Кодирование оптимальный код Хаффмана

Лекция 14

План лекции

- Алфавит, кодирование, код
- Типы кодирования, однозначное декодирование
- Метод кодирования Хафмана
- Метод кодирования Фано

Понятие кода

- Алфавитом называется конечное множество символов
- Сообщением алфавита А называется конечная последовательность символов алфавита А
- Множество всех сообщений алфавита А обозначается А*

Понятие кода

- Кодом называется отображение К : Алф1* —> Алф2*, согласованное с конкатенацией, т.е. удовлетворяющее равенству К(с1с2...сN) = К(с1) К(с2)... К(сN) для любого сообщения с1с2...сN из Алф1*

- Значение К(с1с2...сN) называется кодом сообщения с1с2...сN

- Код К : Алф1* —> {0,1}* называется двоичным кодом

Кодирование и декодирование

- Кодированием сообщения называется вычисление кода сообщения
- Декодированием (дешифровкой) сообщения называется вычисление его прообраза под действием кода
- Код К называется однозначно декодируемым, если существует обратная функция $К^{-1}$
- Если вычисление $К^{-1}$ требует большого количества времени, то говорят не о кодировании, а о шифровании

Пример 1

Алф1 = {a,b,c,d}
Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 01, К(c) = 10, К(d) = 1

$К^{-1}$(01101010) = {addbba, bccc, …} – прообраз 01101010

Данный код не является однозначно декодируемым

Пример 2

Алф1 = {a,b,c,d}
Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 10, К(c) = 110, К(d) = 111

Почему данный код является однозначно декодируемым?

Кодовое дерево

Кодовым деревом кода К:Алф1 ->Алф2 называется такое дерево Т, с рёбрами помеченными символами из Алф2, что

- Любой путь из корня Т совпадает с началом кода какого-то символа из Алф1
- Код любого символа из Алф1 соответствует какому-то пути из корня Т
  - Почему не всегда до листа?

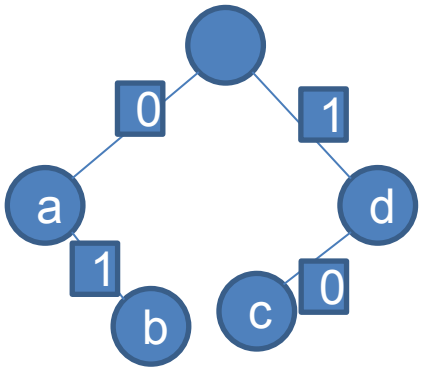
Пример кодового дерева

Алф1 = {a,b,c,d}

Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 01,

К(c) = 10, К(d) = 1



Почему у сообщения 01101010 как минимум два прообраза?

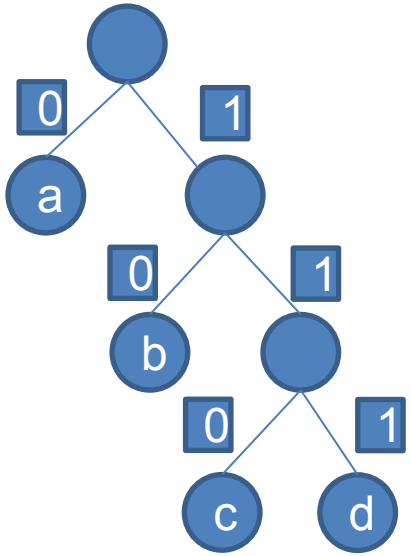
Пример кодового дерева

Алф1 = {a,b,c,d}

Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 10,

К(c) = 110, К(d) = 111



Почему у *любого* сообщения один прообраз?

Префиксный код

Код К называется префиксным, если для любых двух сообщений U и V код К(U) не является началом (префиксом) кода К(V) и наоборот

- Свойства префиксного кода
- В дереве префиксного кода коды всех символов заканчиваются в листьях

- Префиксный код позволяет выделять коды символов без использования разделителей

Примеры префиксных кодов

Пример 1

Алф1 = {a,b,c,d}
Алф2 = {0,1}

К(a) = 00, К(b) = 01, К(c) = 10, К(d) = 11

Как выглядит кодовое дерево этого кода?

Примеры префиксных кодов

Пример 2

Алф1 = {a,b,c,d}
Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 10, К(c) = 110, К(d) = 111

Как выглядит кодовое дерево этого кода?

