

Лекция 8

Сети Петри

Элементы сети Петри



Carl Adam Petri

Сеть Петри - двудольный ориентированный мультиграф:

Вершины: позиция и переходы.

Ребра – связь между вершинами по управлению.

Примечания:

- 1) Вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно.
- 2) В позициях могут размещаться метки (маркеры) .
- 3) Метки могут перемещаться по сети.

Событие – срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции.

Простые сети Петри

Сеть Петри состоит из четырёх элементов:

- *множество позиций P ,*
- *множество переходов T ,*
- *входная функция I ,*
- *выходная функция O .*

Определение.

Сеть Петри S является четверкой, $S=(P,T,I,O)$.

$P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - конечное множество позиций, $n \geq 0$.

$T=\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ - конечное множество переходов, $m \geq 0$.

$P \cap T = \emptyset$

$I: T \rightarrow P$ - является входной функцией - отображением из переходов в комплекты позиций.

$O: T \rightarrow P$ - выходная функция - отображение из переходов в комплекты позиций.

Расширенные входная и выходная функции

Определение.

Кратность входной позиции p_i для перехода t_j есть число появлений позиции во входном комплекте перехода, $\#(p_i, I(t_j))$.

Кратность выходной позиции p_i для перехода t_j есть число появлений позиции в выходном комплекте перехода, $\#(p_i, O(t_j))$.

Определение.

Расширенные функции $I: P \rightarrow T$ и $O: P \rightarrow T$ - это функции, для которых выполняется:

$$\#(t_j, I(p_i)) = \#(p_i, O(t_j)), \#(t_j, O(p_i)) = \#(p_i, I(t_j)).$$

Пример 1. Для сети Петри

$$C = (P, T, I, O)$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

$$I(t_1) = \{p_1\}, \quad O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$$

$$I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}, \quad O(t_2) = \{p_5\}$$

$$I(t_3) = \{p_3\}, \quad O(t_3) = \{p_4\}$$

$$I(t_4) = \{p_4\}, \quad O(t_4) = \{p_2, p_3\}$$

Расширенными функциями являются :

$$I(p_1) = \{\}, \quad O(p_1) = \{t_1\}$$

$$I(p_2) = \{t_1, t_4\}, \quad O(p_2) = \{t_2\}$$

$$I(p_3) = \{t_1, t_4\}, \quad O(p_3) = \{t_2, t_3\}$$

$$I(p_4) = \{t_3\}, \quad O(p_4) = \{t_4\}$$

$$I(p_5) = \{t_1, t_2\}, \quad O(p_5) = \{t_2\}$$

Графическое представление

Обозначения на графе:

позиции:



переходы:



Определение.

Граф сети Петри – двудольный ориентированный мультиграф, $G = (V, A)$,

где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ - множество вершин,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ - комплект направленных дуг,

$a_i = (v_j, v_k)$, где v_j, v_k принадлежат V .

Множество V может быть разбито на два непересекающихся подмножества P и T , таких, что:

$a_i \in A$, если $a_i = (v_j, v_k)$, тогда либо $v_j \in P$ и $v_k \in T$, либо $v_j \in T$ и $v_k \in P$.

Пример

Пример 1. Для сети Петри

$S=(P,T,I,O)$

$P= \{p1, p2, p3, p4, p5\}$

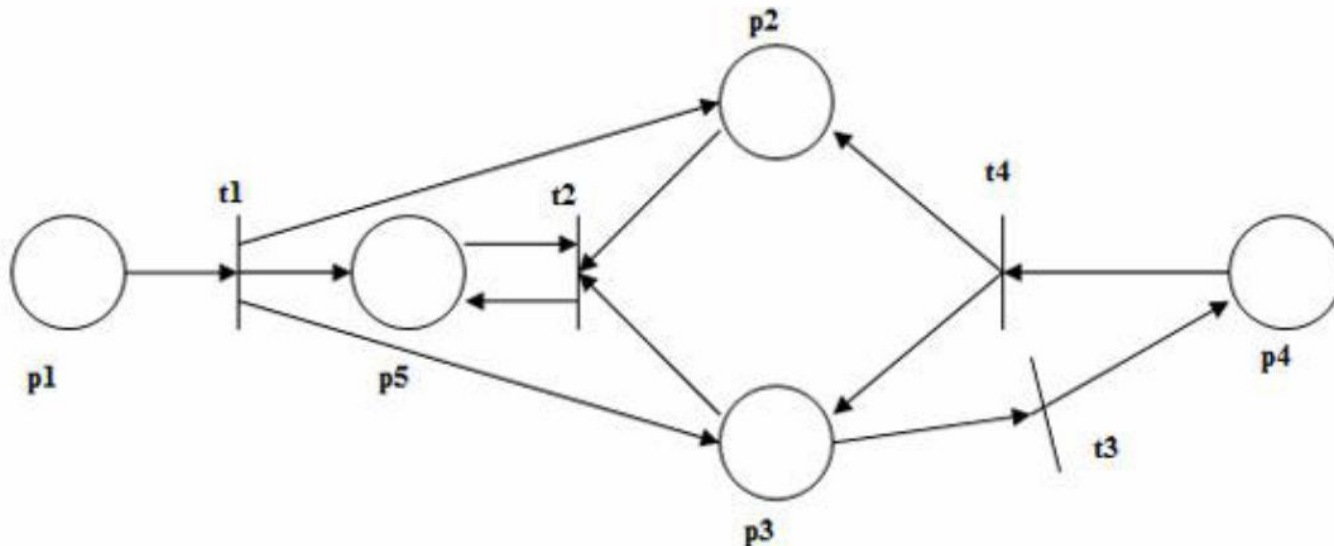
$T= \{ t1, t2, t3, t4\}$

$I(t1)=\{ p1\}, \quad O(t1)=\{ p2, p3, p5 \}$

$I(t2)= \{ p2, p3, p5 \}, \quad O(t2)=\{ p5 \}$

$I(t3)=\{ p3 \}, \quad O(t3)=\{ p4 \}$

$I(t4)=\{ p4 \}, \quad O(t4)=\{ p2, p3 \}$



Двойственная сеть

Двойственной к сети Петри $S = (P, T, I, O)$ является сеть Петри $S' = (T, P, I, O)$, которая получается в результате перестановки позиций и переходов. Структура графа сохраняется, просто меняются местами кружки и планки.

