Основатель социальной сети Facebook Марк Цукерберг, совладелец Tesla Motors и SpaceX Элон Маск и популярный актер и венчурный инвестор Эштон Кутчер вложили $40 млн в компанию Vicarious, которая изучает структуру коры головного мозга и пытается воссоздать ее в компьютерном коде.

# Задача

## Покрытие точек отрезками

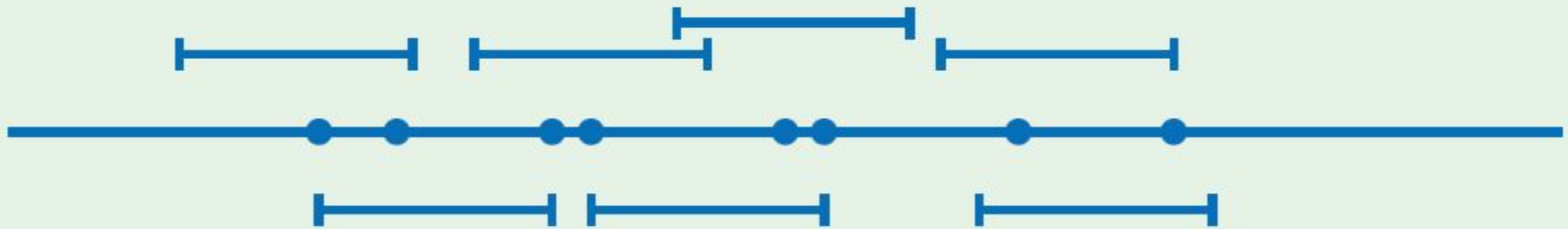
**Вход:** множество $n$ точек на прямой $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

