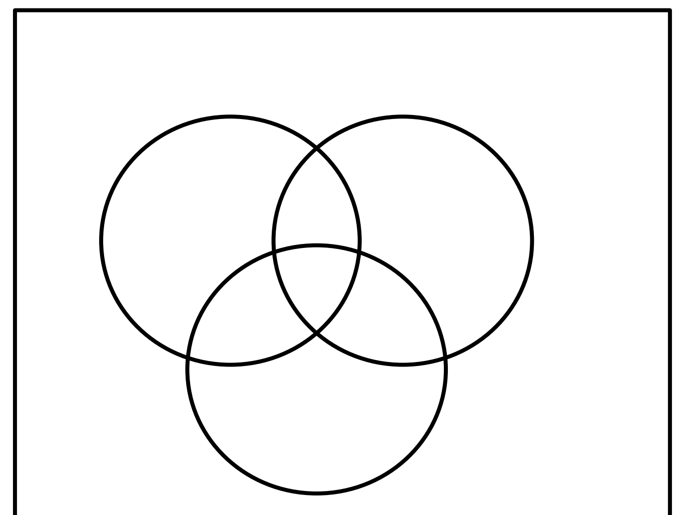
Диаграмма Венна (A\B) ∪ (A∩C)

Доказать, что:

1. $A \setminus (B \square C) = (A \setminus B) \square (A \setminus C)$,
2. $A \setminus (B \square C) = (A \setminus B) \square (A \setminus C)$,
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \square B$,
4. $A \setminus B = A \setminus (A \square B)$,
5. $A \square (B \setminus C) = (A \square B) \setminus (A \square C) = (A \square B) \setminus C$,
6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$,
7. $A \square B = A \square (B \setminus A)$,
8. $(A \square B) \square (A \square \overline{B}) = A$,
9. $(A \square B) \square (A \square \overline{B}) = A$,
10. $(\overline{A} \square \mathrm{B}) \square \mathrm{A} = \mathrm{A} \square \mathrm{B}$,
11. $(A \square B) \setminus C = (A \setminus C) \square (B \setminus C)$,
12. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \square (A \square C)$,
13. $A \setminus (B \square C) = (A \setminus B) \setminus C$.

A\(*B*□*C*)=(*A**B*)□(*A**C*)





Доказательства (аналитически)

Справедливость законов алгебры множеств доказывается на основе определения равенства: X = Y, если

1) $X \subseteq Y$: $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$;

2) $Y \subseteq X$: $\forall y \in Y \Rightarrow y \in X$.

Сформулированный принцип называют **интуитивным принципом объемности**

Для доказательств будем использовать следующие обозначения ({ - и ; [- или) и соотношения :

$x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

$x \in A \cup B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$

$x \in A \setminus B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$

$x \notin A \cap B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array} \right.$

$x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$

$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \overline{B} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array} \right.$

$x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ $\quad x \in A \cup B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$ $\quad x \in A \setminus B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$

$x \notin A \cap B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right.$ $\quad x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$ $\quad x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \overline{B} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array}\right.$

$(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).$

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Доказательства

Используя отношения принадлежности, доказать тождество $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

Пусть $X = (A \Delta B) \setminus C$; $Y = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

1) Если $x \in X \Rightarrow x \in (A \Delta B) \setminus C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Delta B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ x \notin C \end{cases}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \\ x \notin A \end{cases} \end{array} \right. \\ x \notin C \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases}$$

$(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.

Доказательства

2) Если y ∈ Y ⇒ y ∈ (A \ C) Δ (B \ C) ⇒

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \in A \setminus C \\ y \notin B \setminus C \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y \in B \setminus C \\ y \notin A \setminus C \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

y ∈ [(A \ C) \ (B \ C)] ∪ [(B \ C) \ (A \ C)] ⇒

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \in A \\ y \notin C \end{cases} \text{ и } \left[\begin{array}{l} y \notin B \\ y \in C \end{array}\right. \\ \\ \begin{cases} y \in B \\ y \notin C \end{cases} \text{ и } \left[\begin{array}{l} y \notin A \\ y \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \in A \\ y \notin C \\ y \notin B \end{cases} \text{ ИЛИ } \cancel{\begin{cases} y \in A \\ y \notin C \\ y \in C \end{cases}} \\ \begin{cases} y \in B \\ y \notin C \\ y \notin A \end{cases} \text{ ИЛИ } \cancel{\begin{cases} y \in B \\ y \notin C \\ y \in C \end{cases}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \in A \\ y \notin B \\ y \notin C \end{cases} \\ \begin{cases} y \notin A \\ y \in B \\ y \notin C \end{cases} \end{array}\right.$$

Доказательства

Отсюда $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases}$ или $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases}$ = $\begin{cases} y \in A \\ y \notin B \\ y \notin C \end{cases}$ или $\begin{cases} y \notin A \\ y \in B \\ y \notin C \end{cases}$

Следовательно тождество верно.

