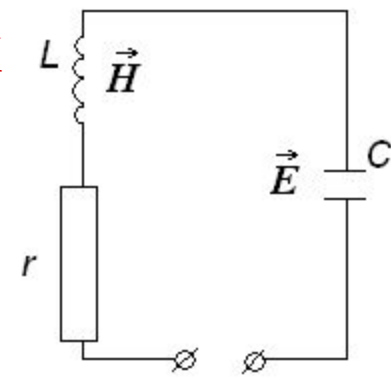


# Лекция №12. Электромагнитные колебания в полых резонаторах.

1. Электромагнитные колебания в объемных резонаторах.
2. Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах.
3. Добротность объемных закрытых резонаторов.

# 1 Электромагнитные колебания в объемных резонаторах

Рисунок 3.1 – Схема колебательного контура  
в низкочастотной цепи



**Принцип работы:** переход энергии электрического поля конденсатора в магнитное поле катушки и наоборот.

**Основное свойство** - частотная избирательность по отношению к внешнему гармоническому воздействию: амплитуда его колебаний максимальна на резонансной частоте и уменьшается по мере удаления от нее.

**Основное назначение** – поддержание в течение длительного времени периодических колебаний, вызванных внешним импульсом.

**Применение резонаторов** - неотъемлемая часть многих усилителей, большинства генераторов, приемников, частотных фильтров и измерителей частоты.

Аналог колебательного контура в высокочастотной области – *резонатор*.

Рисунок 3.2 – Геометрия закрытого резонатора

**Принцип работы:** использование колебательного процесса перехода

электрического поля в магнитное в электромагнитной волне. (В теореме Умова-Пойнтинга данный процесс описывается слагаемым

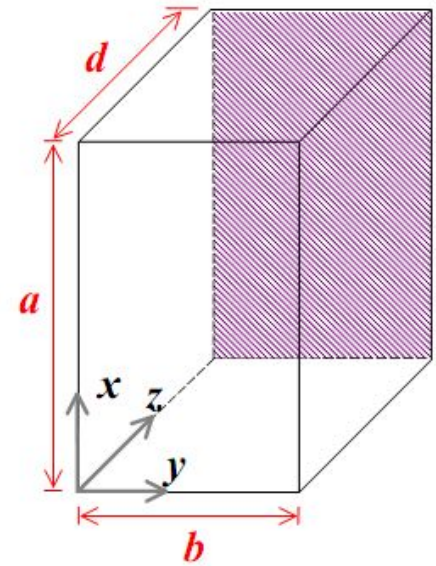
$$\int_V \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$$

Для исключения потерь на излучение объем, в котором сосредоточено поле, изолируется металлом. Конструкция называется *объемным резонатором*.

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$\beta_z = \frac{l\pi}{d}$$





а



б

Рисунок 3.3 – Примеры конструкции резонаторов:  
а – в виде короткозамкнутого отрезка волновода;  
б - отрезок диэлектрического стержня.

**Типы колебаний в резонаторе:** свободные и вынужденные.

**Собственные колебания** – это возможные поля в объемном резонаторе при отсутствии сторонних источников.

Собственные колебания – затухающие.

**Вынужденные колебания** – колебания, возбуждаемые энергией стороннего источника (генератора), вводимой через элемент связи.

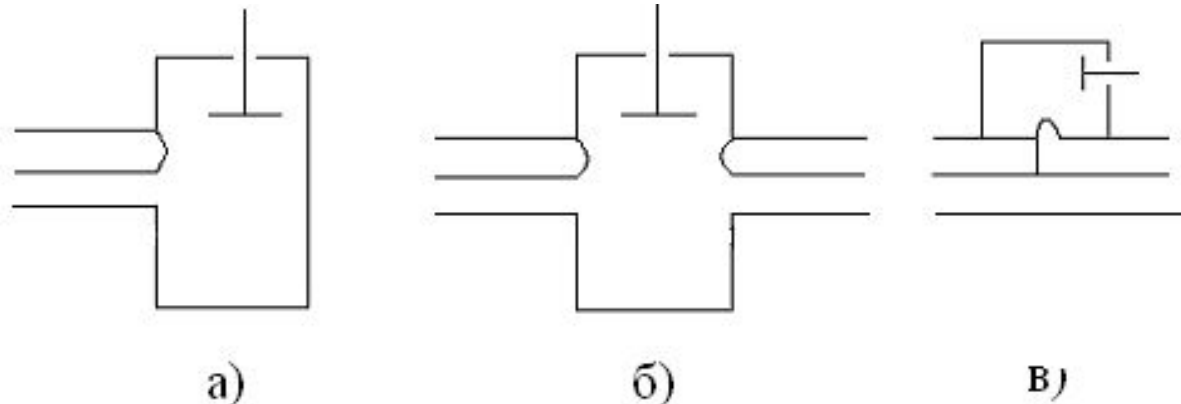


Рисунок 3.4 - Схемы включения резонаторов в тракт: а – с одним элементом связи; б – с двумя элементами связи; в – в виде ответвителя энергии

## 2 Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах

### Структура поля в резонаторе

Наиболее простым вариантом выполнения полого закрытого резонатора является введение металлических стенок (закороток) в волновод.