**Выход:** минимальное количество отрезков единичной длины, которыми можно покрыть все точки.

## Пример

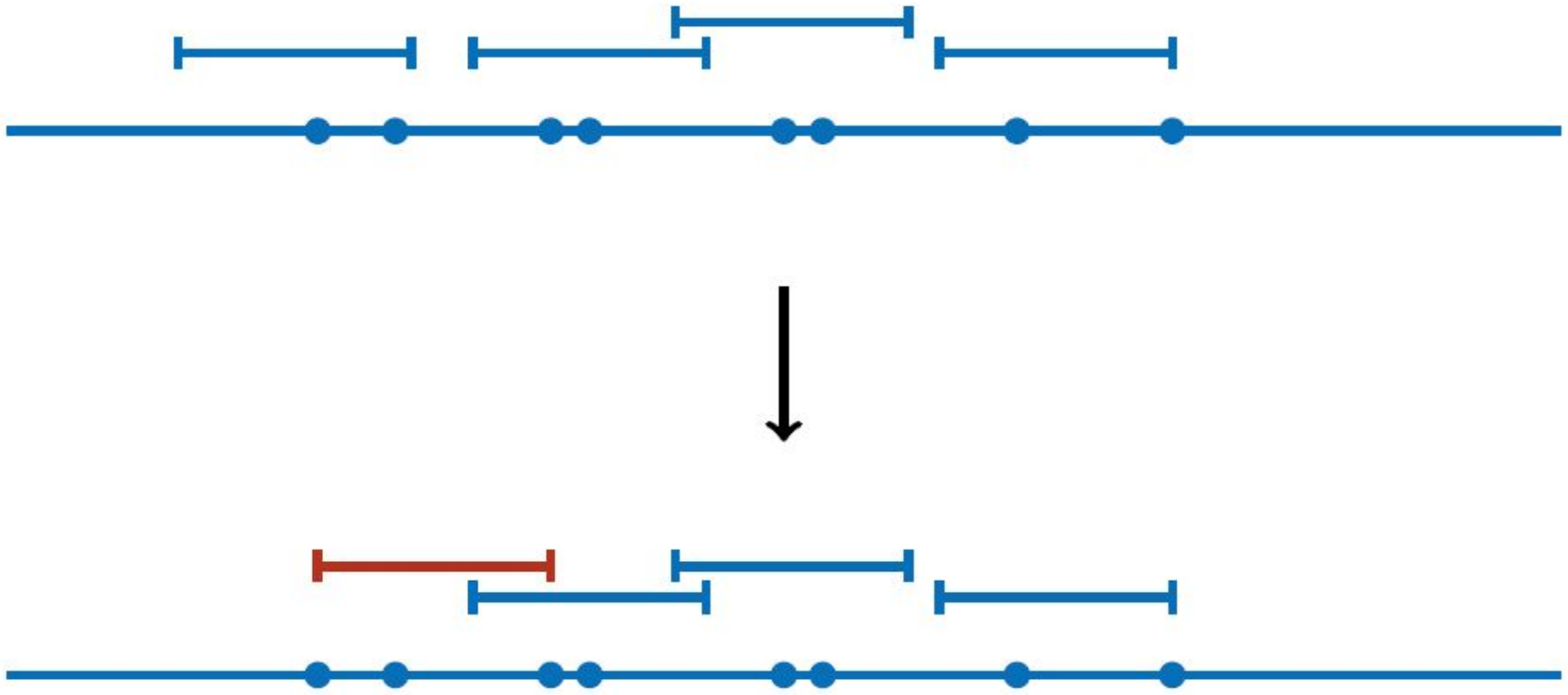
## Пример

## Пример



# Надёжный шаг

Существует оптимальное покрытие, в котором самая левая точка покрыта левым концом отрезка.



Добавим в решение отрезок, левый край которого совпадает с крайней левой точкой.

# Алгоритм

**Функция PointsCover($x_1, \ldots, x_n$)**

$S \leftarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$
пока $S$ не пусто:
  $x_m \leftarrow$ минимальная точка $S$
  добавить к решению отрезок $[\ell, r] = [x_m, x_m + 1]$
  выкинуть из $S$ точки, покрытые отрезком $[\ell, r]$
вернуть построенное решение

# Алгоритм

**Функция** POINTSCOVER$(x_1, \ldots, x_n)$

$S \leftarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$

$O(n)$ пока $S$ не пусто:

  $x_m \leftarrow$ минимальная точка $S$ $\quad O(n)$

  добавить к решению отрезок $[\ell, r] = [x_m, x_m + 1]$ $\quad O(1)$

  выкинуть из $S$ точки, покрытые отрезком $[\ell, r]$ $\quad O(n)$

вернуть построенное решение

Время работы: $O(n^2)$

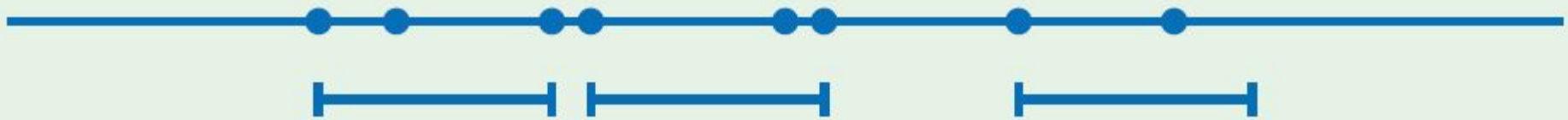
# Улучшенный алгоритм

**Функция PointsCover($x_1, \ldots, x_n$)**

$x_1, \ldots, x_n \leftarrow \text{Sort}(x_1, \ldots, x_n)$
$i \leftarrow 1$
пока $i \le n$:
  добавить к решению отрезок $[\ell, r] = [x_i, x_i + 1]$
  $i \leftarrow i + 1$
  пока $i \le n$ и $x_i \le r$:
    $i \leftarrow i + 1$
вернуть построенное решение

Время работы: $T(\text{Sort}) + O(n) = O(n \log n)$.