Доказательства

Докажем закон дистрибутивности:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство.

1) Если $x \in A \cap (B \cup C) => x \in A$ и $x \in (B \cup C) =>$

$x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C) =>$

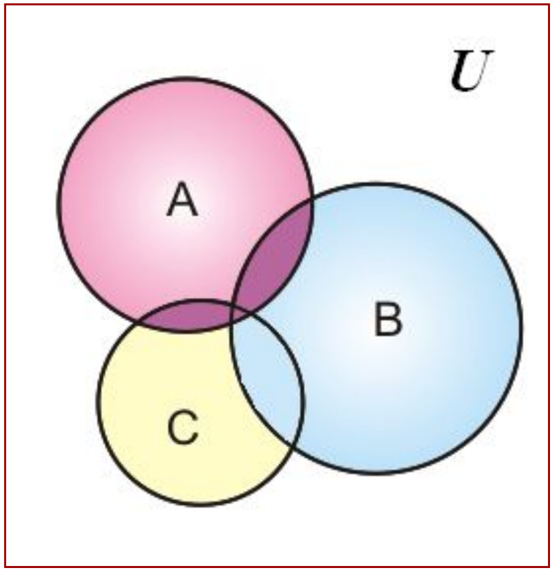
$(x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) =>$

$(x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) =>$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

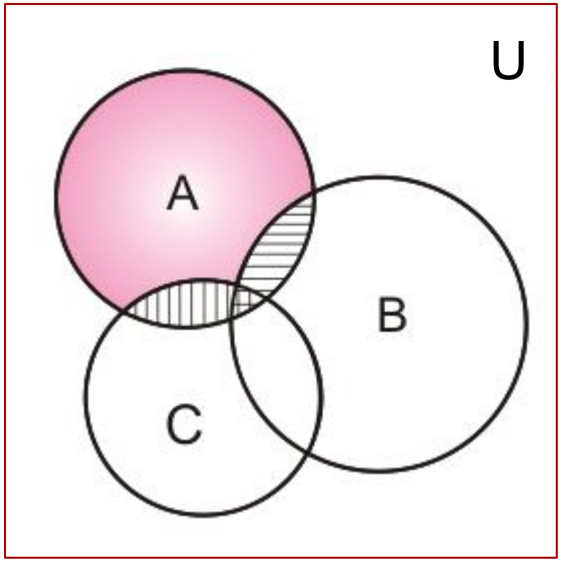
$$\Downarrow$$

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Доказательства

Доказажем включение в обратную сторону:



Если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) =>$

$(x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) =>$

$(x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) =>$

$x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C) =>$

$x \in A$ и $x \in (B \cup C) => x \in A \cap (B \cup C)$

$\Downarrow$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Так как $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Тест

Вставьте слово или фразу

1. **Пересечением** множеств А и В называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые__________

A. принадлежат множествам А и В одновременно;
B. принадлежат хотя бы одному из множеств А или В;
C. которые принадлежат множеству А, но не содержатся в В;
D. принадлежат одному из множеств: либо А, либо В, но не являются общими элементами.

Вставьте слово или фразу

2. **Разностью** множеств B и A называется множество всех элементов множества B, которые___________________________

A. принадлежат множествам A и B одновременно;
B. принадлежат хотя бы одному из множеств A или B;
C. не принадлежат множеству A, но принадлежат универсальному множеству;
D. которые принадлежат множеству B, но не содержатся в A.

Вставьте слово или фразу

3. **Объединением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые___________________

A. принадлежат множествам А и В одновременно;
B. принадлежат хотя бы одному из множеств А или В;
C. не принадлежат множеству А, но принадлежат универсальному множеству;
D. которые принадлежат множеству А, но не содержатся в В.