Однозначная декодируемость префиксного кода

Теорема Любой префиксный код однозначно декодируем

Доказательство

- Пусть К – префиксный код. Докажем, что у кода S=К(R) любого сообщения R ровно один прообраз
- Индукция по длине L сообщений R
- База L = 1
  - R восстанавливается однозначно в силу префиксности К
    - Что было бы, если бы коды *двух разных* символов являлись бы префиксом S
- Шаг L > 1
  - К согласован с конкатенацией ==> найдётся символ с такой, что S = К(c) S'
    - Что бы было бы, если бы такого символа не было бы или бы он был бы не один бы?
  - К префиксный ==> символ с единственный
  - Длина прообраза S' строго меньше длины прообраза S
  - По предположению индукции S' декодируется однозначно

Пример

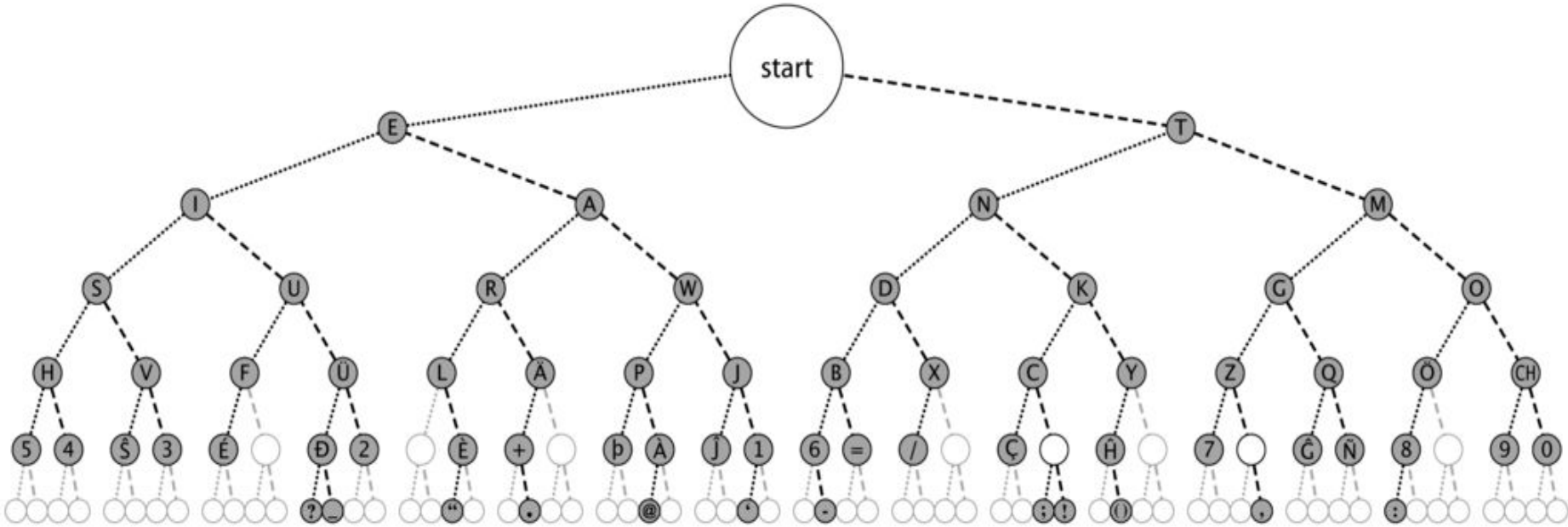
Алф1 = {a,b,c,d}
Алф2 = {0,1}

К(a) = 0, К(b) = 101, К(c) = 110, К(d) = 1110

Рассмотрим сообщение 01101010
01101010 = К(a) 1101010
1101010 = К(c) 1010
1010 = К(b) 0
0 = К(a)
К(acba) = 01101010

Пример азбука Морзе

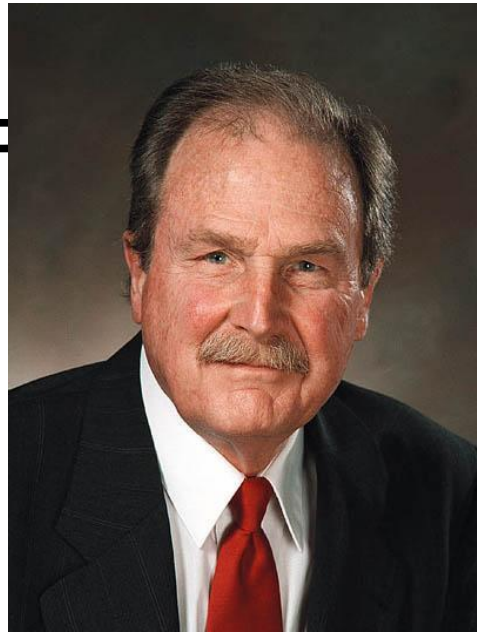
- 1840 Alfred Vail по заказу телеграфной компании Samuel F.B. Morse
- Двоичный (точка, тире) непрефиксный код – почему?
- Троичный (точка, тире, пауза) префиксный код – почему?
- Кодовое дерево азбуки Морзе как двоичного кода для латиницы