## Пример

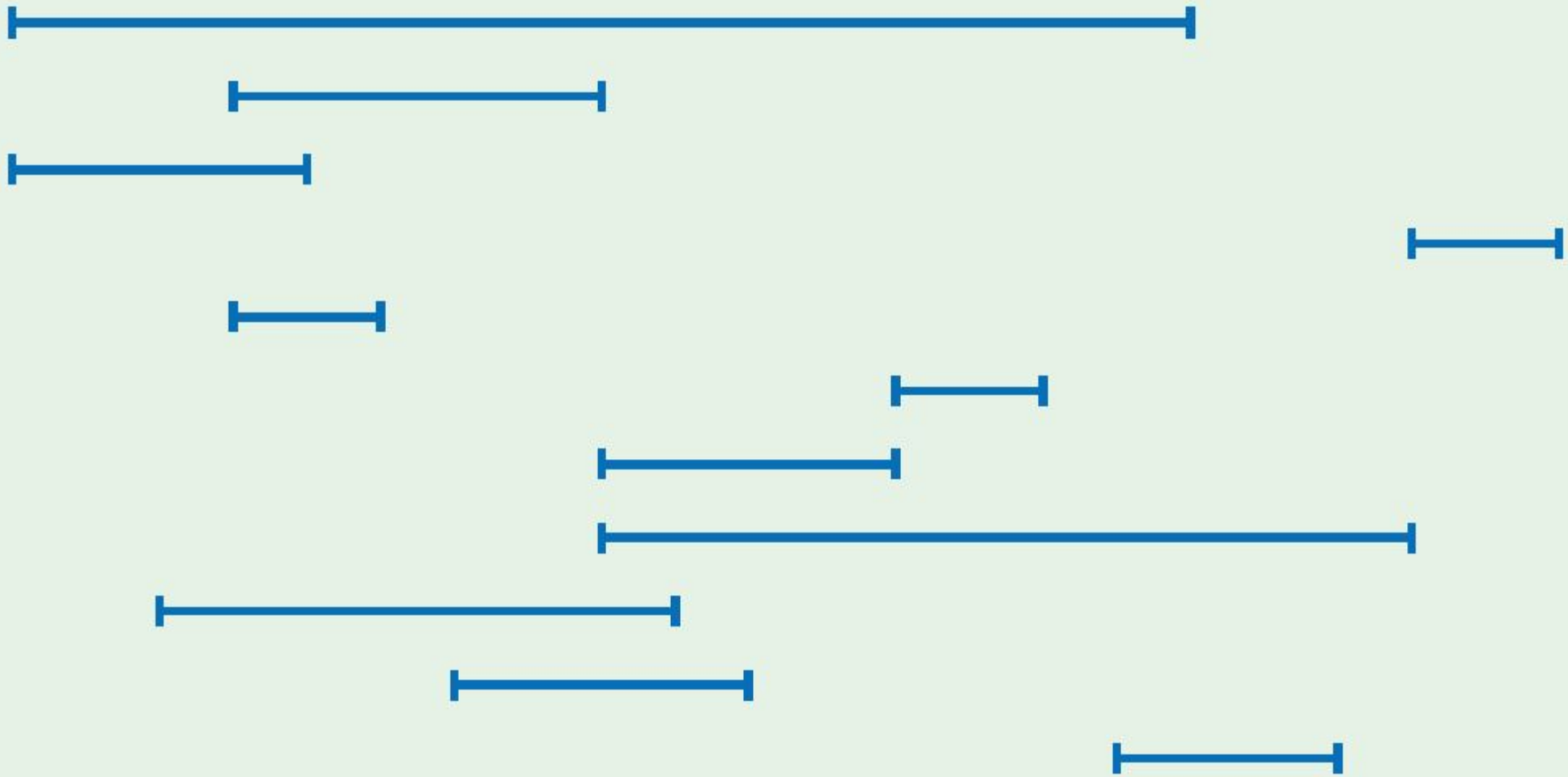


## Задача о выборе заявок

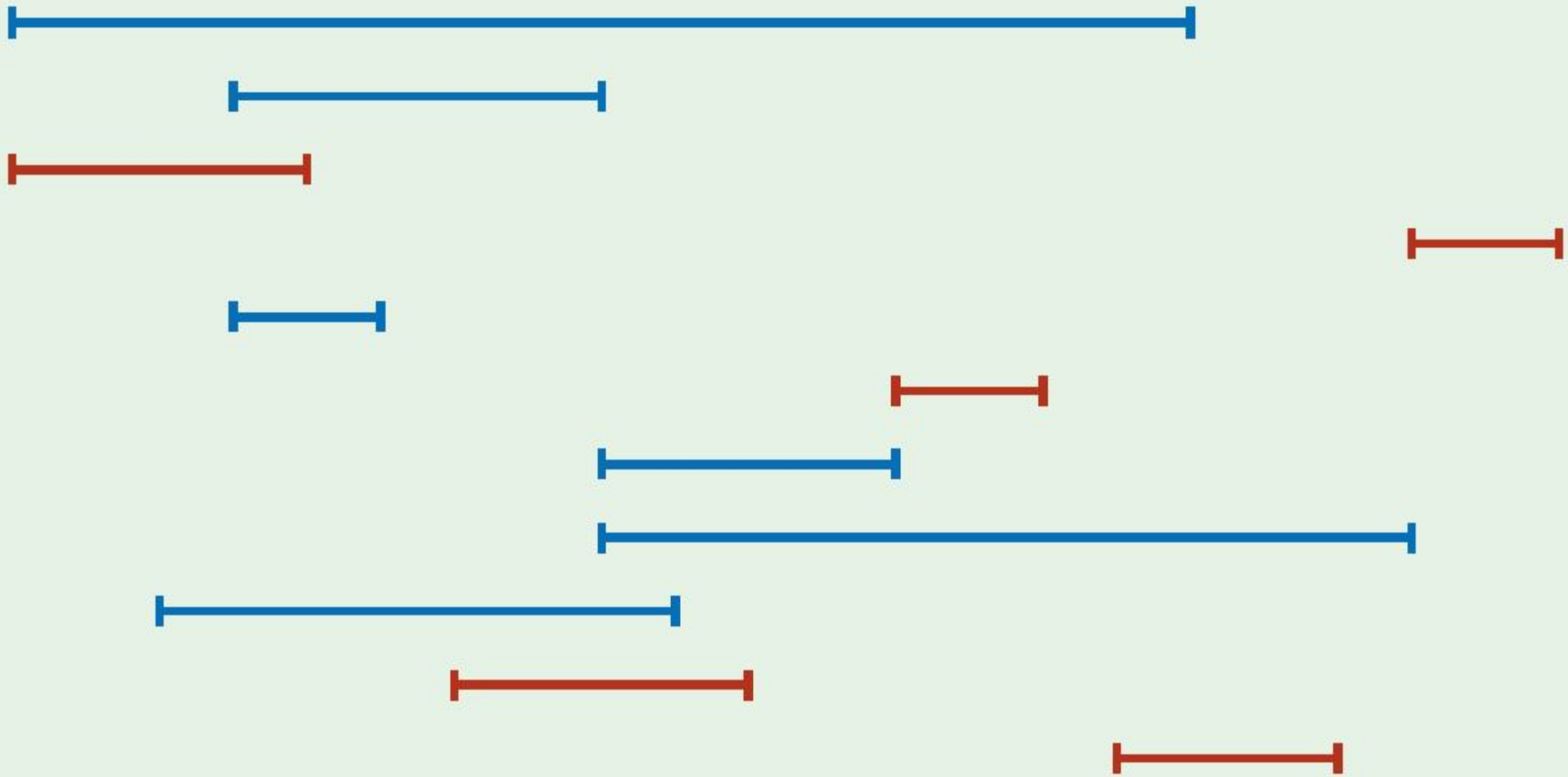
Вход: множество $n$ отрезков на прямой.

Выход: максимальное количество попарно не пересекающихся отрезков.