Вставьте слово или фразу

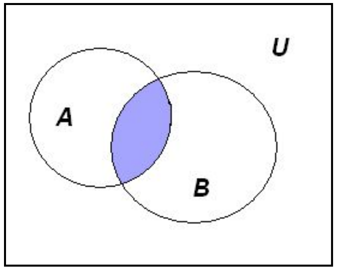
4. **Симметрической разностью** множеств А и В называется множество, содержащее те и только те элементы, которые_____

A. принадлежат множествам А и В одновременно;
B. принадлежат хотя бы одному из множеств А или В;
C. которые не содержатся в В;
D. принадлежат одному из множеств: либо А, либо В, но не являются общими элементами;

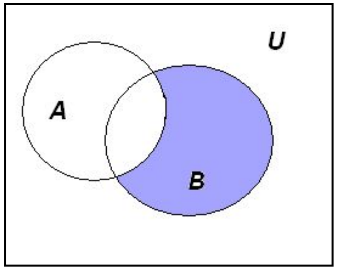
5.Установите соответствие

A. Объединение
B. Пересечение
C. Разность B/A
D. Симметрическая разность
E. Разность A/B
F. Дополнение $\overline{A}$

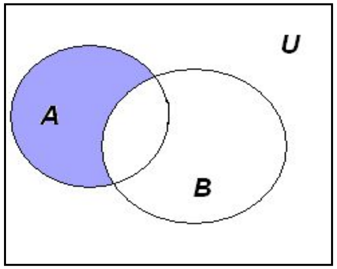
A	
B	
C	
D	
E	
F	



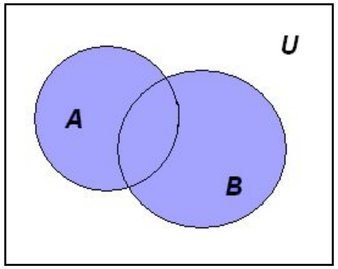
1



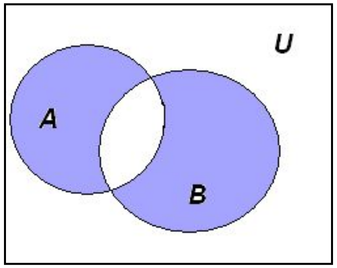
2



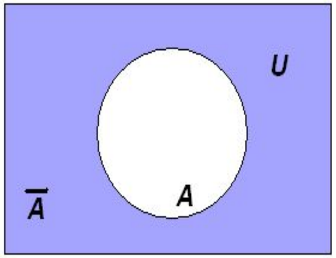
3



4



5



6

6.Выбрать верное утверждение

1 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$

2 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3 $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

7. Заданы множества $X = \{1,2\}, Y = \{0,2,3\}$.

Найти множество: $X \cup Y$

Выбрать верный вариант ответа:

1 ○ $\{1,2\}$

2 ○ $\{2\}$

3 ○ $\{0,1,2,3\}$

8. Какие из приведенных множеств заданы верно?

$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 2, 7\}$, M - множество цифр (арабских).

Выбрать верный вариант ответа

1 ○ верно заданы множества A и B

2 ○ верно заданы множества A и M

3 ○ верно заданы множества $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}$

9. Даны множества $C = \{a, b, c, d, e\}$ и $D\{c, a, f\}$.

Найти мощности этих множеств. Является ли множество D собственным подмножеством множества C ?

Выбрать верный вариант ответа

1 ◯ $|C| = 5$ и $|D| = 2$, да, является

2 ◯ $|C| = 5$ и $|D| = 3$, нет не является

3 ◯ $|C| = 5$ и $|D| = 3$, да, является

10. Дано множество $S = \{1,3,5\}$.

Составить булеан множества и определить его мощность.

Выбрать верный вариант ответа

1 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{3\}, \{1,5\}, \{1,3\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$.
$|S| = 3, |\beta(S)| = 8.$

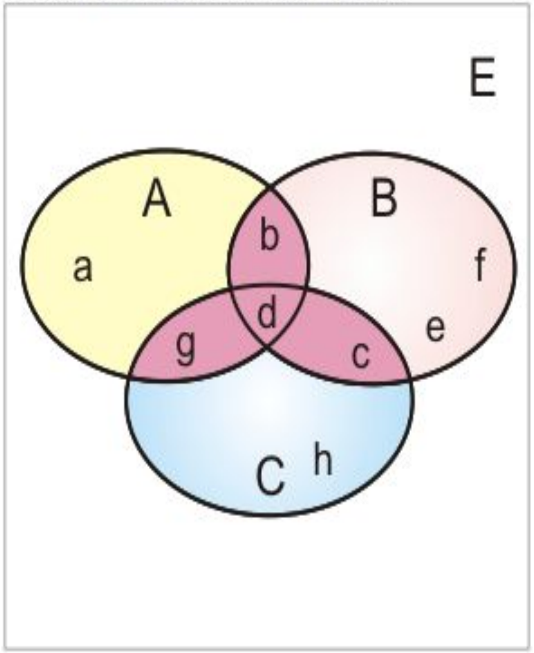
2 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,1\}, \{3,5\}, \{5,3\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \{5,3,1\}\}$
$|S| = 3, |\beta(S)| = 12.$

3 $\beta(S) = \{\emptyset, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,1\}, \{3,5\}, \{5,3\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$.
$|S| = 3, |\beta(S)| = 8.$

11. Заданы универсальное множество $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

и множества A, B и C

Записать элементы множеств A, B и C.



