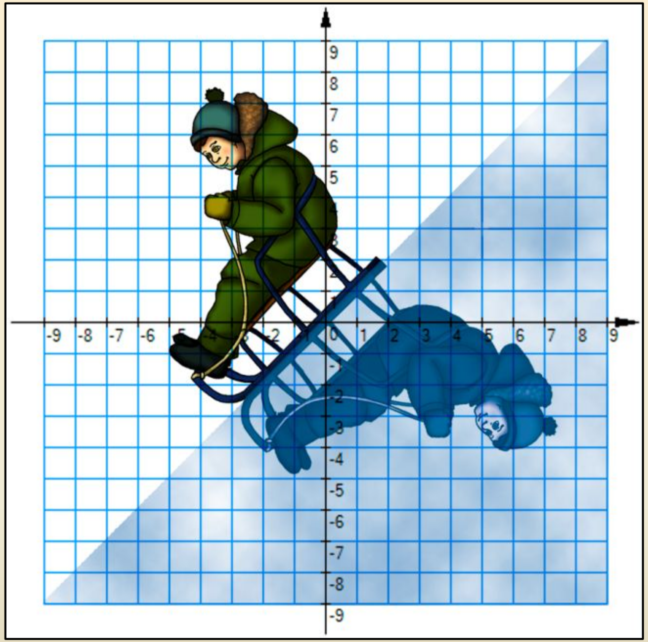


Обратная функция

Повторим

Если каждому значению *x* из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определенному правилу *f* число *y*, то, говорят, что на этом множестве задана функция.

D(f) – область определения функции;

x – независимая переменная или аргумент;

y – зависимая переменная;

множество всех значений y=f(x), x∈X называют областью значений функции и обозначают E(f).

Прямая Задача

Пусть дана функция $y=f(x)$

Найти значение функции в точке $x=x_0$

Например:

Найти значение функции $y=5x+7$ в точке $x=7$.$=35+7=42$

$y(7)=5\cdot7+7$

Ответ: $y(7)=42$

Обратная Задача

Пусть дана функция $y=f(x)$

Найти значение аргумента в точке $y=y_0$

Например:

Дана функция $y=5x+7$. Найти значение аргумента при котором $y=22$.

$22=5x+7$

$5x=22-7$

$5x=15$

$x=15:5$

$x=3$

Ответ: $y(3)=22$

Задача

- Пусть дан закон изменения скорости движения от времени $v(t) = v_0 - gt$

Найти закон изменения времени от скорости.

Решение:

$v_0 - gt = v$

$gt = v - v_0$

$t = \frac{v - v_0}{g}$

Обратимая функция

Обратная функция к $v(t)$

$$t(v) = \frac{v - v_0}{g}$$

- Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение y только при одном значении x, то эту функцию называют обратимой.

$$y = 5x - 7$$
$$y = \frac{2}{x}$$
$$y = x^7$$

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y} \qquad\qquad x = -\sqrt{y}$$

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. Поменяем местами x и y: $y = g(x)$. Функцию $y = g(x)$ называют обратной к функции $y = f(x)$. Обозначают $f^{-1}(x)$.

Пример

- Найти функцию, обратную функции $y = \frac{1}{x-5}$.

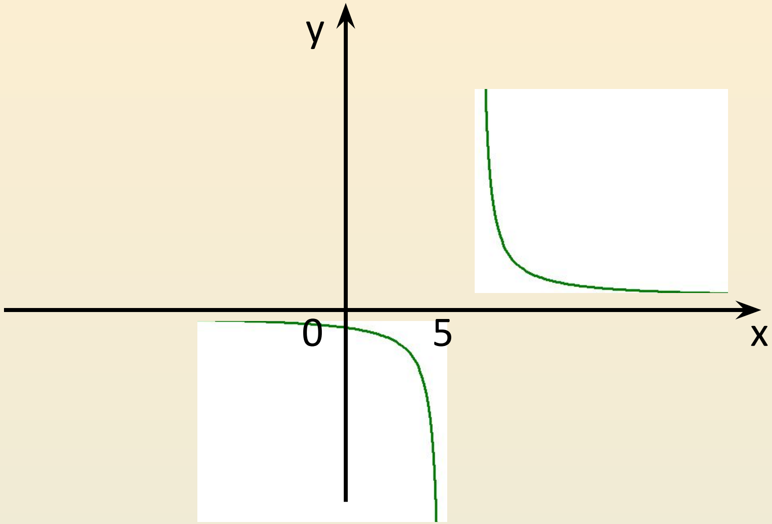
Решение:

$$\frac{1}{x-5} = y$$

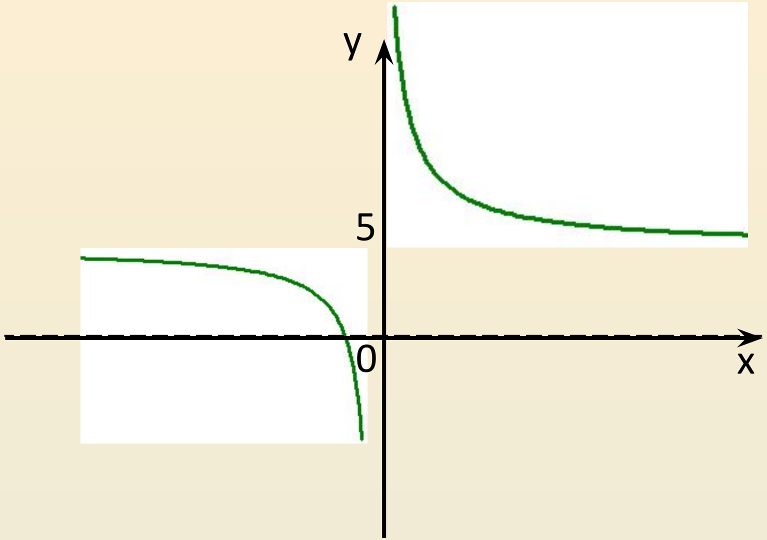
$$x - 5 = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} + 5 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{x} + 5$$

Ответ: $f^{-1}(x) = 5 + \frac{1}{x}$



1. $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

Свойства обратных функций:

1. Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной функции f, а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f:

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f)$$

2. Монотонная функция является обратимой:

а) если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;

б) если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.

Пример

- Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение:

$D(y) = R$

$E(y) = R$

Функция возрастает на R.

Значит, обратная функция существует на R.

Решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x. Получим,

$x = \frac{y+3}{5}$.

Поменяв местами буквы x и y, получим:

$y = \frac{x+3}{5}$.

Это и есть искомая обратная функция.

Пример

- Дана функция $y = x^2, x \epsilon\ [0;\ +\infty)$.

Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

Решение:

Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию.

Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0;\ +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$.

- Поменяв местами x и y, получим $y = \sqrt{x}, x \epsilon [0;\ +\infty)$.

График этой функции получается из графика функции $y = x^2, x \epsilon [0;\ +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.