Пример 1. Для сети Петри

$S = (P, T, I, O)$

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$

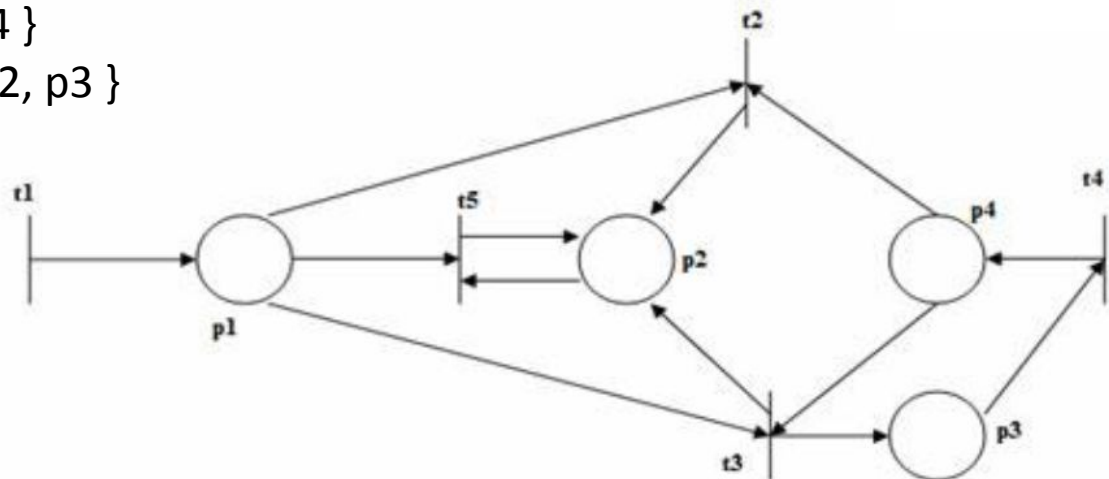
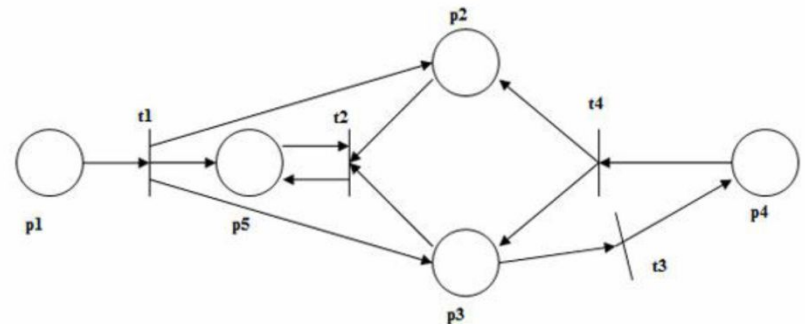
$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$I(t_1) = \{p_1\}, \quad O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$

$I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}, \quad O(t_2) = \{p_5\}$

$I(t_3) = \{p_3\}, \quad O(t_3) = \{p_4\}$

$I(t_4) = \{p_4\}, \quad O(t_4) = \{p_2, p_3\}$



Маркировка сети

Маркировка \mathbf{m} - это присвоение фишек позициям сети Петри.

Фишки используются для определения выполнения сети Петри.

Определение.

Маркировка \mathbf{m} сети Петри $\mathbf{C} = (\mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{I}, \mathbf{O})$ есть функция, отображающая множество позиций \mathbf{P} в множество неотрицательных целых чисел \mathbf{N} : $\mathbf{m}: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{N}$.

Маркировка может быть также определена как n -вектор $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, где $n = |\mathbf{P}|$.

Вектор \mathbf{m} определяет для каждой позиции p_i сети Петри количество фишек в этой позиции.

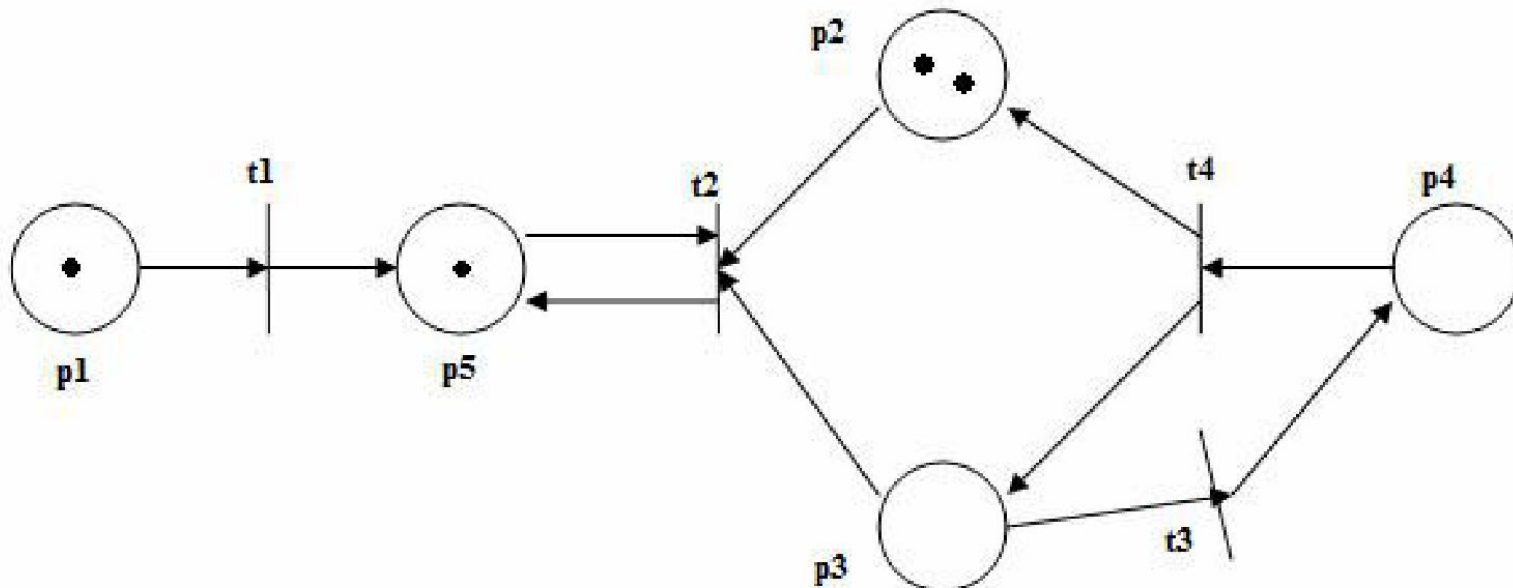
Количество фишек в позиции p_i есть m_i , т.е. $m(p_i) = m_i$, $i = 1, \dots, n$.