Выбрать все верные утверждения:

1 $A = \{a, b, d, g\}$, $B = \{b, c, e, d, f\}$, $C = \{c, d, g, h\}$

2 $A = \{a, b, d, g\}$, $B = \{b, f, c, e, d\}$, $C = \{d, g, c, h\}$

3 $A = \{a, b, d, g\}$, $B = \{e, f\}$, $C = \{h\}$

12. Заданы множества $A, B : A = \{1,2,3\}, B = \{1,0\}$

Найти элементы множества F: $F = \{f \mid f = a \times b, a \in A, b \in B\}$

Выбрать все верные утверждения:

1 ☐ $F = \{1,2,3,0\}$;

2 ☐ $F = \{0,1,2,3\}$;

3 ☐ $F = \{0,0,0,1,2,3\}$;

13. множество X включает в себя корни уравнения $x(x+1)(x-2)=0$, а множество Y содержит значения $\{-1, 0, 1\}$.
Найти элементы множества $Z = \{z \mid z = x - y, x \in X, y \in Y\}$.

Выбрать верный вариант ответа:

1 ○ $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

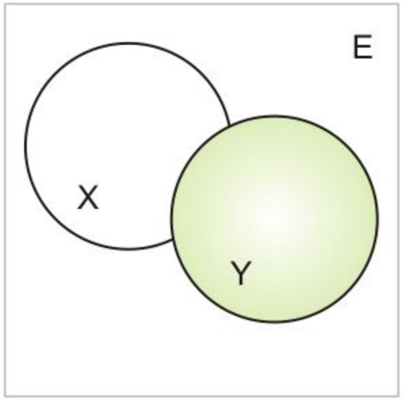
2 ○ $Z = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3 ○ $Z = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

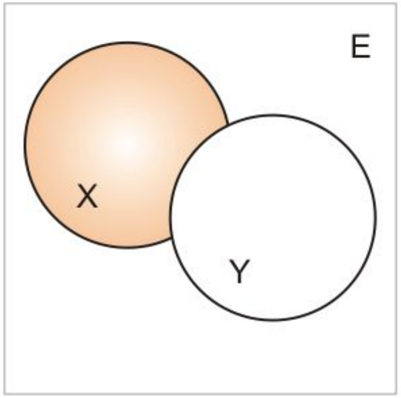
14. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, X = \{1, 5\}, Y = \{1, 2, 4\},$

Найти множество и дать графическую интерпретацию операциям: $X \cap \overline{Y}$

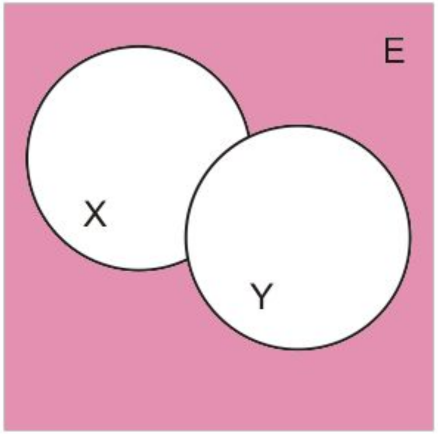
1 $\{5\}$



2 $\{5\}$



3 $\{1, 2, 5\}$



15.Установите соответствие

A $x \in A \cap B \Rightarrow$

B $x \in A \setminus B \Rightarrow$

C $x \in A \cup B \Rightarrow$

D $x \notin A \cap B \Rightarrow$

E $x \notin A \cup B \Rightarrow$

F $x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \overline{\mathbf{B}} \Rightarrow$

1 $\begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases}$

2 $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

3 $\left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right.$

4 $\left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$

5 $\left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array}\right.$

6 $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$

A	
B	
C	
D	
E	
F	

16. $|A \cup B \cup C| =$

Выбрать верный вариант ответа:

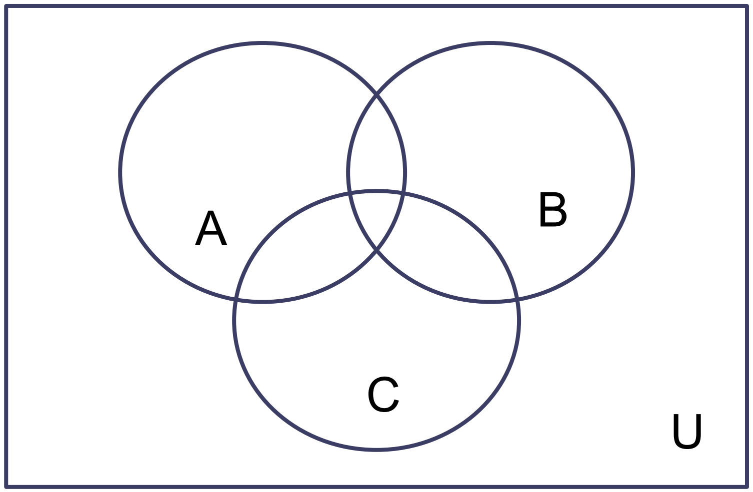
1. $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
2. $|A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$
3. $|A| - |B| - |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
4. $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Кол-во баллов	Оценка
Менее 20	2
20-23	3
24-26	4
27, 28	5

Решение задач

1. Даны множества K={а,б,д}, L={б,в,д}, M={а,в,г}, U={а,б,в,г,д}. Найти множества:
   a) $(\overline{K\cap M})\setminus L$
   b) $L\cup(K\triangle\overline{M})$
   c) $M\times L$

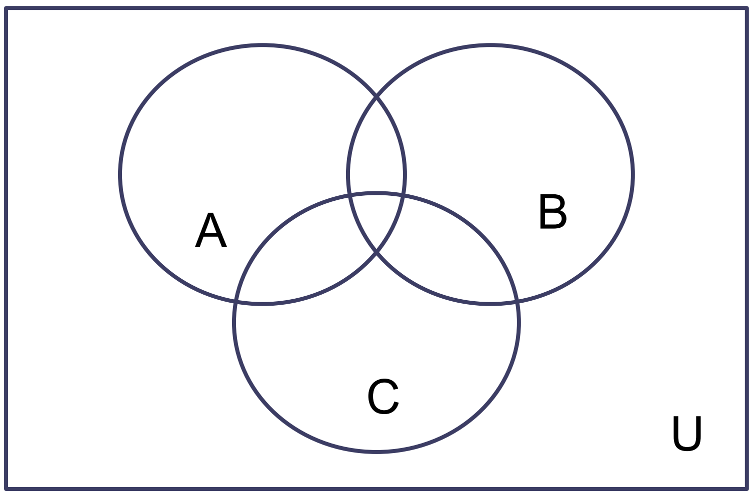
2. Построить диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus C)$ □ $(B \setminus C)$

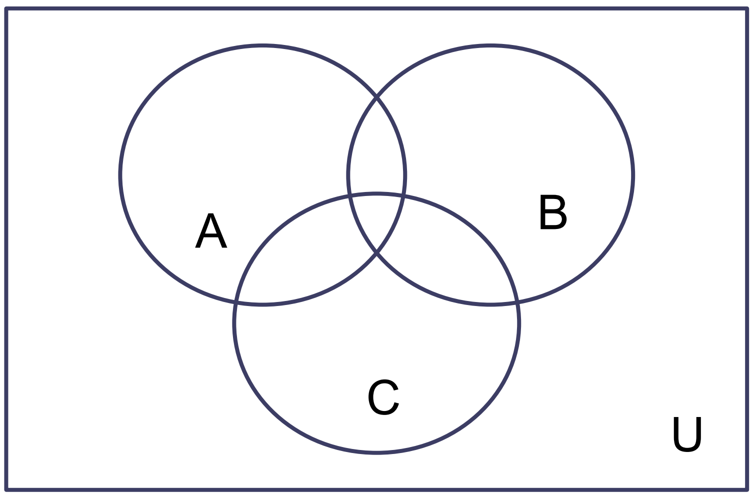


3. Доказать равенство множеств $(C\square B)\cup(A\square C)=(A\cup \overline{B)}\setminus C$

a) с помощью диаграммы Эйлера – Венна;

