Колебательные процессы.

Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

- **Свободные колебания реальных систем всегда затухают. Затухание обусловлено в основном трением** (механические системы) **и сопротивлением (** в электромагнитных колебательных контурах**).**
- **Колебательная система называется линейной, если её свойства не меняются при колебаниях, то есть такие параметры, как сила тяжести, упругость пружины, сопротивление, емкость, индуктивность не зависят ни от смещения, ни от скорости, ни от ускорения колеблющейся величины. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные системы.**

Уравнения затухающих колебаний

Получим **дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний** на примере реального пружинного маятника, совершающего колебания в среде с сопротивлением (простейший случай - трение о воздух). Пусть масса маятника ***m***, коэффициент упругости пружины k, сила сопротивления, действующая на маятник,

$$F = -bv,$$

v - скорость маятника,

b - коэффициент сопротивления среды, в которой находится маятник.

Так как мы рассматриваем только линейные системы, ***b = const, k = const***.

x - смещение маятника от положения равновесия.

Второй закон Ньютона в нашем случае запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx, \quad (1)$$

Это уравнение и есть ***дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний*** пружинного маятника. Его принято записывать в следующем, так называемом **каноническом** виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (2)$$

$\beta=\frac{b}{2m}$, $\boldsymbol{\beta}$ - коэффициент затухания, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$,

$\boldsymbol{\omega_0}$ - собственная частота свободных (незатухающих) колебаний пружинного маятника.

Уравнение затухающих колебаний в таком (каноническом) виде описывает затухающие колебания всех линейных систем; конкретная колебательная система отличается только выражениями для $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\omega_0}$.

Рассмотрим свободные затухающие электрические колебания в цепи.

В отличие от ранее рассмотренного идеального контура наличие сопротивления обеспечивает потери электромагнитной энергии в контуре, что ведет к затуханию колебаний. Закон Ома для контура запишется следующим образом (обозначения те же, что и ранее):

$$U_L + U_C + U_R = 0$$

Сделав в этом уравнении те же подстановки, получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (3)$$

Используя второе правило Кирхгофа. Согласно этому правилу, запишем $\varepsilon_s = u_c$ (ε_s — *э. д. с. самоиндукции,* u_c — *напряжение на конденсаторе). Но* $u_c = q/C$, где q и C *заряд и ёмкость конденсатора, а*

$$\varepsilon_s = -L\frac{di}{dt}.$$

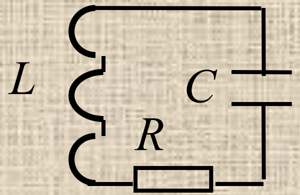


Рис. 2

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Здесь L - индуктивность соленоида, i - сила тока в контуре.

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=0 \quad (4)$$

$$\omega_0^2=1/(LC).$$

С точки зрения математики уравнения (2) и (4) одинаковые. Их можно записать в виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\beta\frac{d\xi}{dt}+\omega_0^2\xi=0, \quad (5)$$

где в случае маятника $\xi = x$

$$\omega_0^2=k/m$$

и для колебательного контура $\xi = q$ и

$$\omega_0^2=1/(LC).$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что данное уравнение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения надо составить характеристическое уравнение и решить его:

$$b^2 + 2\beta b + \omega_0^2 = 0.$$

Его корни $b_{12} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$ где $i = \sqrt{-1},$

мнимая единица. Возможны 2 случая:

СЛУЧАЙ 1: $\omega^2 - \beta^2 < 0$

В этом случае решение имеет вид:

$$\xi = ce^{-\beta t} e^{\pm t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$$

т.е. мы имеем дело с экспоненциальным спадом величины ξ.