Введение стенок выполняется так, чтобы внутри отрезка волновода укладывалось целое число полуволн.

Получающаяся стоячая волна - результат многократных упорядоченных отражений исходной бегущей волны регулярного волновода от обеих поперечных стенок.

## Комплексные амплитуды полей:

$$E_x = E_{x0} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.1)$$

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.2)$$

$$E_z = E_{z0} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.3)$$

$$H_x = -i \frac{\beta_z E_y - \beta_y E_z}{\omega\mu} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.4)$$

$$H_y = -i \frac{\beta_x E_z - \beta_z E_x}{\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.5)$$

$$H_z = -i \frac{\beta_y E_x - \beta_x E_y}{\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right) \quad (3.6)$$

**Длины волн собственных колебаний:** 
$$\lambda_s = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\boxtimes}{d}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{\text{кр } \nu}^2}}} \quad (3.7)$$

**Тип колебаний** в резонаторе, имеющий наибольшую длину волны собственных колебаний, называют **основным**.

**Типы колебаний**, имеющие различные структуры, но одинаковые собственные длины волн, называют **вырожденными**.

Вырождение рабочего типа колебаний приводит к усложнению структуры поля в резонаторе, увеличению потерь в нем и искажению его частотных характеристик.

Подавление вырожденного паразитного типа осуществляется обеспечением его сильного затухания в резонаторе.



## Отличие собственных колебаний резонатора от волновода

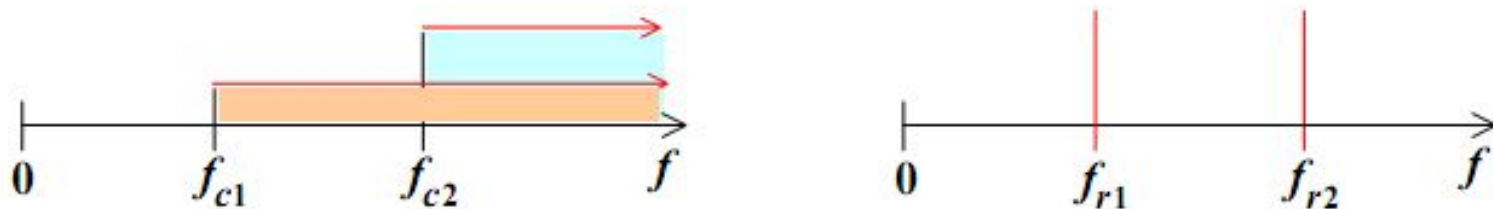


Рисунок 3.4 – Частоты возбуждения мод:

а – в волноводе; б – в резонаторе

В волноводе частоты собственных волн – частоты отсечки. В резонаторе – частоты возбуждения волн.

**В прямоугольном резонаторе** все три координатных оси равноправны. Разделение на типы колебаний чисто условное. Длина волны собственных колебаний:

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}} \quad (3.8)$$

Наибольшее значение критической длины волны (при основном типе колебаний) получается, если индекс при наименьшем ребре резонатора равен нулю и оба остальных индекса равны единице. Типы колебаний с тремя отличными от нуля индексами, по крайней мере, двукратно вырождены.

Наибольшая собственная длина волны сравнима с линейными размерами резонатора.

Наиболее частым используемым типом колебаний в прямоугольном резонаторе является колебание  $H_{101}$ .

**В круглых резонаторах длина волны собственных колебаний определяется формулой:**

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\boxtimes}{d}\right)^2}}, \quad (3.9)$$

где  $\delta_{mn} = v_{mn}$  - для волны типа  $H$  и  $\delta_{mn} = v'_{mn}$  - типа  $E$ .

Другой вид формулы (3.9):

$$\left(\frac{D}{\lambda_{mnl}}\right)^2 = \frac{\boxtimes^2}{4} \left(\frac{D}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{mn}}{\pi}\right)^2, \quad (3.10)$$

где  $D = 2a$  - диаметр резонатора.