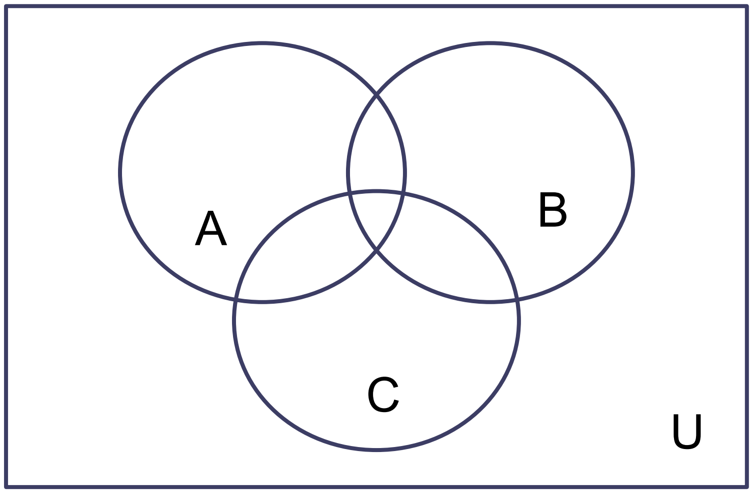
b) аналитически

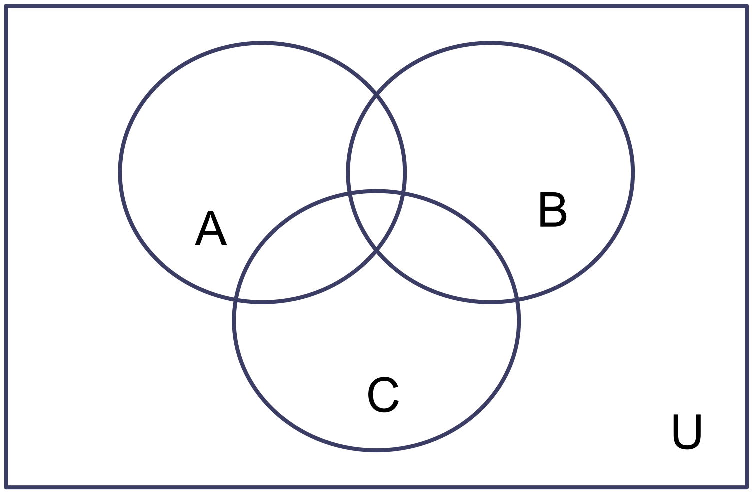


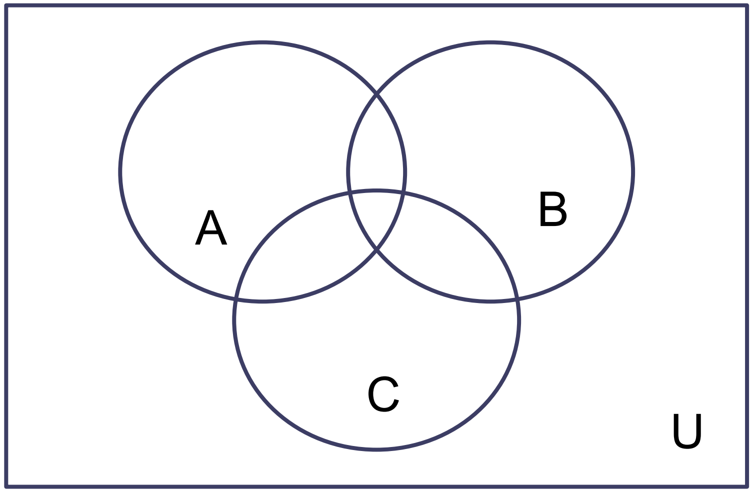


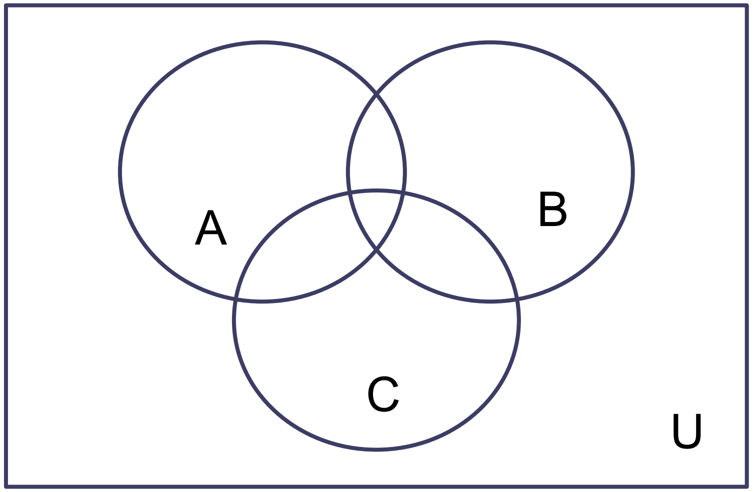
3. Доказать равенство множеств $(C\square B)\cup(A\square C)=(A\cup B)\setminus C$