Понятие оптимального кода

- Обозначим
  - Δ – множество кодов Алф1* -> Алф2*
  - К – какой-то код из Δ
  - R – произвольное сообщение из Алф1*
  - L(К, R) – длина R после кодирования
  - p_x – число вхождений символа c_x в R
    - заодно мы пронумеровали символы из Алф1, x – номер символа c_x
- Длина кода сообщения R есть $L(К,R) = \sum p_x \cdot L(К, c_x)$
- Код К* называется оптимальным для сообщения R в множестве кодов Δ, если
  $L(К^*,R) = \min \{ \text{длина}(К,R) \mid К \in Δ \}$

Оптимальный двочинный префиксный код



- Как *быстро* построить оптимальный двоичный префиксный код для данного сообщения?

- Сжатие данных при хранении и передаче
- Устранение избыточности при шифровании данных

- David A. Huffman 1925-1999 "A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes", Proceedings of the I.R.E., September 1952, pp 1098–1102.

Свойства оптимального двоичного префиксного кода

Пусть R -- сообщение в алфавите Алф1={c1,…,cn}

c_x входит в R p_x раз (x=1,...,n)

К* -- оптимальный двоичный префиксный код для R

1. Если $p_x < p_y$, то $L_x(К^*) >= L_y(К^*)$
   - Иначе для кода $К(c_x) = К^*(c_y)$, $К(c_y) = К^*(c_x)$ и $К(c) = К^*(c)$ $L(K,R) < L(K^*,R)$

2. Можно занумеровать символы Алф1 так, чтобы $p_1>=p_2>=…>=p_n$ и $L(К^*,c_1)<=L(К^*,c_2)<=…<=L(К^*,c_n)$

Свойства оптимального двоичного префиксного кода

3. Символов с кодом длины $L(K^*, c_n)$ (с самым длинным кодом) не менее двух
   - Иначе удалим последний символ в коде c_n -- длина $L(K^*, R)$ сократится, префиксность K^* сохранится

4. Можно перенумеровать символы так, что $K^*(c_n) = P\ 0$ и $K^*(c_{n-1}) = P\ 1$ и сохранив условие 2
   - Следует из свойства 3

Свойства оптимального двоичного префиксного кода

5. Оптимальный двоичный префиксный код к* для сообщения r, полученного из сообщения R заменой самого редкого символа c_n на c_{n-1}, и К* связаны соотношениями
   - к*(c_{n-1}) = удалить из К*(c_{n-1}) последний символ
   - К*(c_n) = к*(c_{n-1}) 0
   - К*(c_{n-1}) = к*(c_{n-1}) 1
   - К*(c) = к*(c) для остальных символов c
   - L(K*,R) = L(k*,r) + p_n + p_{n-1}

Построение дерева оптимального префиксного двоичного кода

Вход

Кратности p1, …, pn вхождений симолов c1, ..., cn в сообщение

Выход

Дерево оптимального двоичного префиксного кода для сообщения

Алгоритм

- W = {p1(c1), …, pn(cn)} – множество деревьев
  - Левая скобочная запись, кратности в качестве меток вершин
- пока в W два или более поддеревьев
  - Найти в W деревья T = x(...) и U = y(...) с минимальными метками x и y
  - W = (W \ {T, U}) U { (x+y)(T, U) }

Пример

кол около колокола

о – 7; к – 4; л – 4; пробел – 2; а – 1.