# Пример

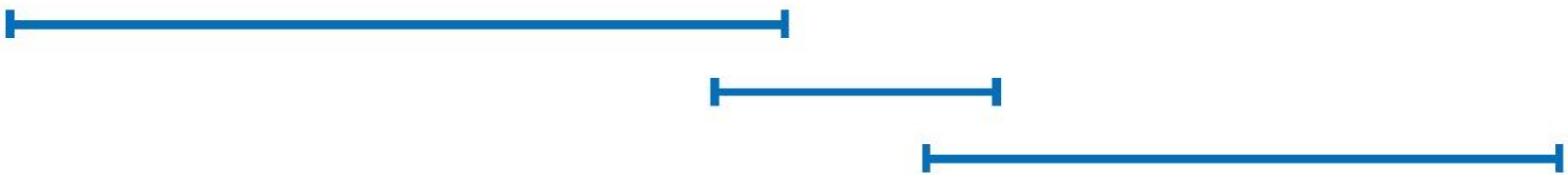


# Пример



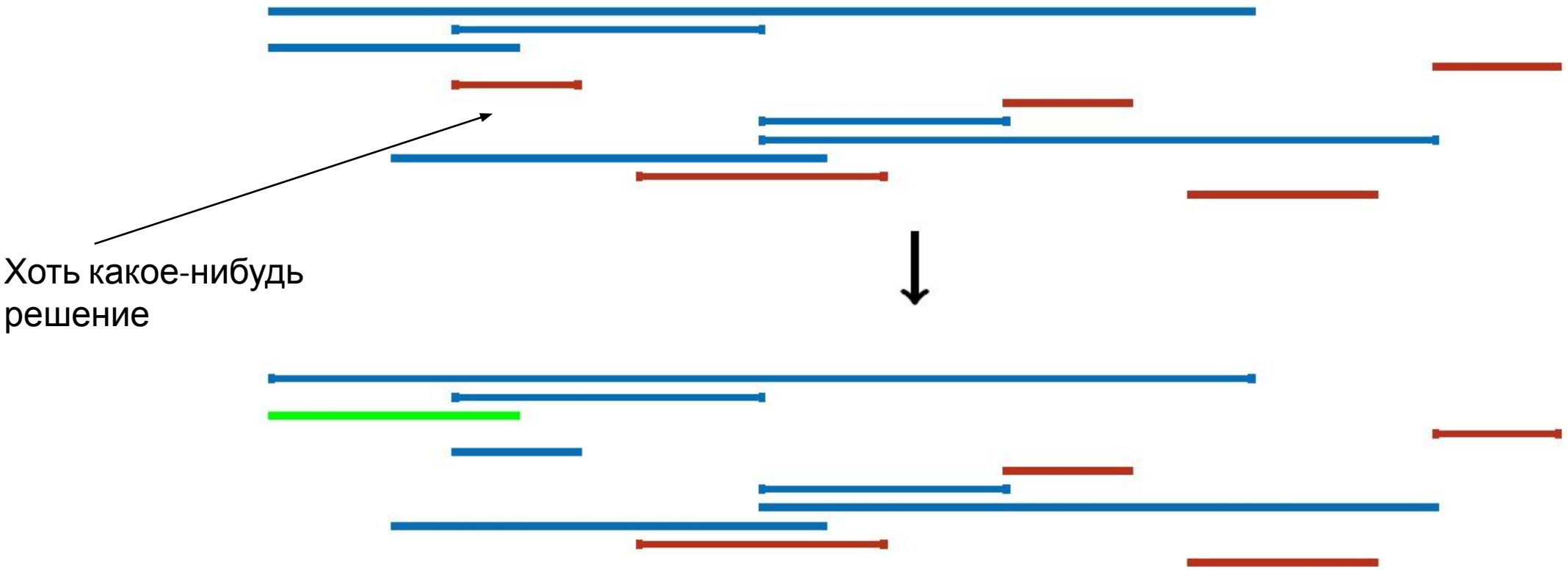
# Замечание

Выбирая в первую очередь более короткие отрезки, можно получить неоптимальное решение.



# Надёжный шаг

Существует оптимальное решение, содержащее отрезок, правый конец которого минимален.




Можно сразу добавить в решение отрезок, правый конец которого минимален.

# Алгоритм

**Функция ACTSEL$(\ell_1, r_1, \ldots, \ell_n, r_n)$**

$S \leftarrow \{[\ell_1, r_1], \ldots, [\ell_n, r_n]\}$
пока $S$ не пусто:
  $[\ell_m, r_m] \leftarrow$ отрезок из $S$ с мин. правым концом
  добавить $[\ell_m, r_m]$ к решению
  выкинуть из $S$ отрезки, пересекающиеся с $[\ell_m, r_m]$
вернуть построенное решение

Время работы: $O(n^2)$.

