ДВОИЧНЫЙ ПОИСК В УПОРЯДОЧЕННОМ МАССИВЕ

Пусть **дан** массив **A = (a_1, a_2, … , a_n)**,
упорядоченный по возрастанию, т.е. **$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$** .

Найти: 1) Элемент с ключом X;
2) Все элементы с ключом X.

Если массив **не упорядочен**, то единственный способ поиска – **перебор**, трудоемкость **O(n)**.

В случае **быстрого двоичного поиска** трудоемкость **O($\log_2 n$)**.

***Идея двоичного поиска**:* Возьмем средний элемент упорядоченного массива и сравним с ключом поиска «X». Возможны варианты:

1) $a_m = X$ элемент найден

2) $a_m < X$ продолжаем поиск в **правой** половине массива

3) $a_m > X$ продолжаем поиск в **левой** половине массива

Каким образом?

Алгоритм на псевдокоде (первая версия)

Обозначим

L, **R** – правая и левая границы рабочей части массива,

Найден – логическая переменная, в которой будем отмечать факт успешного завершения поиска.

```
L: = 1,  R: = n,  Найден: = нет
   DO ( L ≤ R )
      m: = ⌊(L+R)/2⌋
            IF (a_m=X)  Найден: =да  OD  FI
      IF (a_m < X)   L: = m+1
            ELSE  R: = m-1
      FI
   OD
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

а б б б в г д е ж з и к **X=б**

L=1, R=12

1 2 3 4 5

а б ~~б~~ б в

L=1, R=5

Недостатки первой версии алгоритма:

1) на каждой итерации цикла **два сравнения**,

2) находит **первый попавшийся** элемент из нескольких с заданным ключом.

Рассмотрим вторую версию алгоритма,
в которой
уменьшим количество сравнений
путем исключения из алгоритма
проверки на равенство.

Алгоритм на псевдокоде (вторая версия)

