

Методы решения  
неравенств  
рассматриваемые в  
Алгебре 9 класса.



Для решения линейных и квадратных неравенств в 9 классе рассматриваются следующие приемы решения данных неравенств, данные приемы вводятся в виде правил для учащихся:



1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).



Например. Решить неравенство

$$3x + 5 < x^2$$



- Неравенство  $3x + 5 < x^2$  равносильно
- неравенству  $-x^2 + 3x + 5 < 0$
- член  $x^2$  перенесли из правой части неравенства в левую с противоположным знаком.



2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже положительное число, не меняя при этом знака неравенства.



Например. Решить неравенство

$$8x - 4 > 12x^2$$



- Неравенство  $8x - 4 > 12x^2$  равносильно
- Неравенству  $-12x^2 + 8x - 4 > 0$
- обе части первого неравенства  
разделили на положительное число 4





3. Обе части неравенства можно умножить и разделить на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный ( $<$  на  $>$ ,  $\leq$  на  $\geq$  ).



Например. Решить неравенство

$$-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$$



• Неравенство  $-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$  равносильно

• Неравенству

$$2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

• обе части первого неравенства  
умножили на отрицательное число  $-1$ ,  
изменив при этом знак неравенства  
на противоположный



Рассмотренные правила 2 и 3  
допускают обобщения  
(соответствующие утверждения  
представляют собой теоремы)

Теорема 1. Если обе части неравенства с переменной  $x$  умножить или разделить на одно и то же выражение  $p(x)$ , отрицательное при всех значениях  $x$ , и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство равносильное данному.



# Например. Решить неравенство

$$\frac{5x-7}{-3x^2-8} < 0$$

неравенство  $\frac{5x-7}{-3x^2-8} < 0$  равносильно

неравенству  $5x-7 > 0$

(обе части исходного

неравенства умножили на выражение

$(-3x-8)$ ,

отрицательное при любых значениях  $x$ ;

при этом знак исходного неравенства

изменили на противоположный).



Теорема 2. Если обе части неравенства с переменной  $x$  умножить или разделить на одно и то же выражение  $p(x)$ , положительное при всех значениях  $x$ , и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.



Например. Решить неравенство

$$(x^2 + 1)(x + 7) > 0$$

неравенство  $(x^2 + 1)(x + 7) > 0$  равносильно  
неравенству  $x + 7 > 0$

(обе части исходного  
неравенства разделили на  
выражение , положительное при  
любых значениях  $x$ ; при этом знак  
исходного неравенства оставили  
без изменения).



# Рациональные неравенства.

При решении рациональных неравенств используются те приемы, которые были рассмотрены выше.

С помощью этих приемов преобразуют заданное рациональное неравенство к виду  $f(x) > 0$ , где  $f(x)$  – алгебраическая функция.

Затем числитель и знаменатель дроби  $f(x)$  разлагают на множители вида  $(ax-b)$  и применяется **метод интервалов**.





# Метод интервалов

Сущность метода интервалов заключается в следующем:

- ввести функцию;
- найти область определения;
- найти нули функции;
- выделить промежутки знакопостоянства;
- определить знак на каждом из промежутков;
- выбирается необходимый промежуток;
- записывается ответ.



Например. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} > 0$$



1. Ввели функцию

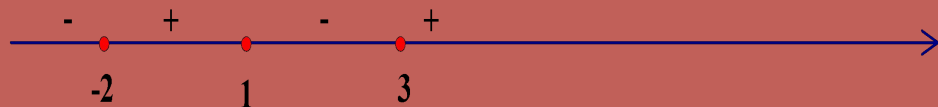
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-3}$$

2.  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

3. Нули функции:

$$x=1; x=-2$$

4-5.



$$6. f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$$

7. Ответ:  $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$

# Система неравенств

**Задача.** Задумано натуральное число. Известно, что если к квадрату задуманного числа прибавить 13, то сумма будет больше произведения задуманного числа и числа 14. Если же к квадрату задуманного числа прибавить 45, то сумма будет меньше произведения задуманного числа и числа 18. Какое число задумано?



- Решение.
- *Первый этап. Составление математической модели.*

Пусть  $x$  – задуманное число. По первому условию сумма чисел  $a$  и  $b$  больше  $14x$ ; это значит, что должно выполняться неравенство  $a + b > 14x$ . По второму условию сумма чисел  $a$  и  $b$  меньше числа  $18x$ ; это значит, что должно выполняться неравенство  $a + b < 18x$ . Так как указанные неравенства должны выполняться одновременно, следовательно, нужно решить систему уравнений из этих неравенств



$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x \\ x^2 + 45 < 18x \end{cases}$$



## Второй этап. Работа с составленной моделью.

Преобразуем первое неравенство к виду:  $x^2 - 14x + 13 > 0$

Найдем корни трехчлена

$$x^2 - 14x + 13 : x_1 = 1, x_2 = 13$$

С помощью параболы  $y = x^2 - 14x + 13$  делаем вывод, что интересующее нас неравенство выполняется при

$$x < 1 \quad \text{или} \quad x > 13$$



Преобразуем, второе неравенство системы и приведем к виду  $x^2 - 18x + 45 < 0$

Найдем корни трехчлена  $x^2 - 18x + 45 : x_1 = 3, x_2 = 15$

С помощью параболы  $y = x^2 - 18x + 45$  делаем вывод, что интересующее нас неравенство выполняется если  $3 < x < 15$   
Пересечением найденных решений служит интервал  $(3, 15)$ .