Один из вариантов работы алгоритма

Множество W

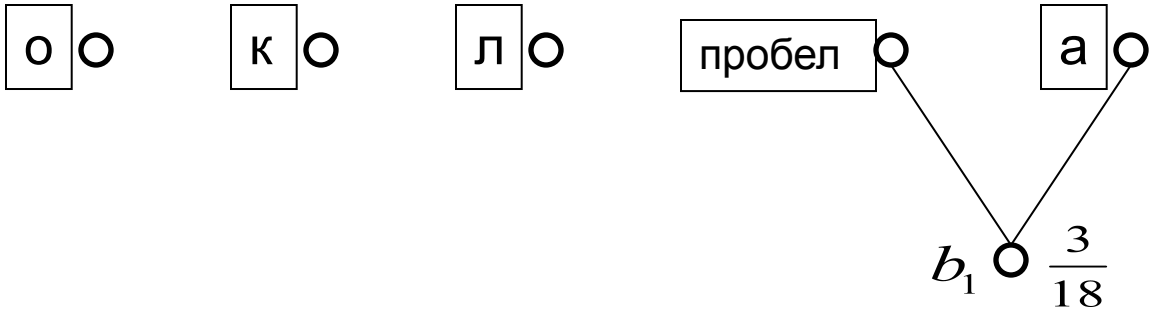
До цикла {7(о), 4(к), 4(л), 2(пробел), 1(а) }

После шага 1 {7(о), 4(к), 4(л), 3(2(пробел), 1(а)) }

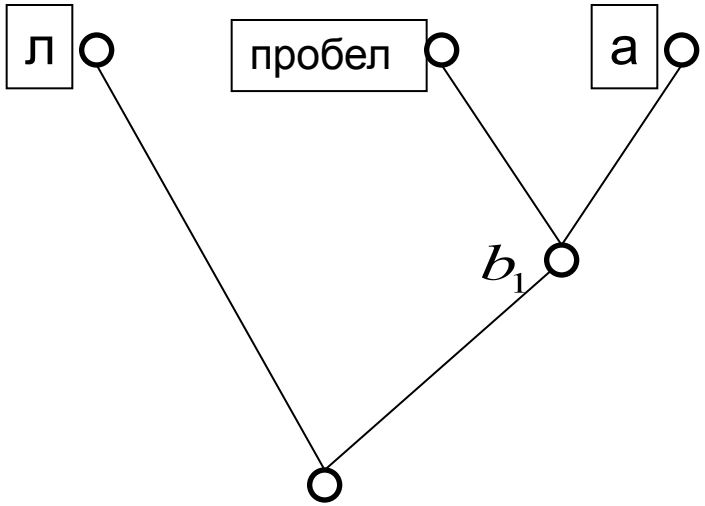
После шага 2 {7(о), 4(к), 7(4(л), 3(2(пробел), 1(а))) }

После шага 3 {7(о), 11(4(к), 7(4(л), 3(2(пробел), 1(а)))) }

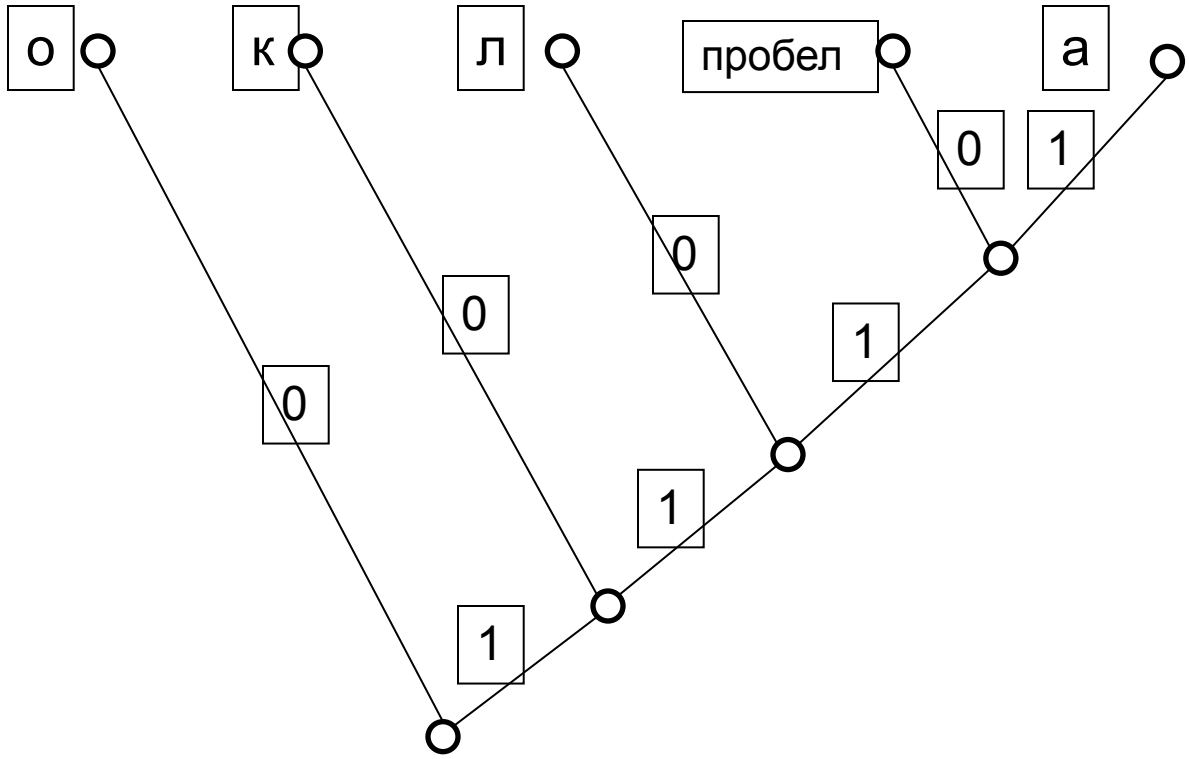
После шага 4 {18(7(о), 11(4(к), 7(4(л), 3(2(пробел), 1(а))))) }