```
L: = 1, R: = n
   DO ( L<R )
        m: =  ⌊(L+R)/2⌋
        IF (a_m < X)   L: = m+1
             ELSE  R: = m
        FI
   OD
IF   (a_R=X)   Найден: = да
   ELSE  Найден: = нет
FI
```

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

а б б б в г д е ж з и к

X=б

L=1, R=12

1 2 3 4 5 6

а б б б в г

L=1, R=6

1 2 3

а б б

L=1, R=3

1 2

а б

L=1, R=2

2

б

L=2, R=2

Преимущества второй версии алгоритма:

1) на каждой итерации цикла **одно сравнение**,

Трудоемкость двоичного поиска

Сначала определим
максимальное количество итераций (k).

Рассмотрим **худший случай**, когда

1) часть массива a_L , … , a_R содержит **нечетное** количество элементов

2) в начале каждой итерации
слева элементов на один больше

3) на каждом шаге выбирается **левая часть** массива.

Трудоемкость двоичного поиска

Номер итерации	Наибольшее количество элементов
0	n - нечетное
1	$\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$
2	$\frac{n+1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{n+3}{4}$
3	$\frac{n+3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{n+7}{8}$
…	…
k-1	$\frac{n+2^{k-1}-1}{2^{k-1}}=2$

$$\frac{n+2^{k-1}}{2^{k-1}} > 2$$

$$\frac{n}{2^{k-1}} + 1 > 2$$

$$2^{k-1} < n$$

$$k-1 < \log_2 n$$

$$k < \log_2 n+1$$

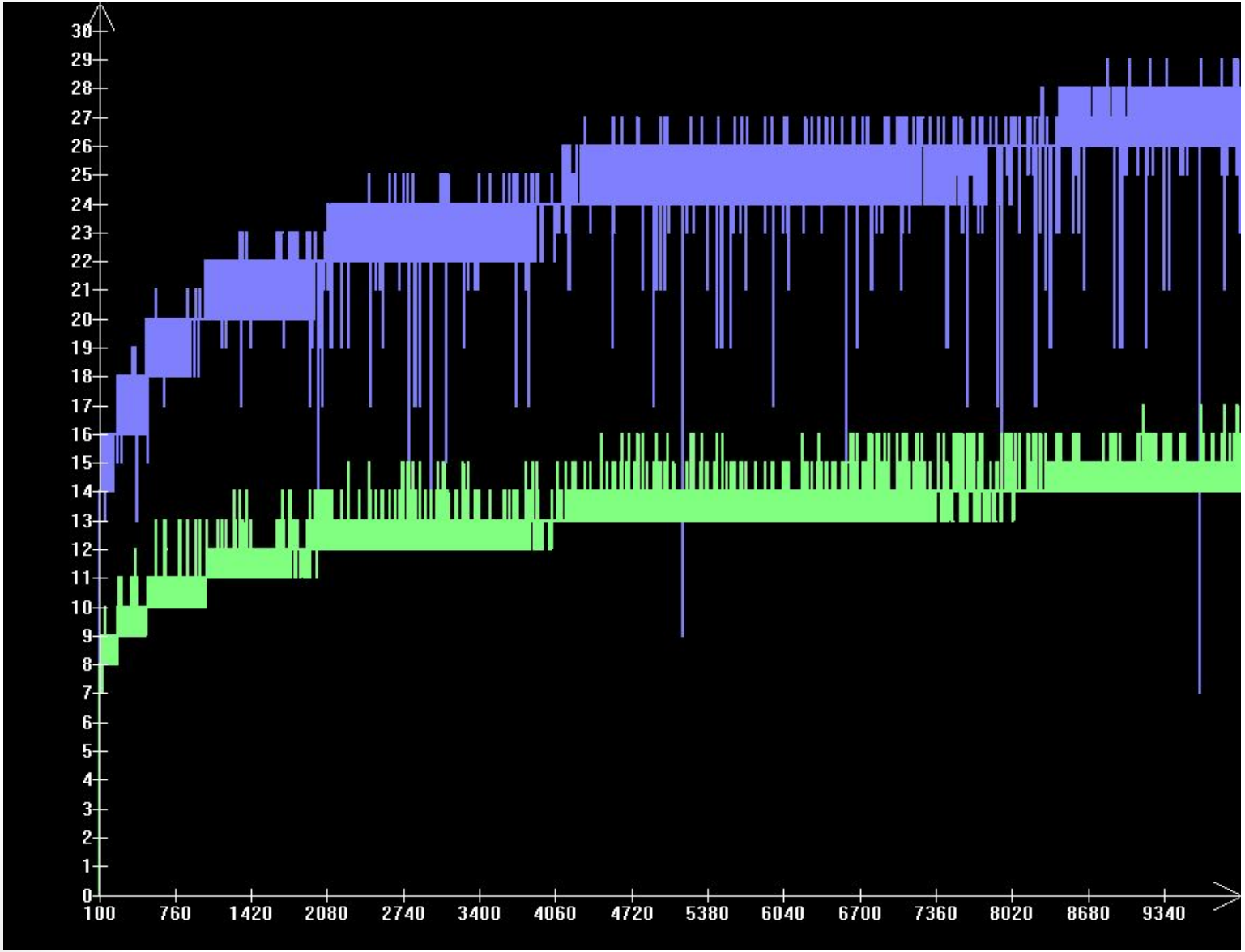
$k \leq \lceil \log_2 n \rceil$ - количество итераций

$$C \leq \lceil \log_2 n \rceil+1$$

Трудоемкость двоичного поиска:

$$T = \mathbf{O}(\boldsymbol{log_2\, n})$$

Графики трудоемкости двоичного поиска



Сортировка данных со сложной структурой

Дан массив абонентов

A:

Иванов	Петров	Абрамов
223322	345767	667891

```
Struct   abonent   {  char name[10];
                        long phone;
                 }  A[n];
```

Чтобы отсортировать такой массив структур, нужно **определить отношение порядка** его элементов (> < =).

Сортировка данных со сложной структурой

Пример. Struct **abonent** { char name[10];
long phone;
} A[n];

Попытка сортировки:

DO (i = 1, 2, …, n-1)
DO (j = n, n-1, …, i+1)
IF ($A_j < A_{j-1}$) $A_j \leftrightarrow A_{j-1}$ FI
OD
OD

Эта запись **не будет верной**, т.к. компилятор не знает как сравнивать **элементы типа структура**, т.к. они **не являются встроенными элементами** языка.

Чтобы реализовать **операцию сравнения для структур**, необходимо вспомнить, что любая ***операция отношения*** есть **булева функция двух аргументов**.

X<Y

$$\textbf{\textit{меньше (X, Y)}} = \begin{cases} \text{истина}, & X < Y \\ \text{ложь}, & X \geq Y \end{cases}$$

Логическая функция Less (меньше)
может выглядеть следующим образом:

```
Int  less ( struct abonent  X, struct abonent Y)
        { … ? … }
```

Логическая функция Less (меньше)

При сортировке по **имени** абонента:

```
int less ( struct abonent  X, struct abonent Y)
   {  if ( X.name<Y.name) return 1;
            else  return 0;
   }
```

При сортировке по **номеру телефона** абонента:

```
int less ( struct abonent  X, struct abonent  Y)
   {  if ( X.phone<Y.phone) return 1;
            else  return 0;
   }
```

Наполовину пуст?
Наполовину полон?

Программист считает, что стакан в два раза больше, чем нужно

При сортировке ***по сложному ключу*** *так же* ***легко определить функцию*** **less.**

Для сортировки по фамилии абонента и (дополнительно) по номеру телефона:

```
int less ( struct abonent X,  struct abonent Y)
{   if ( X.name < Y.name)   return  1;
    else if ( X.name > Y.name)   return  0;
          else if ( X.phone < Y.phone)   return  1;
                else   return  0;
                 }
```

Тогда ***в алгоритмах сортировок*** вместо ***оператора сравнения*** используем ***вызов функции*** **less.**

Например, в пузырьковой сортировке:

DO (i = 1, 2, …, n-1)

DO (j = n, n-1, …, i+1)

IF (**less (A_j , A_{j-1})**) $A_j \leftrightarrow A_{j-1}$ FI

OD

OD

Вывод:

Если структура сортируемых данн

не соответствует

простым (встроенным) типам языка, то

операции отношения необходимо переопределить

с помощью соответствующих булевых функций.

Аналогичное переопределение операций сравнений требуется и для **организации поиска**!

Преимущества:

1) **Операции отношения** могут быть определены *различными способами* в зависимости от **ключа** сортировки и **условия упорядочения** данных.

2) **Изменение направления упорядочения** массива легко достигается с помощью **изменения знака** в операции отношения **на противоположный**.

Операции пересылки не требуют переопределения,
т.к. выполняются путем **побайтового**


Настоящий программист всегда
делает резервные копии
RusDemotivator.Ru

Сортировка по множеству ключей

Пусть рассмотренный **телефонный справочник** хранится в виде **базы данных в памяти** компьютера и мы хотим использовать его для **эффективного решения двух задач**:

1) Быстро искать запись по заданной фамилии (справочник должен быть отсортирован по фамилиям абонентов);

2) Быстро искать запись по заданному номеру телефона (справочник должен быть отсортирован по номерам телефонов абонентов);

Для одновременного решения этих задач рассмотрим прием, называемый **индексацией**.

Индексация данных

Рассмотрим суть индексации на массиве целых чисел:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A:	**5**	**7**	**3**	**4**	**2**	**6**	**1**	**8**	**- физические номера**
B:	**7**	**5**	**3**	**4**	**1**	**6**	**2**	**8**	
	1	2	3	4	5	6	7	8	**- логические номера**

Массив **B** - индексный массив (индекс) массива A.

A [B[i]] – обращение к элементу массива A через индекс B.

C: 8 2 6 1 4 3 5 7 **- номера элементов массива A по убыванию**

Массив **C** – индексный массив (индекс) массива A.

A [C[i]] – обращение к элементу массива A через индекс C.

Чтобы упорядочить массив A (по возрастанию),

мы **построили индексный массив B**,

в него **записали номера элементов массива A** (по возрастанию элементов) и

обращаемся к элементам массива A через индекс B.

При доступе к массиву A через индекс

мы **работаем с ним как с упорядоченным**

(например, можем производить ***быстрый двоичный поиск***), в то время как

сами **элементы физически не переставляются**

Пример. Вывод элементов массива (по возрастанию):

```
DO ( i = 1, …, n)
    вывод ( A [ B[i] ] )
OD
```

Пример. Двоичный поиск (вторая версия):

```
L: = 1, R: = n
   DO ( L<R )
       m: = [(L+R)/2]
       IF (A[B[m]] < X)   L: = m+1
           ELSE  R: = m
       FI
   OD
IF  (A[B[R]] = X)  Найден: = да
   ELSE  Найден: = нет
FI
```

Построение индексного массива

Построение индексного массива выполняется на базе любого **алгоритма сортировки**.

*Вначале в массив B **записываются физические номера элементов** массива A.

*Затем производится **любая сортировка** ***при условии***, *что:*

1) В **операциях сравнения** элементы массива A **индексируются через B**;

2) **Перестановки** делаются **только в массиве B**;

Построение индексного массива

Алгоритм на псевдокоде

(на примере пузырьковой сортировки)

B := (1, 2, …, n)

DO (i = 1, 2, …, n-1)

    DO (j = n, n-1, …, i+1)

        IF (**a[b_j] < a[b_{j-1}]**) **$b_j \leftrightarrow b_{j-1}$** FI

    OD

OD

Преимущества индексации

1) Появляется возможность построения **нескольких различных индексов**, которые можно использовать по мере необходимости.

2) **Исключается копирование**
ов данных.

жность
рации данных.

Преимущества индексации

Определение. **Фильтрация** – использование при работе только тех элементов, которые отвечают некоторым условиям.

Совокупность условий называется фильтром.

Пример. Из массива A выбираем только четные элементы по возрастанию.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A:	**5**	**7**	**3**	**4**	**2**	**6**	**1**	**8**

D: 5 4 6 8 - только четные, по возрастанию