СЛУЧАЙ 2. $\omega^2 - \beta^2 > 0$ В этом случае корни уравнения являются

Комплексно сопряженными величинами $b_{12} = -\beta \pm i\omega.$

Где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$

Поэтому решение диф. уравнения (5) можно представить

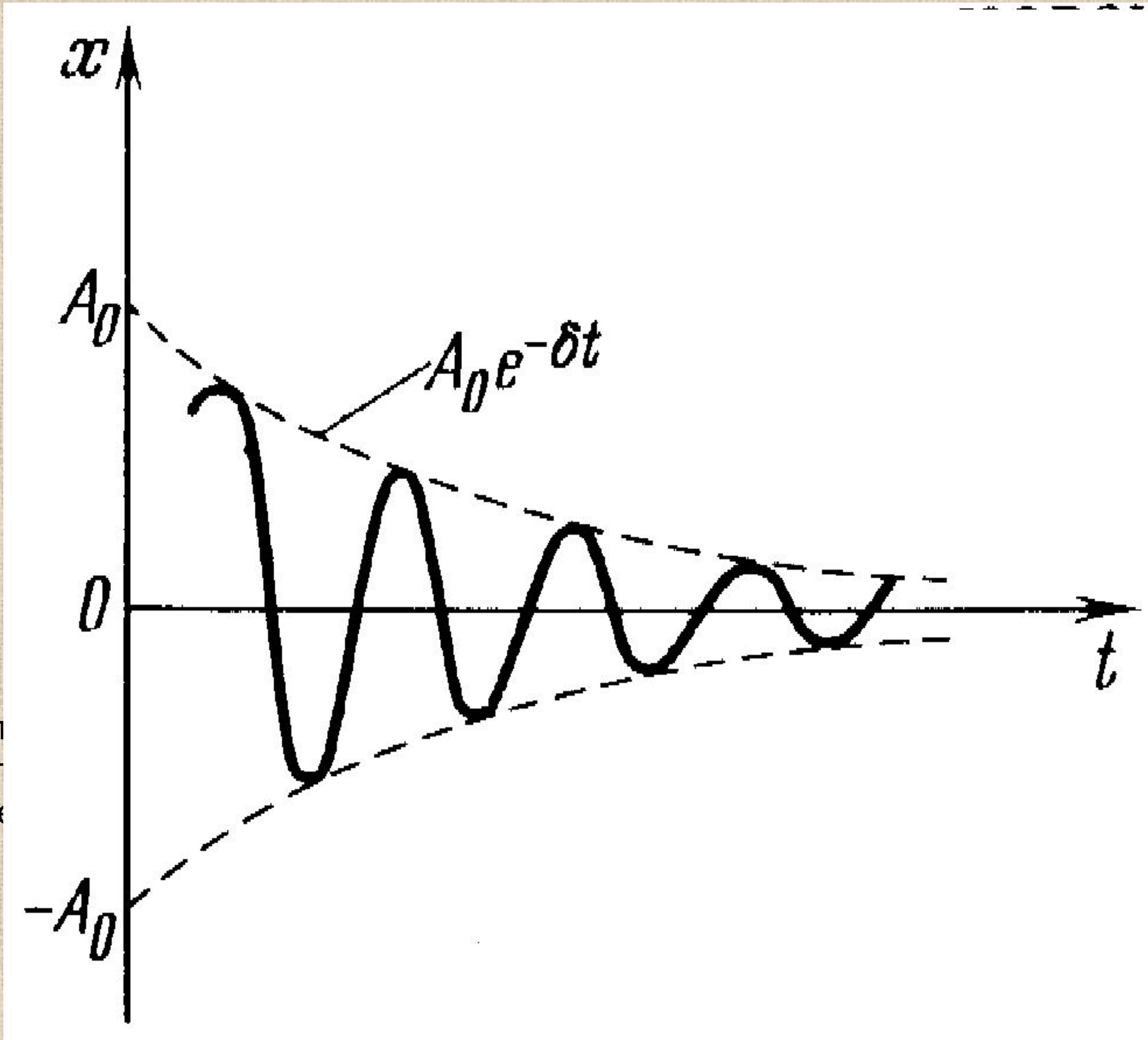
$$\xi = e^{-\beta t}(C_1 Cos\omega t + C_2 Sin\omega t) = A_0 e^{-\beta t} Cos(\omega t + \alpha).$$

Где $C_1 = A_0 Cos\alpha$ и $C_2 = -A_0 Sin\alpha.$

На графике видно что в системах происходят колебания с уменьшающей амплитудой, т.е. затухающие колебания. Величина $A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$