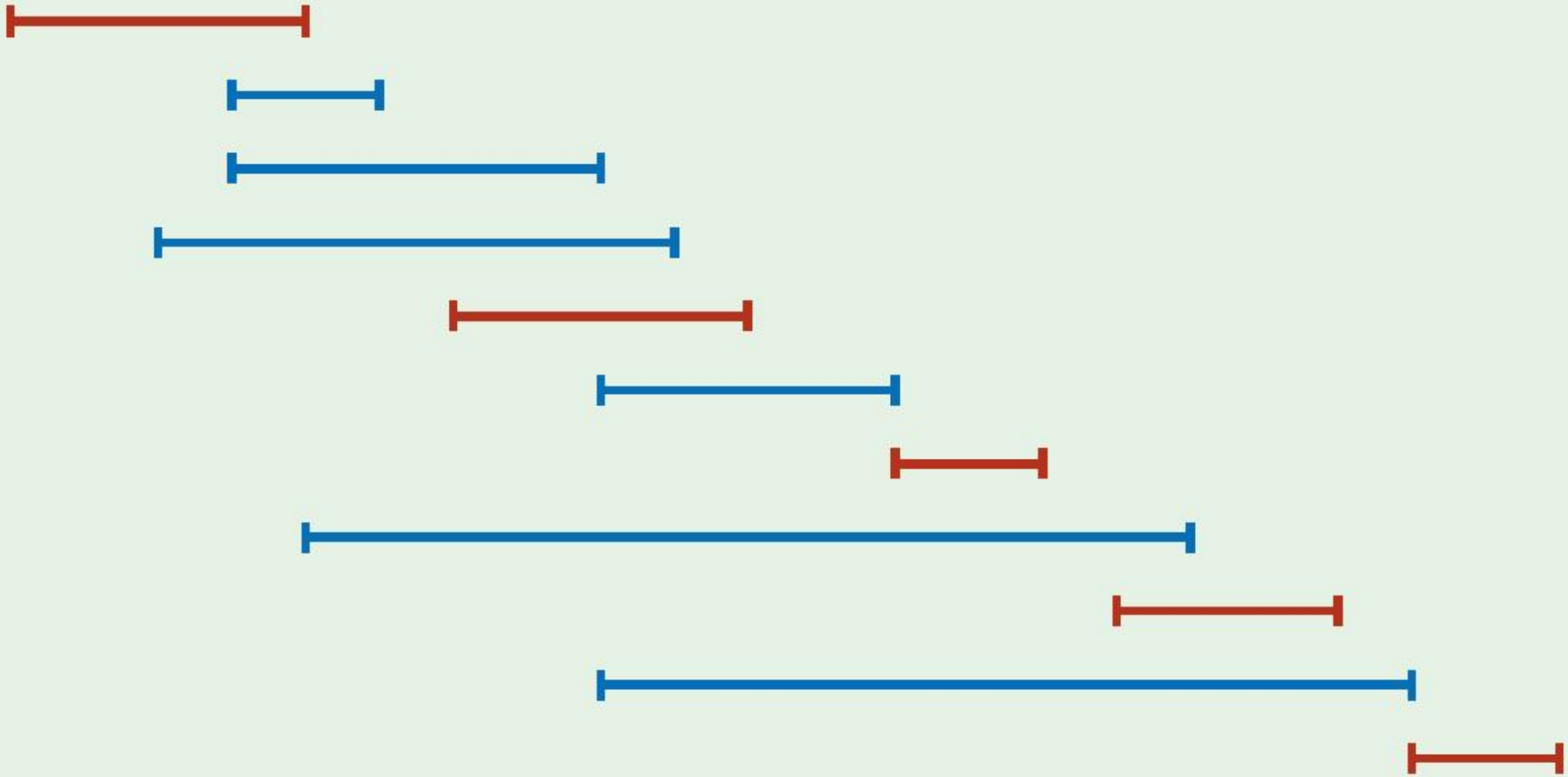
# Улучшенный алгоритм

**Функция ACTSEL$(\ell_1, r_1, \ldots, \ell_n, r_n)$**

```
отсортировать n отрезков по правым концам
для всех отрезков в полученном порядке:
  если текущий отрезок не пересекает
    последний добавленный:
    взять его в решение
вернуть построенное решение
```

Время работы: $T(\text{SORT}) + O(n) = O(n \log n)$.