## Третий этап. Ответ на вопрос задачи.

- Нас интересует натуральное число, принадлежащее интервалу  $(13, 15)$ . Таким числом является число 14.
- Ответ: задумано число 14.



# Метод парабол

- неравенство преобразуется к виду

$$ax^2 + bx + c > 0 (<, \leq, \geq)$$

- находятся корни квадратного трехчлена  $x_1, x_2$ ;
- парабола, служащая графиком функции пересекает ось  $x$  в точках  $x_1, x_2$ , а ветви направлены вниз, если  $a < 0$  вверх, если  $a > 0$
- делаем вывод:  $y > 0$ , следовательно, график расположен выше оси  $x$  (если  $y < 0$ , то график расположен ниже оси).



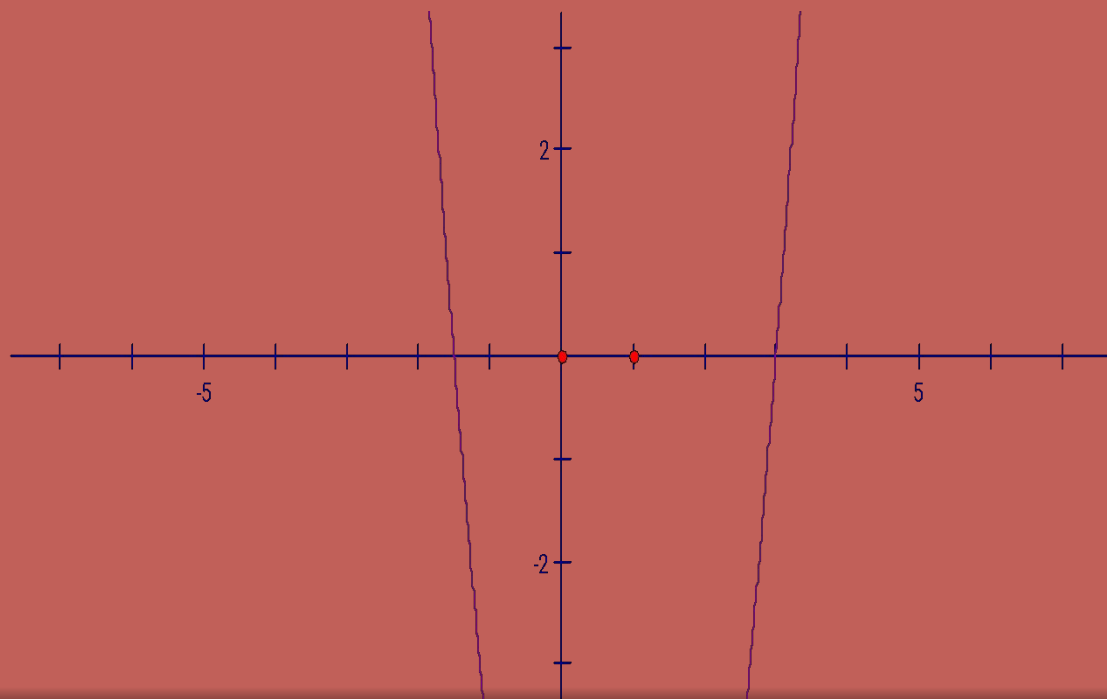
Например. Решить неравенство

$$3x + 9 < 2x^2$$

1.  $-2x^2 + 3x + 9 < 0$

2.  $-2x^2 + 3x + 9 = 0 : x_1 = 3, x_2 = 1,5.$

3.



4.  $y < 0$ , при  $x \in (-\infty; 1,5) \cup (3; +\infty)$

Ответ:  $(-\infty; 1,5) \cup (3; +\infty)$



# Системы уравнений

- Метод подстановки
- Суть данного метода заключается в следующем:
  - выражается  $y$  через  $x$  из одного уравнения системы;
  - подставляется полученное выражение вместо  $y$  в другое уравнение системы;
  - решается полученное уравнение относительно  $x$ ;
  - подставляется поочередно каждый найденный член на третьем шаге корней уравнения вместо  $x$  в выражение  $y$  через  $x$ , полученное на первом шаге;
  - записывается ответ в виде пар значений  $(x; y)$ , которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.



# Система уравнений

- Метод алгебраического сложения.
- Суть метода решения данного уравнения учащиеся рассматривается в 7 классе, где данный метод применялся для решения системы линейных уравнений.



# Система уравнений

- Метод введения новых переменных
  - С данным методом учащиеся сталкивались в 8 классе при решении рациональных уравнений.
- Суть данного метода при решении системы уравнений та же самая, но с технической точки зрения имеются некоторые особенности. Метод введения новых переменных при решении системы двух уравнений применяется в двух вариантах.
- Первый вариант: вводится одна переменная и используется только в одном уравнении системы.
- Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются в одновременно в обоих уравнениях системы.