Маркированная сеть Петри

Определение.

Маркированная сеть Петри $M = (C, m)$ есть совокупность структуры сети Петри $C = (P, T, I, O)$ и маркировки m и может быть записана в виде $M = (P, T, I, O, m)$.

Пример: Маркировка - (1, 2, 0, 0, 1)



Влияние фишек на сеть

Выполнение сети Петри - распределение фишек сети.

Сеть Петри выполняется посредством запусков переходов.

Переход запускается удалением фишек из его входных позиций и образованием новых фишек, помещаемых в его выходные позиции.

Переход может запускаться только в том случае, когда он разрешен.

Переход называется **разрешенным**, если каждая из его входных позиций имеет число фишек, по крайней мере, равное числу дуг из позиции в переход.

Фишки во входной позиции, которые разрешают переход, называются его **разрешающими фишками**.

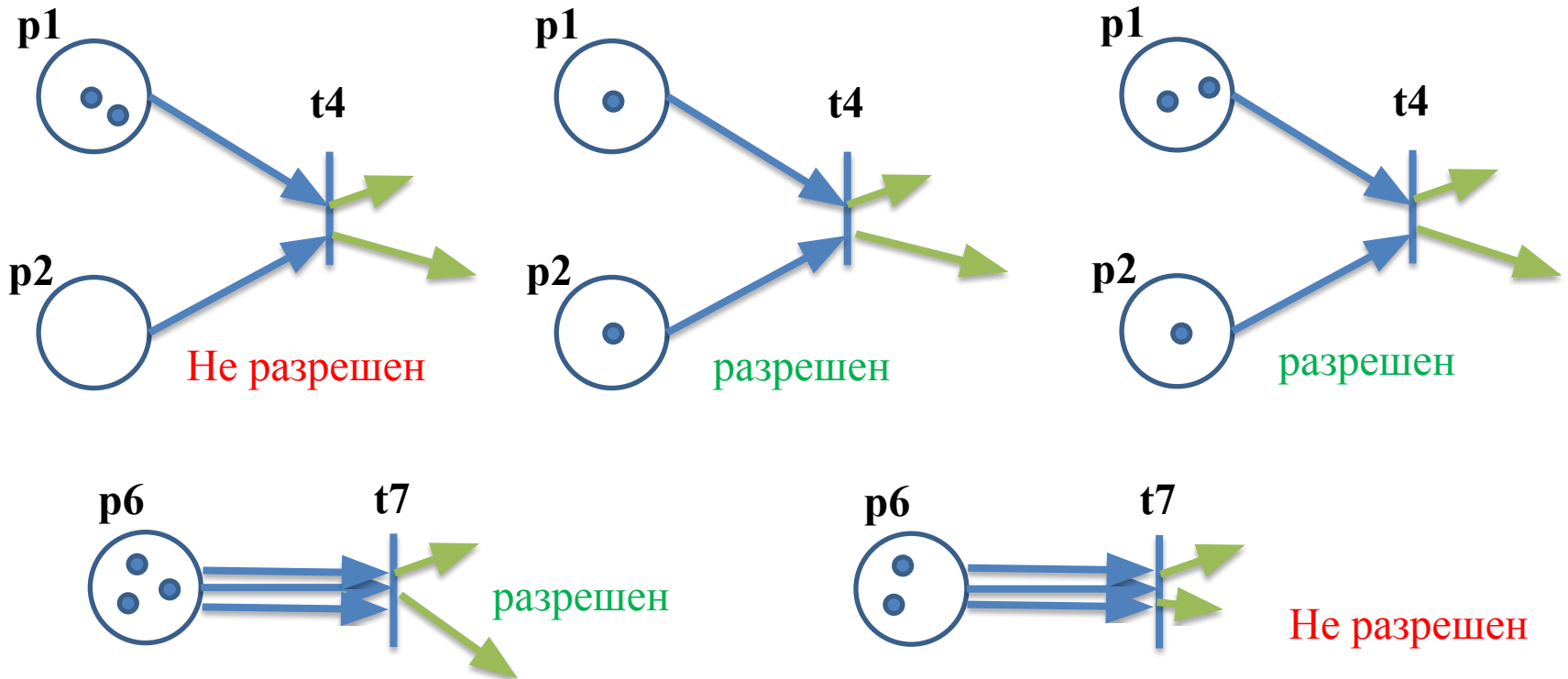
Плотность загрузки вычислительной системы

Пример:

Если позиции p_1 и p_2 служат входами для перехода t_4 , тогда t_4 разрешен, если p_1 и p_2 имеют хотя бы по одной фишке.

Для перехода t_7 с входным комплектом $\{p_6, p_6, p_6\}$ позиция p_6 должна обладать, по крайней мере, тремя фишками, для того, чтобы t_7 был разрешен.

Смотрим только на количество входящих дуг!!!!



Переходы по сети

Определение.