Играет роль амплитуды, которая убывает по экспоненциальному закону (пунктирная линия) . A_0 - начальная амплитуда, β - коэффициент затухания, который определяется коэффициентом силы сопротивления в случае механической системы и сопротивлением R в случае колебательного

Амплит
соответ
собстве



Амплитуда убывает во времени тем быстрее, чем больше величины b и R в соответствующих системах. Частота затухающих колебаний меньше частоты собственных незатухающих колебаний, поскольку согласно

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Для характеристики быстроты затухания вводится так называемый логарифмический декремент затухания, который определяется как отношение амплитуд, отличающихся на один период:

$$\Delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = ln\, e^{\beta T} = \beta T.$$

Зная логарифмический декремент затухания d , массу и период колебаний T можно определить коэффициент сил сопротивления b для механической системы. Поскольку теоретически затухание происходит бесконечно долго (эспонента не пересекается с осью t, вводят время τ в течение которого амплитуда уменьшается е раз, т.е.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = e.$$

Это время в физике носит название время релаксации τ

$\beta = \dfrac{1}{\tau}$. **Коэффициент затухания обратен промежутку времени, в течение которого амплитуда колебаний убывает е раз.**

Очевидно, что за время релаксации совершается $N_e = \dfrac{\tau}{T}$ **колебаний . Логарифмический декремент затухания d связан с** N_e **соотношением** $\Delta = \beta T = \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{1}{N_e}$

Т.е. Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за промежуток времени в течение которого амплитуда убывает в е раз.

Добротностью контура называют величину, равную отношению ***π*** *к логарифмическому декременту затухания (Q – добротность).*

$$Q = \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\omega}{\beta 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

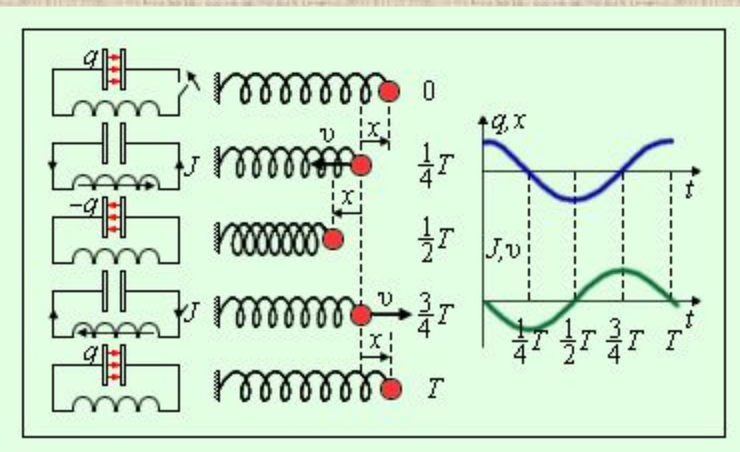
Если $\omega_0^2 \gg \beta^2$ затухание слабое, тогда $T \approx T_0$

$$Q = \frac{\pi\omega}{\beta 2\pi} = \frac{L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротности Q любой колебательной системы, способной совершать свободные колебания, может быть дано энергетическое определение:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потеря энергии за 1 период}}.$$

Сравнение свободных колебаний груза на пружине и процессов в электрическом колебательном контуре позволяет сделать заключение об аналогии между электрическими и механическими величинами.



Электрические величины		Механические величины	
Заряд конденсатора	$q\,(t)$	Координата	$x\,(t)$
Ток в цепи	$J = \frac{dq}{dt}$	Скорость	$\upsilon = \frac{dx}{dt}$
Индуктивность	L	Масса	m
Величина, обратная электроемкости	$\frac{1}{C}$	Жесткость	k
Напряжение на конденсаторе	$U = \frac{q}{C}$	Упругая сила	kx
Энергия электрического поля конденсатора	$\frac{q^2}{2C}$	Потенциальная энергия пружины	$\frac{kx^2}{2}$
Магнитная энергия катушки	$\frac{LI^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{m\upsilon^2}{2}$
Магнитный поток	LI	Импульс	$m\upsilon$