Дерево после шага 1



Дерево после шага 2



Дерево после шага 4

Пример построения кода по кодовому дереву

- Пометим дуги, исходящие из каждой вершины дерева, единицей и нулем
- Проходя путь из корня дерева до символа и выписывая все пометки дуг на этом пути, получим код для этого символа

В нашем примере коды будут такими

о	0,		
к	10	пробел	1110
л	110	а	1111

Закодированное сообщение

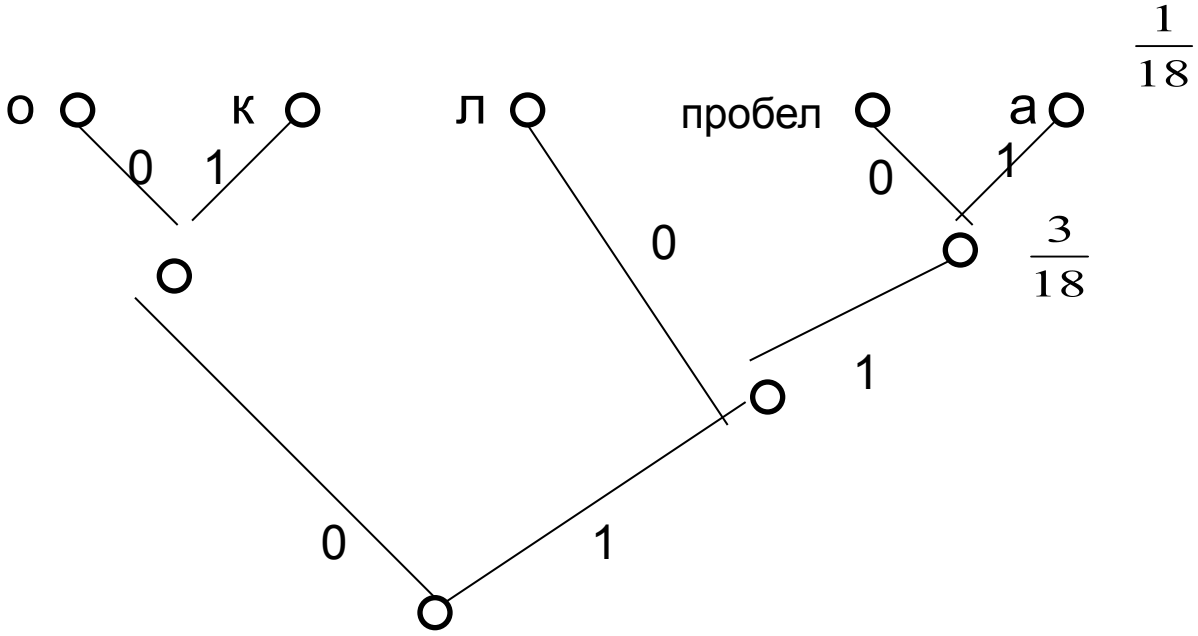
1001101110010011001110100100100110111 1

Длина закодированного сообщения L = 39

Для разобранного примера можно построить другое дерево

Закодированное сообщение длины L = 39

010010110000100100011001001000010010111



Теорема

Длина кодового слова в оптимальном префиксном двоичном коде ограничена порядковым номером минимального числа Фибоначчи, превосходящего длину входного текста.

