Преобразование выражений, содержащих радикалы

Повторим:

Корнем n-ой степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a ($n = 3, 5, 7, \dots$) называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

$$\sqrt[n]{a} = b, b^n = a$$

a – подкоренное число, n – показатель корня

Свойства $\sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, n – натуральное число:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$\sqrt{x^2} = x, x \in R$

$x = -5 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} = 5$

$5 = -5$

$\sqrt{x^2} = \pm x, x \in R$

$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} = 5$

$5 = \pm 5$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = x, x > 0 \\ \sqrt{x^2} = 0, x = 0 \\ \sqrt{x^2} = -x, x < 0 \end{cases}$$

$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

$\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$

VIDEOUROKI.NET

Пример:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Вынести множитель из-под знака корня: **а)** $\sqrt{\mathbf{245}}$; б) $\sqrt[4]{\mathbf{160}}$

Решение:

$$245 = \sqrt{\mathbf{5\cdot 7^2}} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{7^2} = 7\sqrt{5}$$

$$160 = \sqrt[4]{\mathbf{10\cdot 2^4}} = \sqrt[4]{10}\cdot\sqrt[4]{2^4} = 2\sqrt[4]{10}$$

Пример:

Вынести множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения $\sqrt[3]{\boldsymbol{24x^3}}$.

Решение:

$$24 \qquad = \sqrt[3]{3 \cdot \boldsymbol{8} \cdot \boldsymbol{x^3}} = 2x\sqrt[3]{3}$$

Пример:

Выполнить действия $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)$.

Решение:

$x \geq 0, \qquad y \geq 0$

$x = (\sqrt{x})^2, \qquad y = (\sqrt{y})^2$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,(x-\sqrt{xy}+y) = \qquad \left((\sqrt{x})^2-\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2\right) = (\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3 =$$

$$= \sqrt{x^3}+\sqrt{y^3} = x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$$

Ответ: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$.

Пример:

Выполнить действия $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{4y}) : (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$.

Решение:

$x \geq 0, \qquad y \geq 0$

$x = (\sqrt{\boldsymbol{x}})^2, \qquad y = (\sqrt{y})^2$

$= \qquad = (\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$

$= \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$

Пример:

Сократить дробь, считая, что переменные принимают неотрицательные значения $\frac{\sqrt{10b}-\sqrt{15}}{\sqrt{15b}-\sqrt{5}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{10b}-\sqrt{15}}{\sqrt{15b}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5\cdot 2b}-\sqrt{5\cdot 3}}{\sqrt{5\cdot 3b}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{2b}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}\left(\sqrt{3b}-1\right)}=\frac{\sqrt{2b}-\sqrt{3}}{\sqrt{3b}-1}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2b}-\sqrt{3}}{\sqrt{3b}-1}$.

Пример:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Преобразовать заданное выражение $\boldsymbol{\sqrt[5]{4\sqrt[3]{k^2 l^5}}}$ к виду $\sqrt[n]{A}$.

Решение:

$$4 \qquad = \sqrt[5]{\sqrt[3]{64k^2l^2}} = \sqrt[5\cdot 3]{64k^2l^5} = \sqrt[15]{64k^2l^5}$$

$$A = 64k^2l^5$$

Ответ: $\sqrt[15]{64k^2l^5}$.

Пример:

Разложить на множители $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}$.

Решение:

$$= a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{a} - a\sqrt[3]{b} - b\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a}(a+b) - \sqrt[3]{b}(a+b) =$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)(a-b)$$

Пример:

Сократить дробь $\frac{6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение:

$$=\frac{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)+\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}=3-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Пример:

Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{a}}{(a+b)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a}}}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

Решение:

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{(a+b)\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^2}}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

$$=\frac{a(a-b)-\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab-a^2-b^2}{a^2-b^2}=\frac{-b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{b}{b-a}$$

Пример:

Решить уравнение $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

Решение:

$\sqrt[3]{x^2}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$ $\quad \sqrt[3]{x}+1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\neq -1 \Leftrightarrow x\neq -1$

$\sqrt[3]{x}=y \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=y^2, x=y^3$

$\frac{y^3\cdot y-1}{y^2-1}-\frac{y^2-1}{y+1}=4$

$\frac{y^4-1}{y^2-1}-\frac{y^2-1}{y+1}=4$

$\frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2-1}-\frac{(y-1)(y+1)}{y+1}=4$

$\sqrt[3]{x}=-1 \Leftrightarrow x=-1$ – не подходит

$\sqrt[3]{x}=2 \Leftrightarrow x=8$

Ответ: $x=8.$