   б) аналитически


A
B
C
U


A
B
C
U

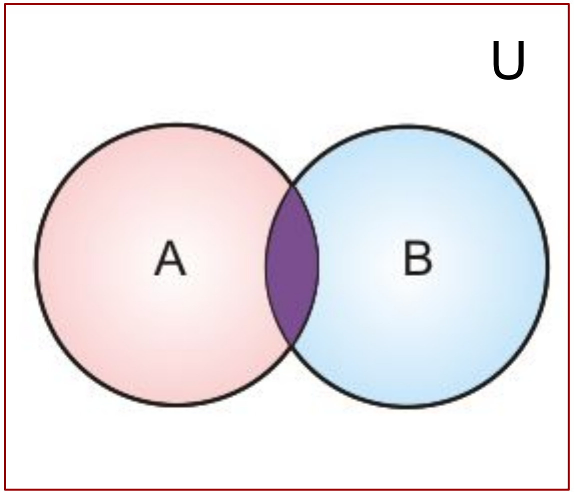

A
B
C
U


A
B
C
U

Нахождение мощности объединения множеств

Мощность объединения двух множеств равна сумме мощностей этих множеств баз мощности их пересечения:

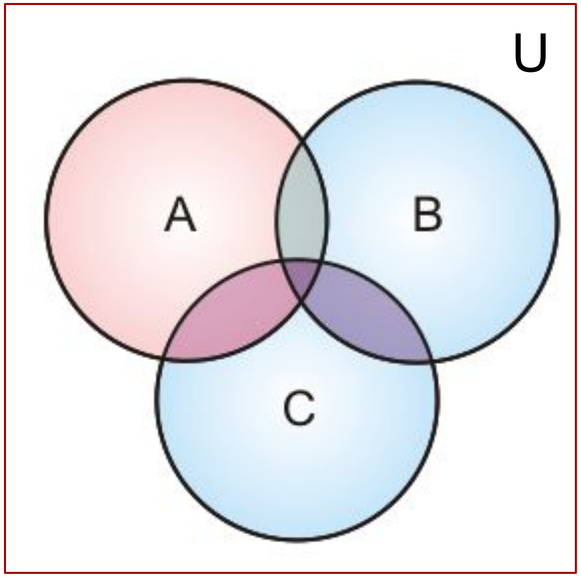
$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |A| + |B| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$



Нахождение мощности объединения множеств

Мощность объединения трех множеств:

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}| = |A| + |B| + |C| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{C}| - |\mathbf{B} \cap \mathbf{C}| + |\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}|$$



Нахождение мощности объединения множеств

Пример. На потоке из 100 студентов 28 человек изучают английский язык, 30 человек - немецкий язык, 42 человека - французский язык. Причем 8 человек изучают два языка - английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек - немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка. Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?

Решение. Обозначим Y - множество студентов, изучающих иностранные языки.

X - множество студентов, не изучающих иностранный язык.

Пусть – S множество студентов, |S|=100 (студентов).

А- мн-во студентов, изучающих англ. язык, |А|=28;

Н- мн-во студентов, изучающих нем. язык , |Н|=30;

Ф- мн-во студентов, изучающих фр. язык, |Ф|=42.

Соответственно множества студентов, изучающих по 2 или 3 ин. языка:

$$|\mathrm{A} \cap \mathrm{H}| = 8, |\mathrm{A} \cap \Phi| = 10,$$
$$|H \cap \Phi| = 5, |\mathrm{A} \cap \mathrm{H} \cap \Phi| = 3$$

По формуле мощности объединения трех множеств

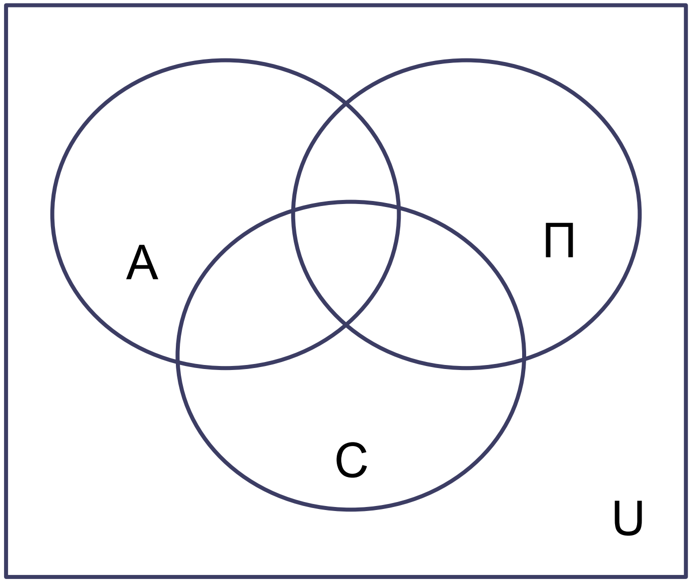
$$|Y| = |A| + |H| + |\Phi| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{H}| - |\mathrm{A} \cap \Phi| - |\mathrm{H} \cap \Phi| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{H} \cap \Phi| =$$
$$28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$$

