

Основные понятия деформации кручения

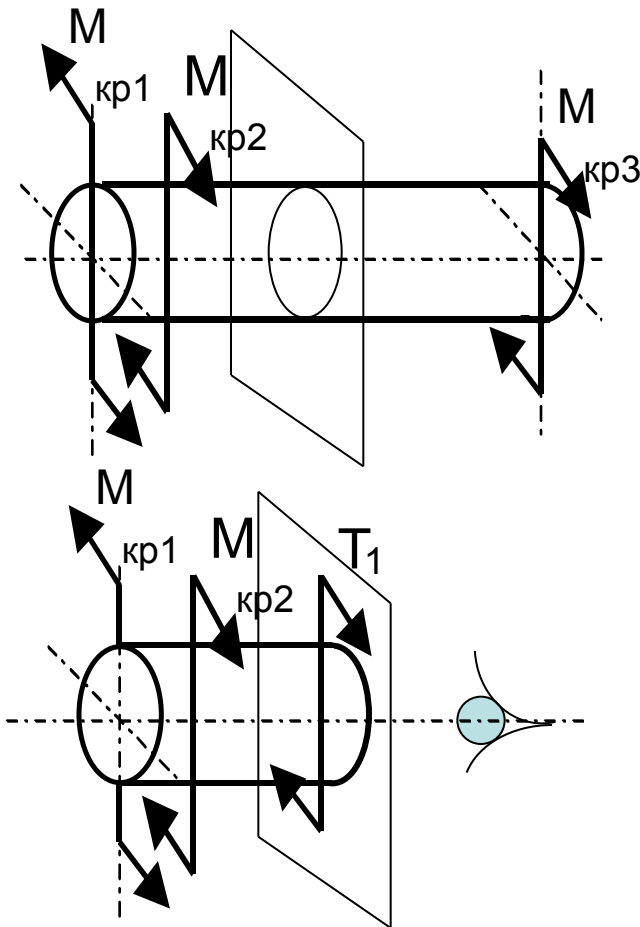
Под **кручением** понимают такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только один силовой фактор - это крутящий момент

Брус в поперечном сечении, которого действует крутящий момент, называется **валом**.

Крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от этого сечения.

$$T_1 = -M_{кр1} + M_{кр2}$$

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец вала со стороны сечения момент направлен по ходу часовой стрелки. Момент T_1 – отрицательный



Закон Гука при кручении

Основные допущения:

1. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации.
2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.
3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

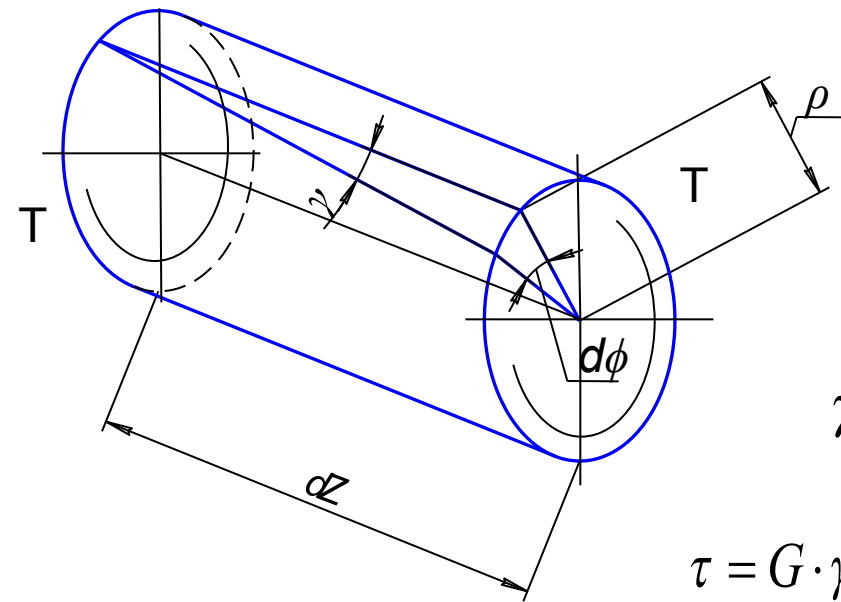
При кручении наблюдается плоское напряженное состояние чистого сдвига и соблюдается закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma,$$