Переход t_j из T в маркированной сети Петри $C = (P, T, I, O)$ с маркировкой m разрешен, если для всех p_i , принадлежащих P :

$$m(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)).$$

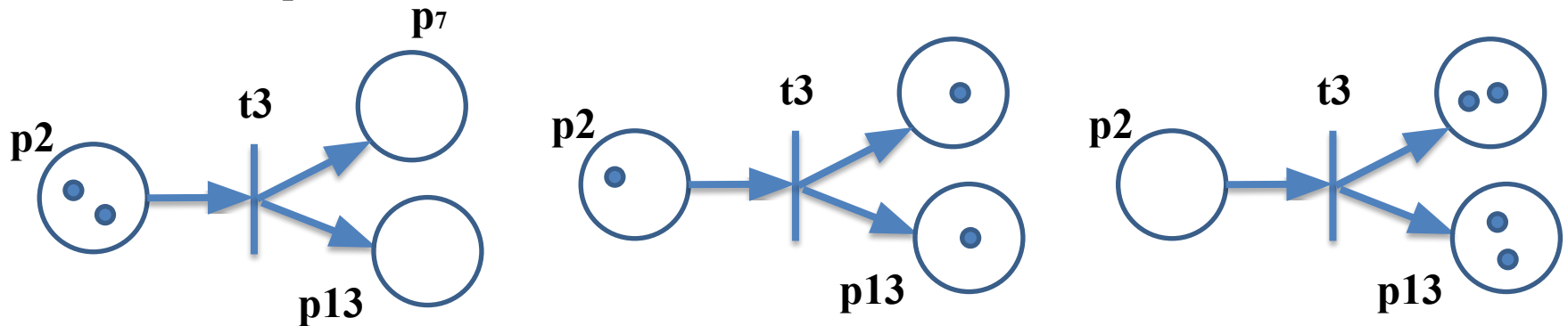
Переход запускается удалением всех разрешающих фишек из его входных позиций и последующим перемещением в каждую из его выходных позиций по одной фишке для каждой дуги.

Если какая-либо входная позиция перехода не обладает достаточным количеством фишек, то переход не разрешен и не может быть запущен.

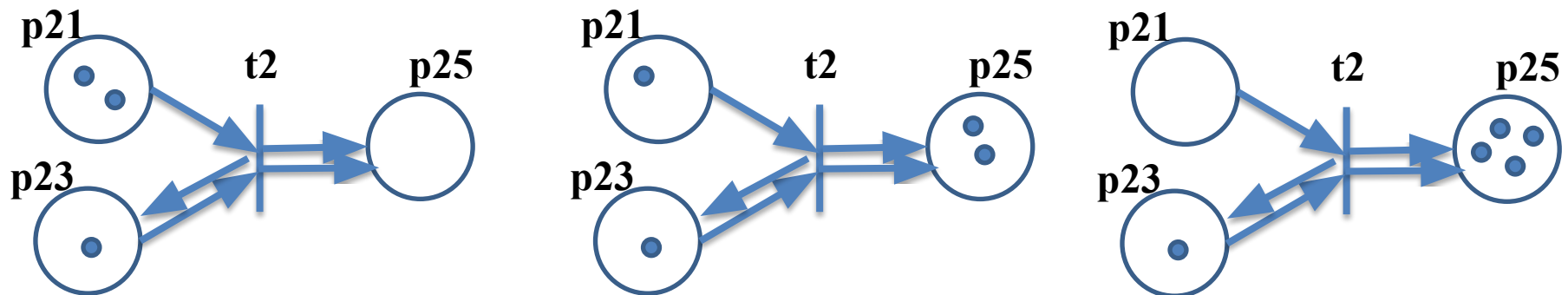
Запуски могут осуществляться до тех пор, пока существует хотя бы один разрешенный переход. Когда не останется ни одного разрешенного перехода, выполнение прекращается.