$$\Downarrow$$

$$|X| = 100 - 80 = 20.$$

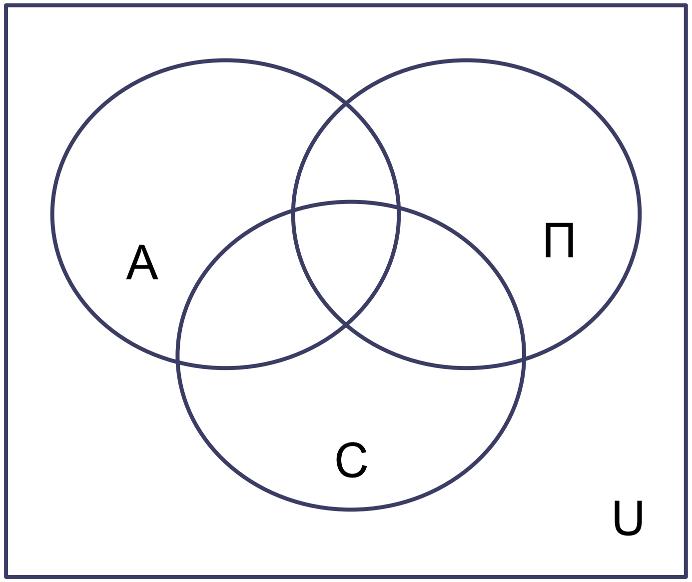
Ответ: 20 студентов не изучает ни один из перечисленных языков

Задача. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?



Задача. В студенческой группе 25 человек. Во время летних каникул 9 из них выезжали в турпоездки за границу, 12 – путешествовали по России, 15 – отдыхали в Сочи, 6 – путешествовали за границей и по России,

7 – были и за границей и в Сочи, 8 – и путешествовали по России и были в Сочи и 3 – участвовали во всех трех поездках. Сколько студентов никуда не выезжало?



Задача. Из 220 школьников 163 умеют играть в хоккей, 175 – в футбол, 24 не умеют играть в эти игры. Сколько школьников одновременно умеет играть в хоккей и футбол?

Ответ: 142

Задача. По итогам экзаменов из 37 студентов отличную оценку по математике имели 15 студентов, по физике – 16, по химии – 19, по математике и физике – 7, по математике и химии – 9, по физике и химии – 6, по всем трем предметам – 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

Ответ: 32

Задача. Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе: Всего – 45 студентов. Футбольная секция – 25 человек, баскетбольная секция – 30 человек, шахматная секция – 28 человек, футбольная и баскетбольная – 16, футбольная и шахматная – 18, баскетбольная и шахматная – 17. В трех секциях одновременно занимаются 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

Домашняя работа

- В течение 30 дней сентября было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре была хорошая погода?
- В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Подготовка к контрольной работе

1. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$;

з) $Q = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n < 20, n - \text{простое}\}$;

и) $S = \left\{n \mid n \in \mathbf{Z}, \dfrac{n^2 - 2n + 5}{(n-1)^2} - \text{целое}\right\}$;

2. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.

а) {сумма; разность; множитель; частное};

б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};

в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};

г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};

д) {4; 6; 12; 81; 441; 1113};

е) {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур};

ж) $\left\{\frac{3}{4}; \frac{7}{11}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{9}{16}; \frac{2}{9}\right\}$;

з) {шар; пирамида; параллелограмм; цилиндр; конус}.

3. Докажите, что

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A) = B \setminus A.$$

4. Покажите с помощью диаграмм Эйлера–Венна, что

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)].$$

5. Даны множества K={а,б,д}, L={б,в,д}, M={а,в,г}, U={а,б,в,г,д}. Найти множества:
   a) $(\overline{K \cup M}) \setminus L$
   b) $L \cap (\overline{K} \triangle M)$
   c) $M \times \overline{L}$

6. Постройте диаграммы Эйлера-Венна для множеств
а) $(C\setminus B) \cup \overline{(A\setminus C)}$; в) $(A\setminus \overline{C}) \cup (B \Delta C)$; с) $(C \Delta A)\setminus(B \cap A)$.

Контрольная работа

Продолжительность 45 минут

Критерии оценки:

- На «3»- 2 и 3 задания
- На «4» - 1, 2, 3, 4а)
- На «5» - все! (и правильно)

Удачи!