


Свойства арифметического корня n-ой степени



Алгебра 9 класс

Корень из произведения

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ _____

Доказательство:

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \text{ и } \sqrt[n]{b} \geq 0$$

$$1) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0 \text{ и } 2) (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab \quad (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

По определению
арифметического корня

Используя свойство
степени произведения

По определению
арифметического
корня n -й степени.

Следовательно: корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

Примеры:

1. Найдем значение выражения $\sqrt[3]{64 \cdot 8}$

$$\sqrt[3]{64 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8} = 4 \cdot 2 = 8$$

2. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{81 \cdot 256}$

$$\sqrt[4]{81 \cdot 256} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{256} = 3 \cdot 4 = 12$$

3. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$

$$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$$

Корень из дроби

Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Доказательство

:

$a \geq 0, b > 0$ по определению арифметического корня $\sqrt[n]{a} \geq 0$ следовательно $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$
 $\sqrt[n]{b} > 0$

$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$ по свойству возведения в степень дроби получаем $\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$

Следовательно: корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Извлечение корня из корня

Если $n, k \in \mathbf{N}$ и $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Доказательство:

Так как $a \geq 0$, то выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ имеют смысл и неотрицательны.

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$$

Следовательно: по определению арифметического корня верно равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{6} = \sqrt[6]{6}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$$

3. Упростим выражение: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4 \cdot 3]{3} = \sqrt[12]{3}$$

Основное свойство корня

Если $n, k, m \in \mathbf{N}$ и $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Доказательство

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Используя свойство:

$$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$$

Используя свойство о возведении степени в степень.

Используя определение корня n -й степени.

Следовательно: Показатель корня и показатель степени подкоренного выражения можно разделить на одно и то же натуральное число.

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[6]{7^4}$

$$\sqrt[6]{7^4} = \sqrt[3]{\sqrt{7^4}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$$