Рассмотрим особенности деформации бруса при кручении

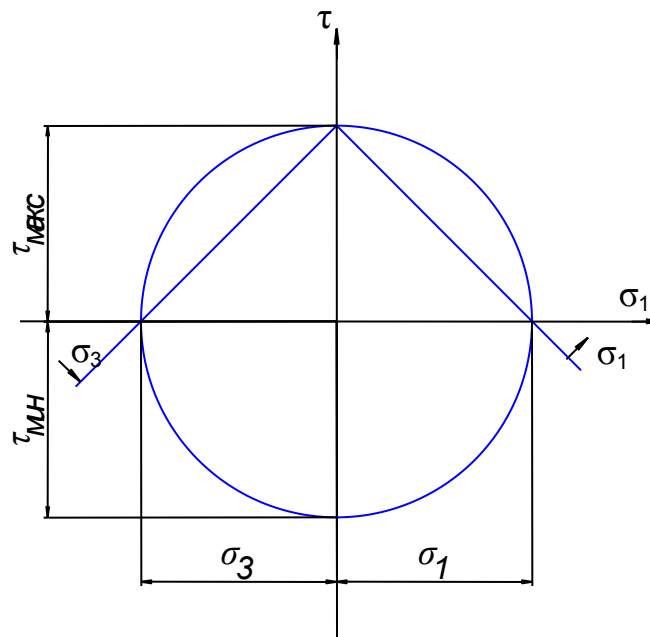
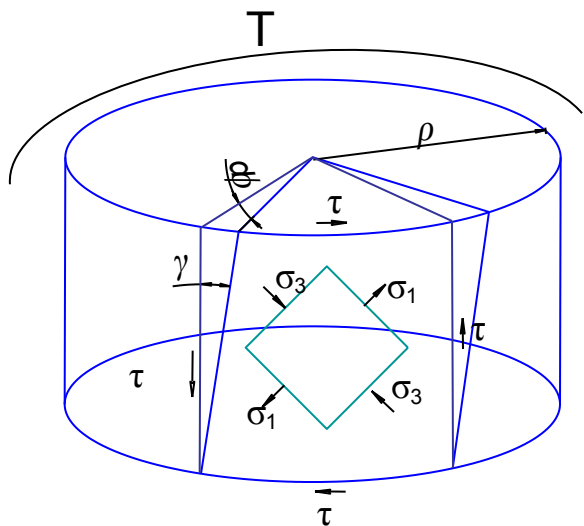
$$\gamma \cdot dz = d\varphi \cdot \rho \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \longleftarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho = \theta \cdot \rho$$



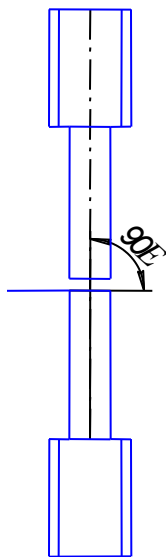
В поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения, направление которых, в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эти точки с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра.

Напряженное состояние при кручении

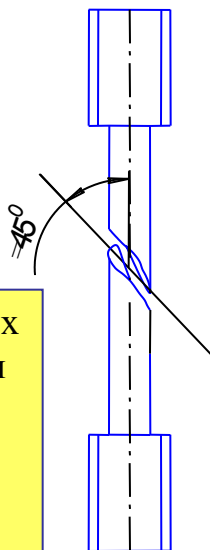


$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$

Возможны следующие варианты разрушения образцов

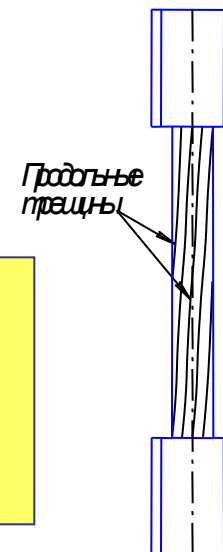


От действия касательных напряжений в плоскости поперечного сечения
Пластичные материалы



От действия главных напряжения в плоскости наклоненной под 45° к оси образца.

