

Дзбоева ТБ, учитель математики
МБОУСОШ №2.
Решение заданий С3
нестандартными методами.



Метод Голубева

Решение неравенств

- При подготовке к ЕГЭ, сталкиваешься с задачами, которые привычными методами решить сложно или громоздко. Приходится искать методы, которые позволяют решать задачи более просто. Одним из таких методов является «метода замены множителей». При решении логарифмических и показательных неравенств воспользуемся следующими правилами.

Основная идея метода замены

множителей состоит в замене любого множителя в числителе или в знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
1б	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
2a	$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
2б	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1, f \neq 1$)	$(f-1)(g-1) \times$ $\times (h-1)(g-f)$
4	$h^f - h^g$ ($h > 0$)	$(h-1)(f-g)$
4a	$h^f - 1$	$(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ ($f > 0; g > 0$)	$(f-g)h$
6	$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
7	$\log_h f \cdot \log_p g$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1)$
8	$\log_h f + \log_h g$	$(fg-1)(h-1)$

Пример 12. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x \neq -1 \\ x > -1,5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

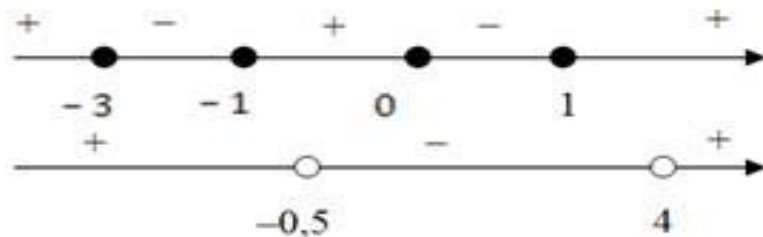
$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0 \text{ и}$$

заменяем его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2| - 1)(4 + 7x - 2x^2 - x^2 - 4x - 4) \leq 0 \\ 4 + 7x - 2x^2 > 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x+2)^2 - 1)(-3x^2 + 3x) \leq 0 \\ (x + 0,5)(x - 4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0 \\ (x + 0,5)(x - 4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$



Ответ: $(-0,5; 0] \cup [1; 4)$.

2. Решите
неравенство

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2.$$

Решение

Одз:

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4 + 7x - 2x^2)}{\log_2|x+2|} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4 + 7x - 2x^2) - \log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2| - \log_2 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4 + 7x - 2x^2) - (x+2)^2}{|x+2| - 1} \leq 0, \\ 4 + 7x - 2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3x^2 + 3x}{(x+2)^2 - 1^2} \leq 0, \\ 2x^2 - 7x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0, \\ -0,5 < x < 4. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} |x+2| > 0, \\ |x+2| \neq 1, \\ 4+7x-2x^2 > 0. \end{array} \right.$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-0,5; 0] \cup [1; 4)$.

1. Решите неравенство $\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$.

Решение.

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5x-2) - (2x-5)}{(2x-5) - 1} \geq 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+3}{2x-6} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: **(3; ∞)**

Перепишем неравенство в виде:

$$\log_{5-x}(x-7)^2 \leq 2\log_{5-x}(x-1)(7-x) - 2$$

Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \\ x \neq 7 \\ (x-1)(7-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \\ x \neq 7 \\ 1 < x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 4 < x < 5 \end{cases}$$

В области определения неравенство равносильно следующему

$$2\log_{5-x}(7-x) \leq 2\log_{5-x}(x-1) + 2\log_{5-x}(7-x) - 2$$

$$\log_{5-x}(7-x) \leq \log_{5-x}(x-1) + \log_{5-x}(7-x) - 1$$

$$\log_{5-x}(x-1) \geq 1$$

$$\log_{5-x}(x-1) \geq \log_{5-x}(5-x)$$

Исходя из метода рационализации, на области определения неравенство равносильно следующему

$$(5-x-1)(x-1-5+x) \geq 0$$

$$(4-x)(2x-6) \geq 0$$

$$(4-x)(x-3) \geq 0$$

$$3 \leq x \leq 4$$

С учетом области определения имеем $3 \leq x < 4$

Ответ: $[3; 4)$

3. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

Решение.

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)}{\log_2(2-x)} \cdot \frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2) - \log_2 1}{\log_2(2-x) - \log_2 1} \cdot \frac{\log_2(3-x) - \log_2 1}{\log_2(x+3) - \log_2 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 > 0, \\ 3-x > 0, \\ 2-x > 0, \\ 2-x \neq 1, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1. \end{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \\ x < 2 \\ x > -3 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0, \\ -2 < x < 2 \end{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-2; -1] \cup (1; 2)$.

4. Решите
неравенство

$$\log_{12x^2 - 41x + 35} (3 - x) \geq \log_{2x^2 - 5x + 3} (3 - x).$$

Решени

е.

$$\log_{12x^2 - 41x + 35} (3 - x) \geq \log_{2x^2 - 5x + 3} (3 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3 - x)}{\log_2(12x^2 - 41x + 35)} - \frac{\log_2(3 - x)}{\log_2(2x^2 - 5x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3 - x) \cdot (\log_2(2x^2 - 5x + 3) - \log_2(12x^2 - 41x + 35))}{\log_2(12x^2 - 41x + 35) \cdot \log_2(2x^2 - 5x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2(3-x) - \log_2 1) \cdot (\log_2(2x^2 - 5x + 3) - \log_2(12x^2 - 41x + 35))}{(\log_2(12x^2 - 41x + 35) - \log_2 1) \cdot (\log_2(2x^2 - 5x + 3) - \log_2 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2-x)(-10x^2 + 36x - 32)}{(12x^2 - 41x + 34)(2x^2 - 5x + 2)} \geq 0, \\ 3 - x > 0, \\ 12x^2 - 41x + 35 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^2 \left(x - \frac{8}{5}\right)}{\left(x - \frac{17}{12}\right) (x-2)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ x < 3, \\ \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x - \frac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1) \left(x - \frac{3}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы – объединение промежутков

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; 2\right) \cup (2; \infty).$$

Пересечением решений трех оставшихся неравенств является множество

$$(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 3\right).$$

Следовательно, решение всей системы:

$$\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3).$$

Ответ

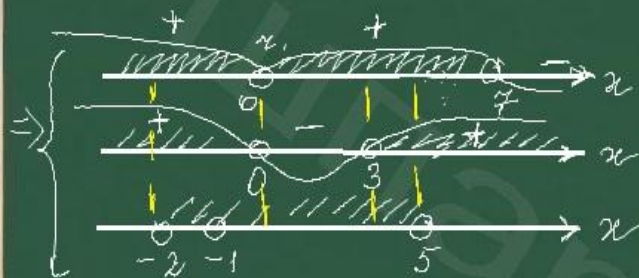
:

$$\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3).$$

C3

Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geq \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5-x}$$



$$\text{O.D.B.} \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 \neq 1 \\ 7x^2 - x^3 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x \neq -1 \\ x^2(7-x) > 0 \\ x(x-3) > 0 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; 5)$$

$$2) \log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geq \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+2}(7x^2 - x^3) - \log_{x+2}(x^2 - 3x) \geq \log_{x+2}(5-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+2}(7x^2 - x^3) \geq \log_{x+2}(5-x)(x^2 - 3x) \xrightarrow{\text{O.D.B.}}$$

$$\xrightarrow{\text{O.D.B.}} (x+2-1)(7x^2 - x^3 - (5-x)(x^2 - 3x)) \geq 0 \xrightarrow{\text{O.D.B.}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-x^2 + 15x) \geq 0 \xrightarrow{\text{O.D.B.}} x(x+1)(-x+15) \geq 0$$