Срабатывание переходов

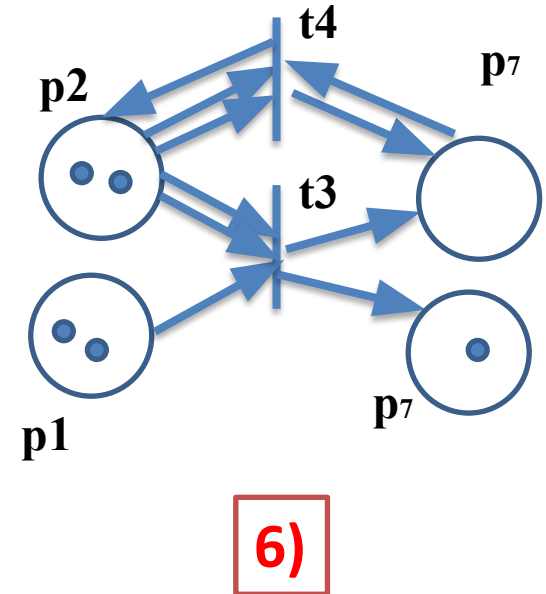
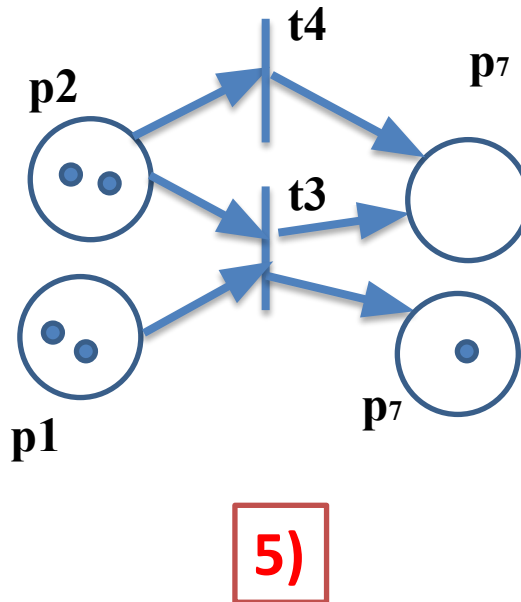
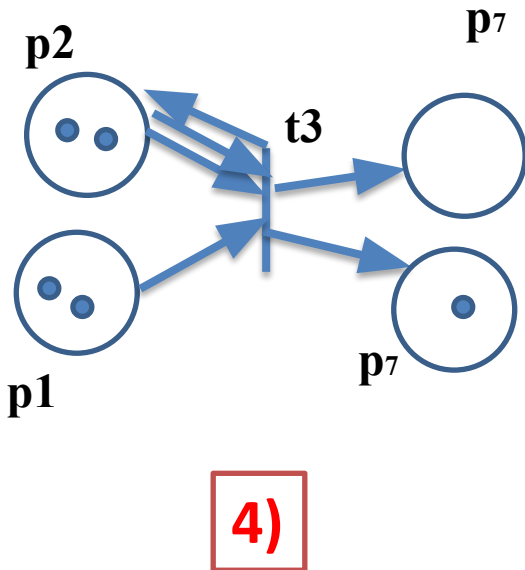
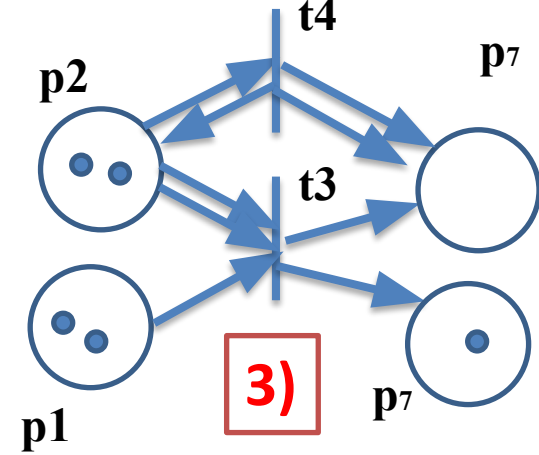
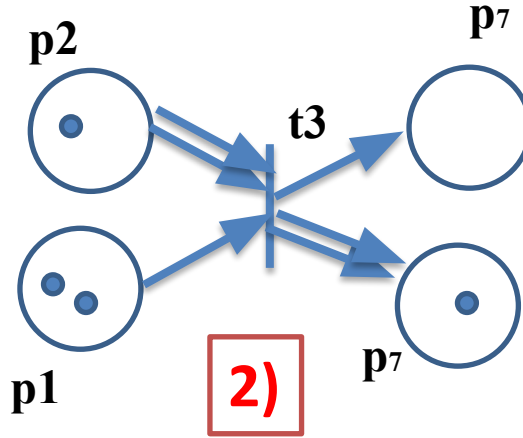
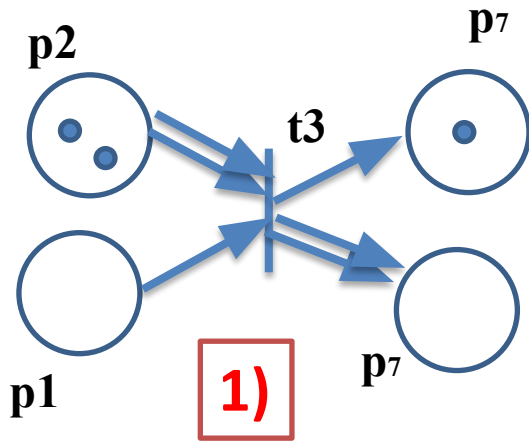
Переход t_3 с $I(t_3) = \{p_2\}$ и $O(t_3) = \{p_7, p_{13}\}$ разрешен всякий раз, когда в p_2 будет хотя бы одна фишка.



Переход t_2 , в котором $I(t_2) = \{p_{21}, p_{23}\}$ и $O(t_2) = \{p_{23}, p_{25}, p_{25}\}$ запускается удалением одной фишки из p_{21} и одной фишки из p_{23} , при этом одна фишка помещается в p_{23} и две - в p_{25} (так как p_{25} имеет кратность, равную двум).