Доказательство – в качестве упражнения

Следствие

При кодировании по алгоритму Хаффмана текстов ASCII размером до 11Тб код любого символа короче 64 битов

- Алфавит, кодирование, код
- Типы кодирования, однозначное декодирование
- Метод кодирования Хафмана
- Метод кодирования Фано

Метод Фано

Роберт Марио Фано р. 1917

Один из первых алгоритмов сжатия на основе префиксного кода

Метод Фано

- Упорядочим входной алфавит по возрастанию *частот* p1 <= p2 <= … <= pn вхождения символов в сообщение
- Обозначим Sk = p1+p2+…+pk, S0 = 0
- Строим таблицу K с двоичными кодами символов входного алфавита
- K[i][1] = i-й символ (по возрастанию частот)
- K[i][2] = Sk
- Остальные клетки – на след. слайде

Метод Фано

- K[i][j] заполняем 0 и 1 по след. правилу
- Для каждого *максимального* интервала строк [a, b], у которых в столбце j-1 находятся одинаковые цифры
  - Находим c ∈ [a, b] такое, что Sc ближе всего к (Sa+Sb)/2
  - K[i][j] = 1 для i ∈ [a, c], K[i][j] = 0 для i ∈ [c+1, b]

Пример

A = {a, b, c, d, e}

Частоты $p_a = 0.11$, $p_b = 0.15$, $p_c = 0.20$, $p_d = 0.24$, $p_e = 0.30$

0.46 ближе к 0.5

0.26 ближе всех к (0.00+0.46)/2=0.23

0.70 ближе всех к (0.46+1.00)/2=0.73

0.11 ближе всех к (0.00+0.26)/2=0.13

	P_i	S_i			
		0			
a	0.11	0.11	1	1	1
b	0.15	0.26	1	1	0
c	0.20	0.46	1	0	
d	0.24	0.70	0	1	
e	0.30	1.00	0	0	

Свойства кода Фано

- Кодовое дерево для кода Фано обладает следующим свойством
  - Ребра, исходящие из корня, соответствуют разбиению алфавита на две группы символов, близкие по частоте
  - Ребра, исходящие из вершины следующего «этажа», соответствуют разбиению соответствующей группы на близкие по частоте подгруппы и т. д.
- Код Фано – префиксный код
  - Почему?

Свойства кода Фано

- Код Фано неоптимальный
- Пример
  - Частоты p1=0.4, p2=p3=p4=p5=0.15
  - Фано: 00 01 10 110 111
    - средняя длина кодового слова 2*0.4+(2+2)*0.15+(3+3)*0.15 = 2.3
  - Хаффман: 0 010 011 000 001
    - средняя длина кодового слова 1*0.4+ (3+3+3+3)*0.15 = 2.2
  - Как выглядят кодовые деревья кода Хаффмана т Фано?

Метод Шеннона

- Клод Шеннон 1916 – 2001, основоположник теории информации

1. Упорядочим входные символы по возрастанию частот и образуем частичные суммы Sk как в методе Фано
2. Для каждой частоты Sk находим nk т.ч. $1/2^{nk} \leq Sk \leq 2/2^{nk}$ --- нужно отделить одну Sk от другой
3. Sk разлагаем в двочную дробь $0.d_1d_2d_3\ldots$
4. Первые nk цифр этой дроби задают код для k-го символа

Пример построения кода Шеннона

		nk	разложение Sk	код
p(a) = 0.08	S_a = 0.08	4	0.0001	0001
p(b) = 0.12	S_b = 0.20	4	0.0011	0011
p(c) = 0.15	S_c = 0.35	3	0.010	010
p(d) = 0.28	S_d = 0.63	2	0.10	10
p(e) = 0.37	S_d = 1.00	2	0.11	11

Пример вычисления na:

0.08 ~= 1/12; 1/2^4 ≤ 1/12 ≤ 2/2^4

Свойства кода Шеннона

- Код Шеннона -- префиксный код
  - Почему?

- Пусть pk – частота вхождения k-го символа в кодируемое сообщение длины N. Кодирование такого сообщения кодом Шеннона дает сообщение длины не более N*(p1*log2(p1) + p2*log2(p2) + … + pn*log2(pn))

  - Почему? Как Шеннон выбрал длины кодовых слов?

Заключение

- Алфавит, кодирование, код
- Типы кодирования, однозначное декодирование
- Метод кодирования Хафмана
- Метод кодирования Фано