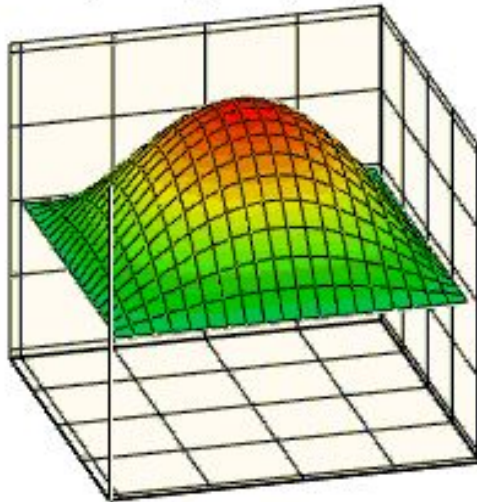
Основными типами колебаний в круглом волноводе являются  $H_{011}$  и  $E_{010}$ .

# Поле колебаний Н<sub>101</sub>

For the TE mode  
 $m = 1$  ,  $n = 0$  ,  $p = 1$

At time (in periods,  $T_p$ )  $\frac{\text{time}}{T_p} = 0.000$

$E_y$  in the plane  $y = y_{obs}$ .



$E_{yb}$

|  
 $x = 0$

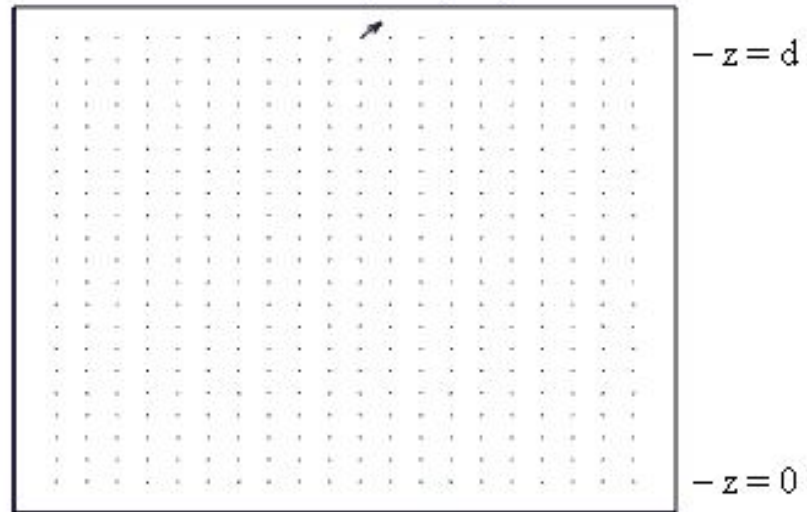
|  
 $x = a$

$(h_{xb}, h_{zb})$

|  
 $x = 0$

|  
 $x = a$

$H_x$  and  $H_z$  in the plane  $y = y_{obs}$ .



### 3 Добротность объемных резонаторов

*Добротностью* объемного резонатора для  $s$ -го типа, определяющей полосу пропускания системы и скорость затухания собственных колебаний, называют отношение

$$Q_s = 2\pi \frac{w}{w_{\Pi}} = \omega_s \frac{w}{P_{\text{п.ср.}}} \quad (3.11)$$

где  $w$  – запасенная при резонансе внутри полости электромагнитная энергия  $s$ -го типа колебаний;

$w_{\Pi} = P_{\text{п.ср.}} T_s$  – энергия полных потерь за время одного периода  $T_s$ ;

$P_{\text{п.ср.}}$  – средняя за период мощность полных потерь;

$\omega_s$  – частота собственных колебаний.

Связь между добротностью и длительностью колебаний:

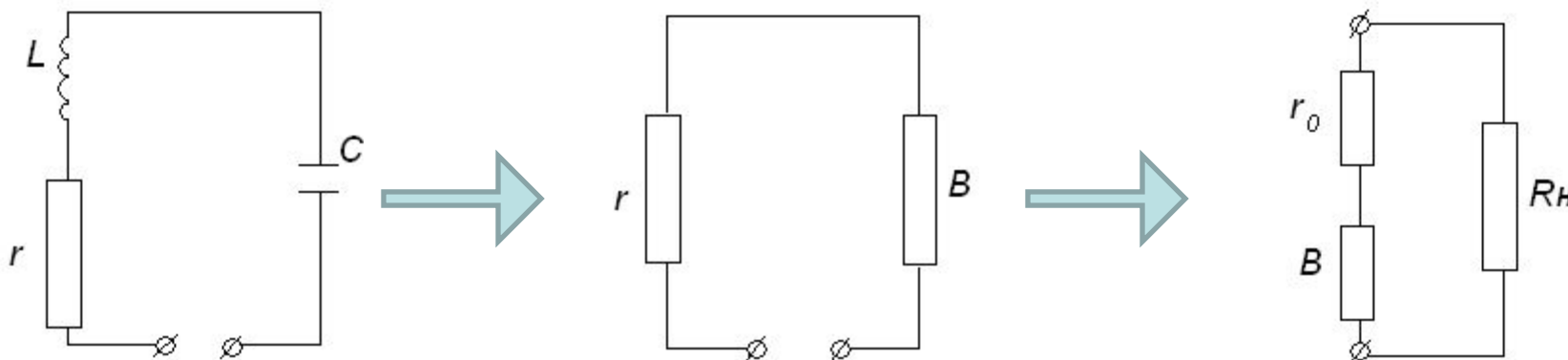
$$W = W_{\text{нач}} \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right) \quad (3.12)$$

## Переход к эквивалентной схеме резонатора

Необходимость перехода определяется возвратом к контурам с сосредоточенными параметрами при микроминиатюризации колебательных систем, изготовленных, например, методами печатной технологии.

### Алгоритм перехода :

1. Объемный резонатор заменяется эквивалентной схемой в виде  $L, C, r$ .
2. Переход к последовательной реактивности:  $B = 1/X = 1/(\omega L - 1/\omega C)$
3. Введение внешней нагрузки  $R_H$  :  $r = r_0 + R_H$



**Нагруженная добротность  $Q_n$**  включает:

- собственную (ненагруженную)  $Q_0$ ;
- внешнюю  $Q_{вн}$ .

**Собственная** (ненагруженная) добротность  $Q_0$  учитывает энергию, рассеянную в самом резонаторе на резонансной частоте.

Добротность, зависящую от мощности полных потерь, часто называют **нагруженной добротностью резонатора  $Q_n$** .

$$1/Q_n = 1/Q_0 + 1/Q_{вн} \quad (3.13)$$

С учетом эквивалентной схемы величина собственной добротности:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{C_{\text{Э}}}{L_{\text{Э}}}} R_{\text{Э}} \approx \omega_0 L / r_0 \quad (3.14)$$

Величина собственной добротности не зависит от применяемой эквивалентной схемы, т.к. не зависит от вида связи.

Внешняя нагрузка:

$$Q_{вн} \approx \omega_0 L / r_{вн} \quad (3.15)$$

## Определение частичных добротностей

Энергия, запасенная в резонаторе, может быть найдена через максимальную энергию одного из этих полей:

$$w = w_{\text{э.макс}} = \frac{\varepsilon_{a1}}{2} \int_V E_m^2 dV = w_{\text{м.макс}} = \frac{\mu_{a1}}{2} \int_V H_m^2 dV \quad (3.16)$$

Частичная добротность при заполнении материалом с потерями:

$$Q_{\text{сд}} = \omega_s \frac{w}{P_{\text{д.ср}}} = \omega_s \frac{w}{\frac{\sigma_1}{2} \int_V E_m^2 dV} = \omega_s \frac{\varepsilon_{a1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\text{tg } \delta_1^{\text{э}}} \quad (3.15)$$

Частичная добротность, обусловленная потерями в стенках:

$$Q_{\text{с.м}} = \omega_s \frac{w}{P_{\text{м.ср}}} = \omega_s \frac{\mu_{a1} \int_V H_m^2 dV}{r_s \oint_S H_{\tau m}^2 dS} \quad (3.16)$$

$r_s = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega_s}{2\sigma_2}}$  - активное поверхностное сопротивление стенок;

$H_{\tau m}$  - амплитуда касательной к стенке компоненты вектора .



## Собственные добротности для различных типов колебаний

*Прямоугольный резонатор:*

$$Q_{H_{101}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{r_S} \frac{abd(a^2 + b^2)}{a^3(d + 2b) + d^3(a + 2b)} \quad (3.17)$$

*Круглый резонатор:*

$$Q_{E_{010}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_S} \frac{ad}{a + d} \quad (3.18)$$

$$Q_{E_{011}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_S} \frac{ad}{2a + d} \quad (3.19)$$

$$Q_{H_{011}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_S \mu_0^2} \frac{\omega_{mnp}^2 \varepsilon_a \mu_a a^2 d}{\frac{d}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{d^2}} \quad (3.20)$$