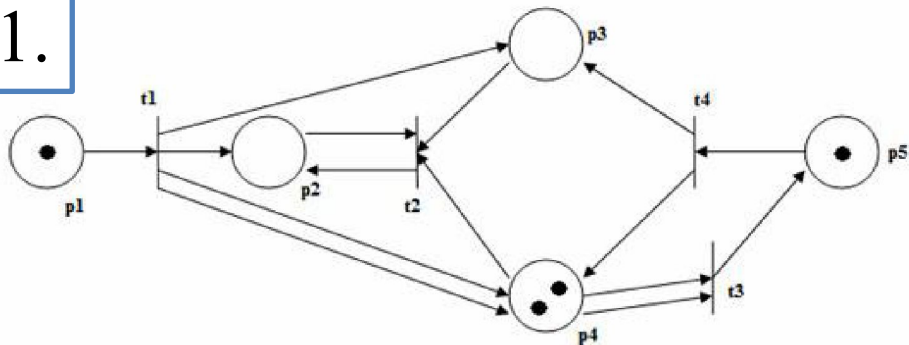


Определить срабатывание переходов

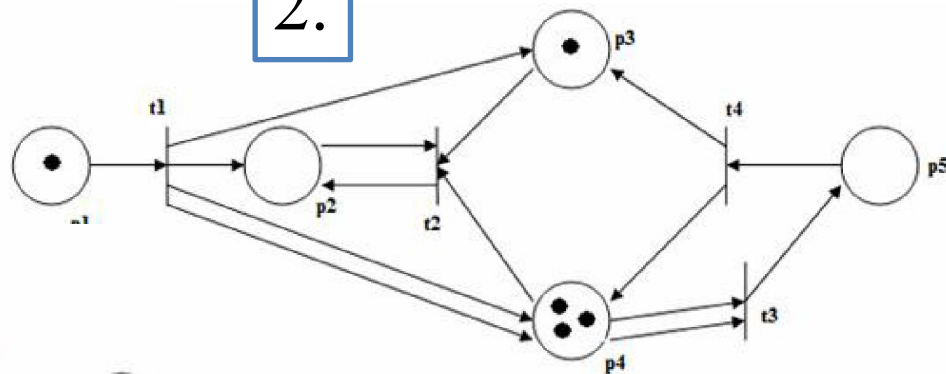


Пример

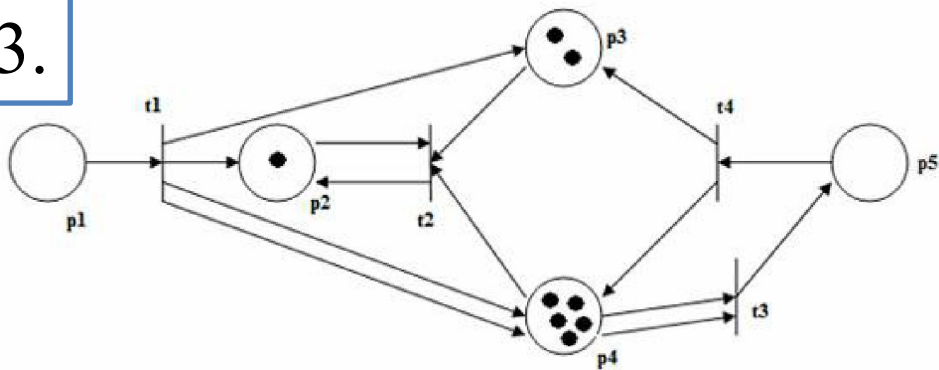
1.



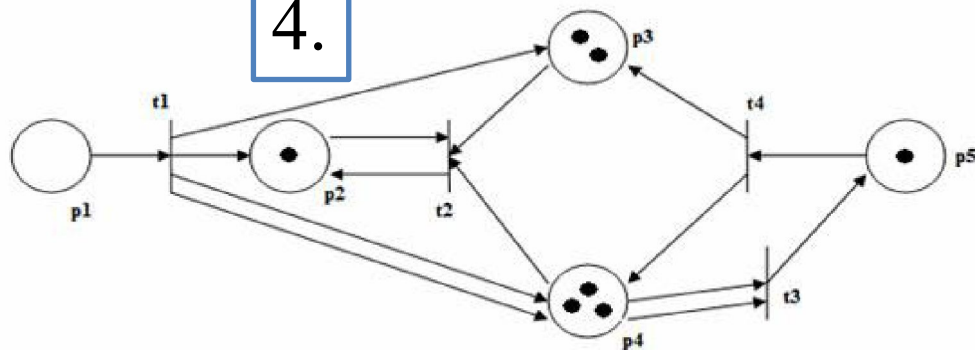
2.



3.



4.



Функция следующего состояния

Функция следующего состояния b : функция, которая при применении к маркировке m и переходу t_j , образует новую маркировку, которая получается при запуске перехода t_j в маркировке m .

Так как t_j может быть запущен только в том случае, когда он разрешен, то функция $b(m, t_j)$ не определена, если t_j не разрешен в маркировке m .

Если же t_j разрешен, то $b(m, t_j) = m'$, где m' есть маркировка, полученная в результате удаления фишек из входов t_j и добавления фишек в выходы t_j .

Описание выполнения сети

Петри

1. Пусть дана сеть Петри $S = (P, T, I, O)$ с начальной маркировкой m_0 .
2. Запуск разрешенного перехода t_j в начальной маркировке образует новую маркировку $m_1 = b(m_0, t_j)$.
3. Запуск следующего перехода t_k образует новую маркировку $m_2 = b(m_1, t_k)$.
4. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока в маркировке будет существовать хотя бы один разрешенный переход.
5. Если же получена маркировка, в которой ни один переход не разрешен, то выполнение сети должно быть закончено.

Результат:

две последовательности:

- 1) последовательность маркировок (m_0, m_1, m_2, \dots) ;
- 2) последовательность переходов, которые были запущены $(t_{j_0}, t_{j_1}, t_{j_2}, \dots)$.

Эти две последовательности связаны следующим соотношением:

$$b(m_k, t_{j_k}) = m_{k+1} \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots$$

Множество достижимости $R(C, m)$

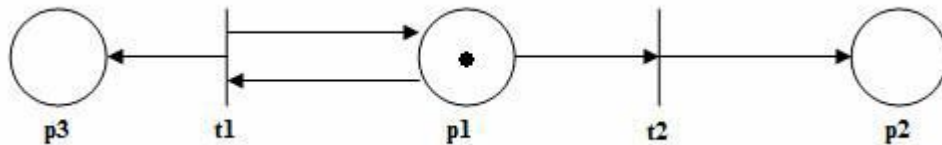
Определение.

Для сети Петри $C = (P, T, I, O)$ с маркировкой m маркировка m' называется **непосредственно достижимой из m** , если существует переход t_j , принадлежащий T , такой, что $b(m, t_j) = m'$.

Определение.

Множество достижимости $R(C, m)$ для сети Петри $C = (P, T, I, O)$ с маркировкой m есть наименьшее множество маркировок, определенных следующим образом:

1. m принадлежит $R(C, m)$;
2. Если m' принадлежит $R(C, m)$ и m'' принадлежит $b(m', t_j)$ для некоторого t_j , принадлежащего T , то m'' принадлежит $R(C, m)$



$$m = (1, 0, 0)$$

Непосредственно достижимые:

$$(0, 1, 0)$$
$$(1, 0, 1)$$

Множество достижимости $R(C, m)$:

$$(0, 1, 0)$$
$$(1, 0, 1)$$
$$(0, 1, 1)$$
$$(1, 0, 2)$$

Пример

1

begin

Writeln('Введите y1');

Readln(y1);

Writeln('Введите y2');

Readln(y2);

y3:=1;

while y1>0 **do**

begin

if odd (y1) **then**

begin

 y3:=y3*y2;

 y1:=y1-1;

end;