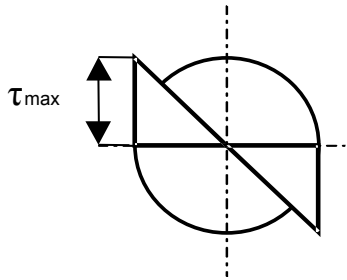
Хрупкие материалы (чугуны, закаленные стали)



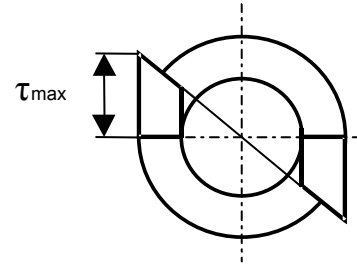
От действия касательных напряжений в плоскости параллельной образующей

Анизотропные материалы (древесина)

Напряжения при кручении



$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$



Полярный момент инерции характеризует влияние размеров и форма поперечного сечения вала на его способность сопротивляться угловым деформациям

$$2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = I_p$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ Для круглого сечения} \quad I_p = \frac{\pi d^4 (1 - \alpha^4)}{32} \text{ Для трубчатого сечения}$$

здесь $\alpha = d_1/d$, d_1 – внутренний диаметр трубы, d – наружный диаметр трубы
Полярный момент инерции выражается в м^4 (мм^4 , см^4).

Полярный момент сопротивления характеризует влияние геометрических размеров и формы поперечного сечения вала на его прочность.

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \text{ Для круглого сечения} \quad W_p = \frac{\pi d^3 (1 - \alpha^4)}{16} \text{ Для трубчатого сечения}$$

Максимальные касательные напряжения τ_{\max} прямо пропорциональны крутящему моменту T в опасном сечении и обратно пропорциональны полярному моменту сопротивления сечения W_p :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

Условие прочности при кручении

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брусе не должны превышать соответствующих допускаемых значений

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

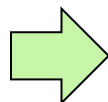
Допускаемые
напряжения

$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{по 3 теории прочности}$$

$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad \text{по 4 теории прочности}$$

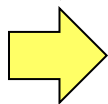
Из условия прочности вытекает три типа *задач при кручении*

. Задача проектного расчета



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau_p]}}$$

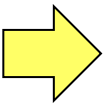
Для круглого сечения



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau_p]}}$$

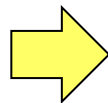
Для трубчатого сечения

. Задача проверочного расчета



$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

. Определение допускаемого момента



$$[T] \leq [\tau_{кр}] W_p$$

Деформации при кручении.

Условие жесткости при кручении

При кручении различают угол закручивания φ и относительный угол закручивания θ

Закон Гука при кручении

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Напряжения при кручении

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

$$\theta = \frac{T}{GI_p}$$

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

Условие жесткости при кручении.

Наибольший относительный угол закручивания, возникающий в скручиваемом брусе не должен превышать соответствующих допусковых значений

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

Где $[\theta]$ – допусковые относительный угол закручивания. $[\theta]=0,0045 \dots 0,02$ рад/м

Потенциальная энергия деформации

Полная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{T \cdot \varphi}{2} = \frac{T}{2} \cdot \frac{Tl}{GI_p} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

Удельная потенциальная энергия (полная)

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right]$$

$$u = \frac{1}{2E} \left[2\tau^2 + 2\mu\tau^2 \right] = \frac{(1+\mu)}{E} \tau^2$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) =$$
$$= \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (2\tau^2 + \tau^2) = \frac{1+\mu}{E} \tau^2$$

При кручении

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$