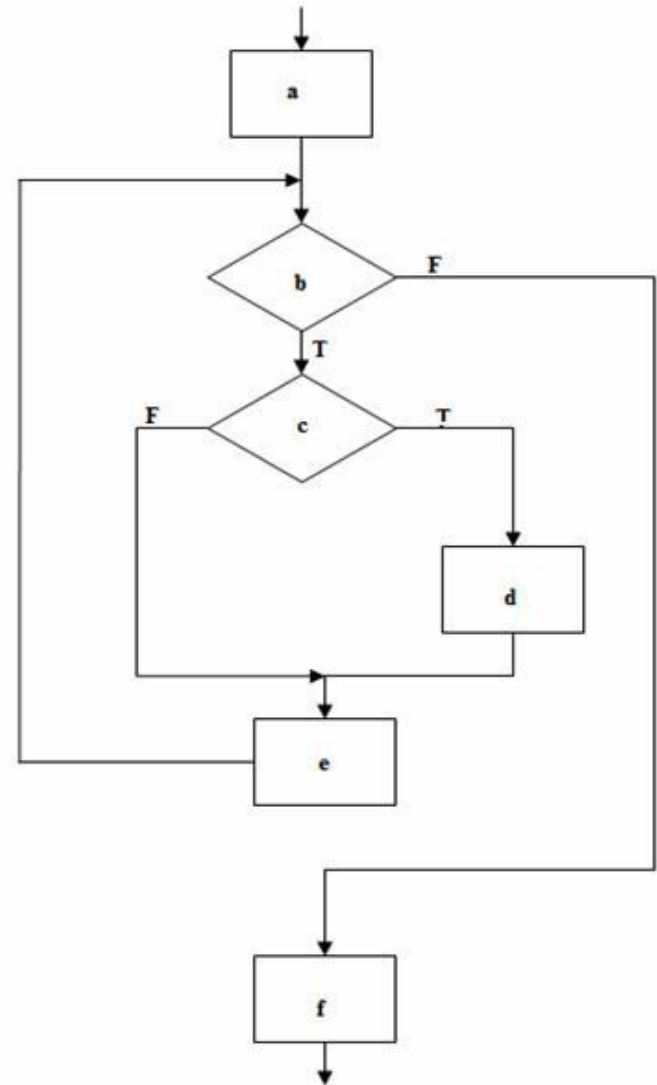
 y2:=y2*y2;

 y1:=y1/2;

end;

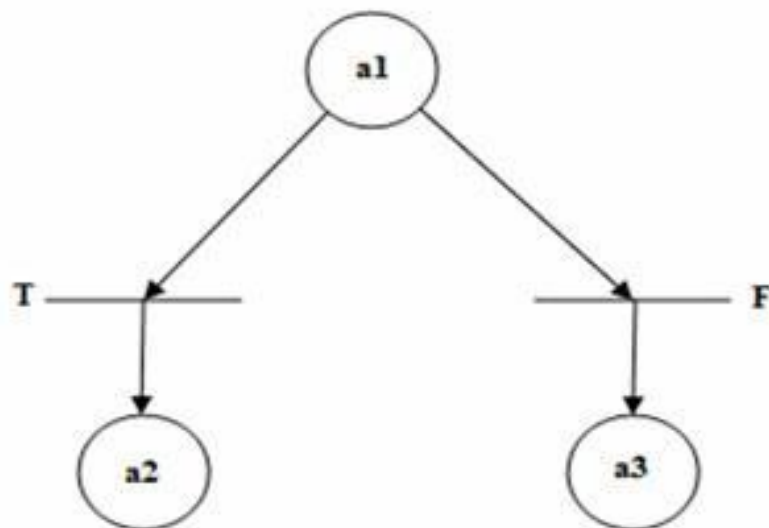
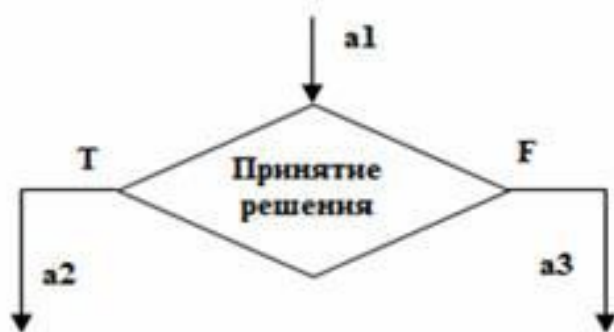
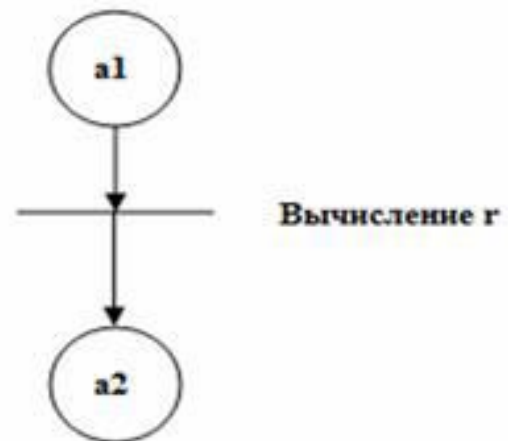
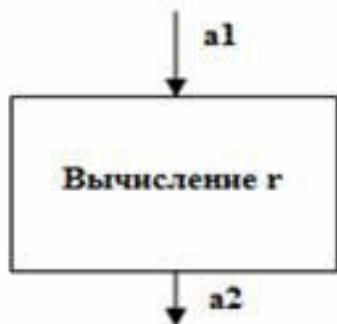
 writeln('y=',y3);

end.



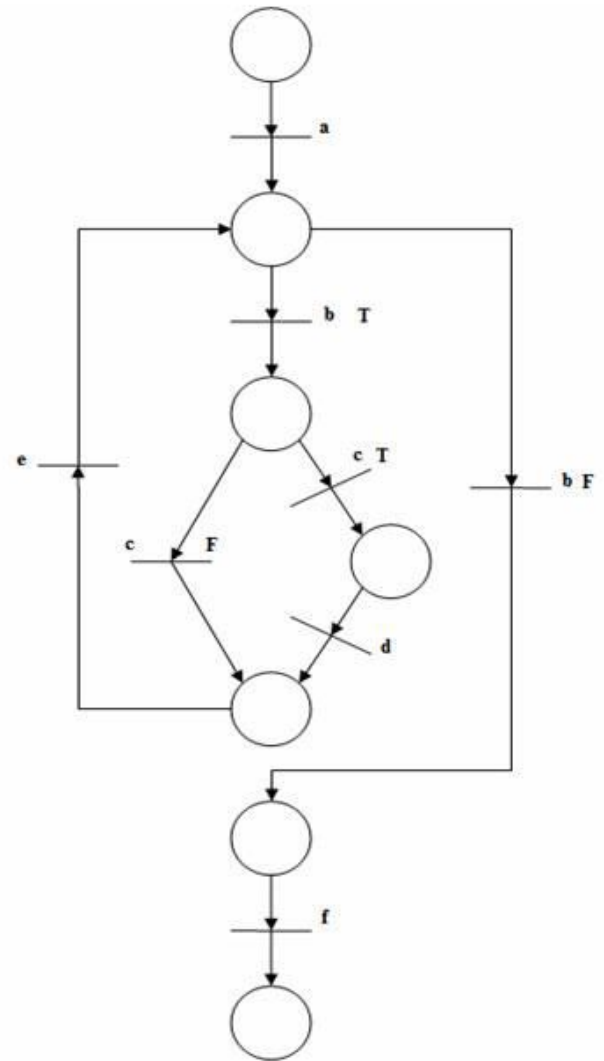
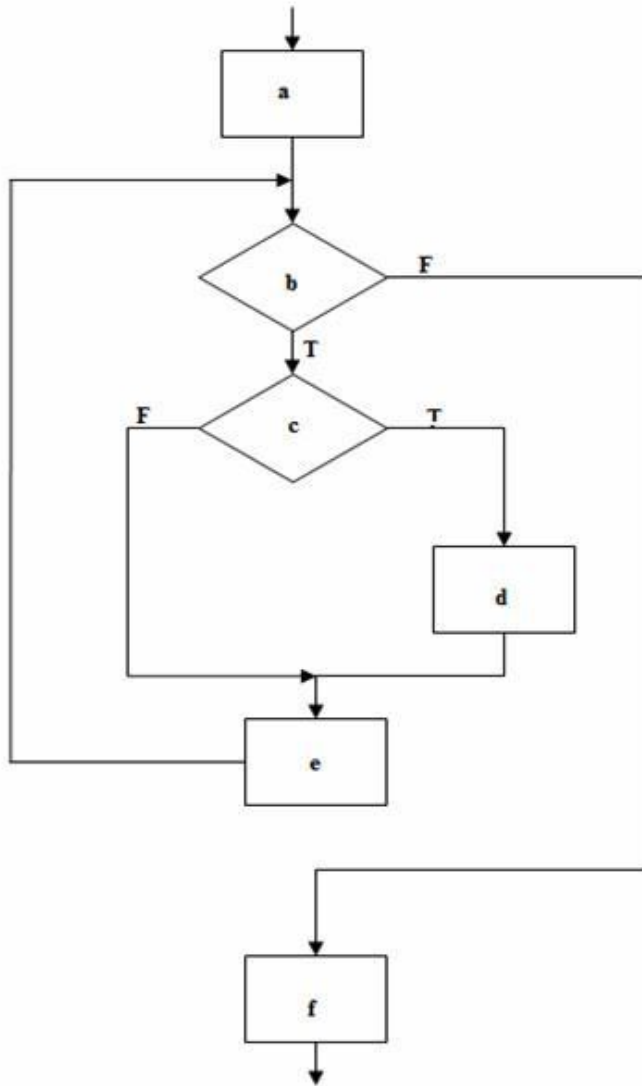
Пример

1



Пример

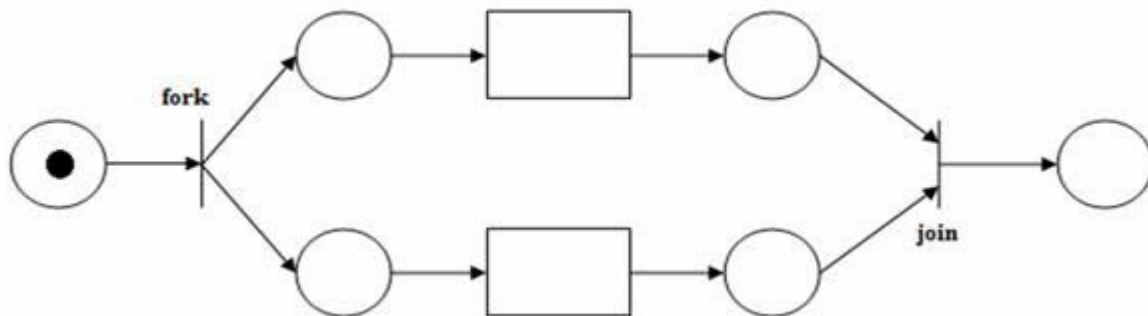
1



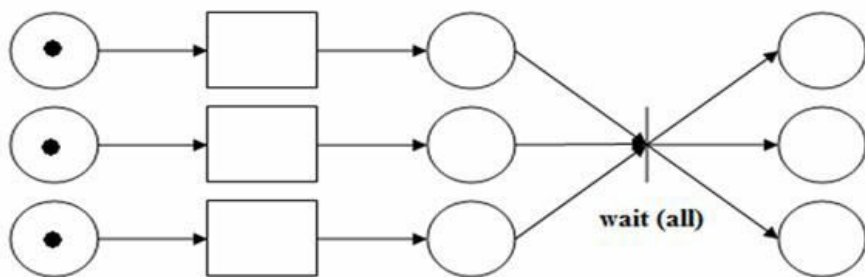
Пример

2

a)



b)



c)