# Пример

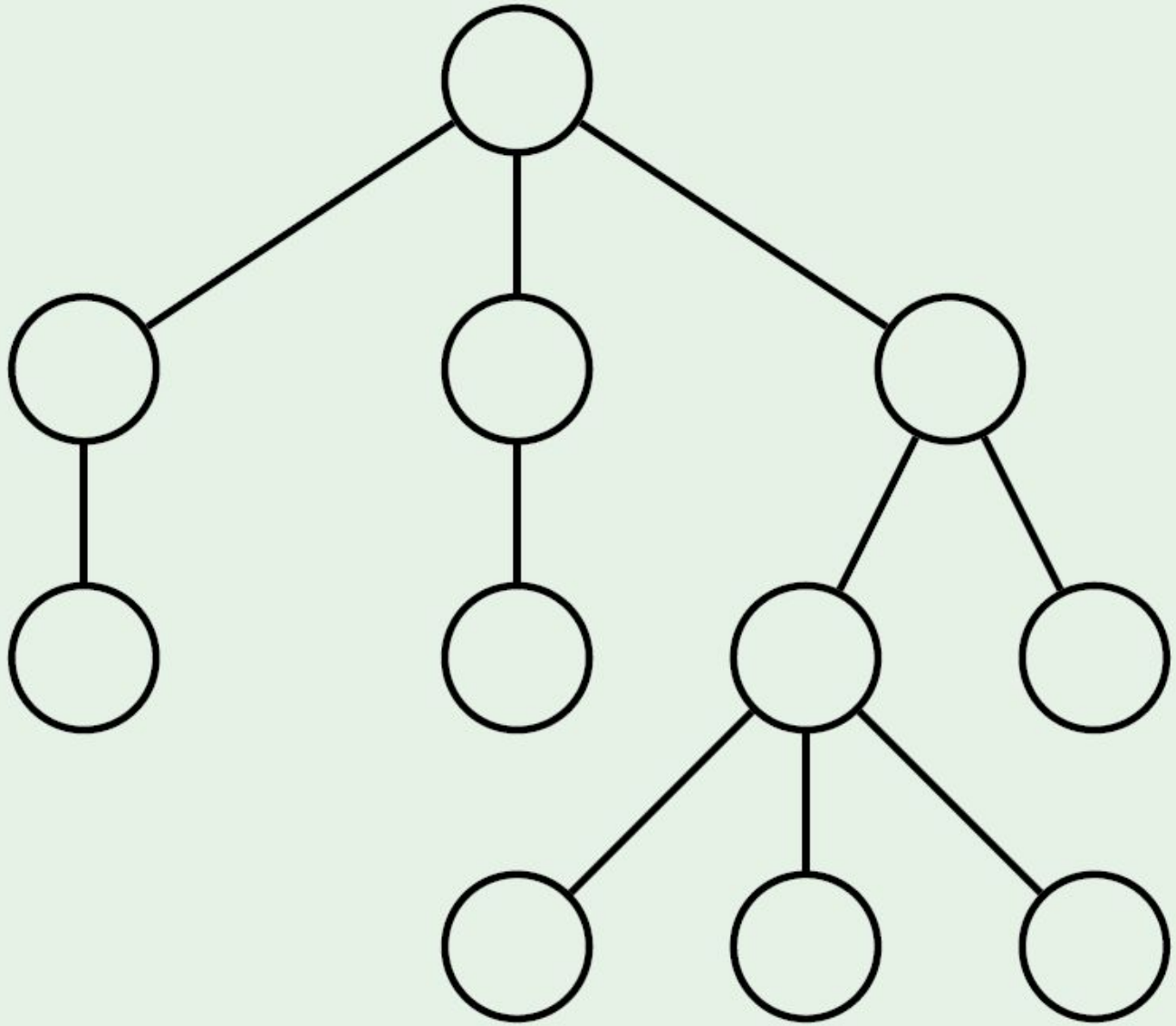


## Планирование вечеринки в компании

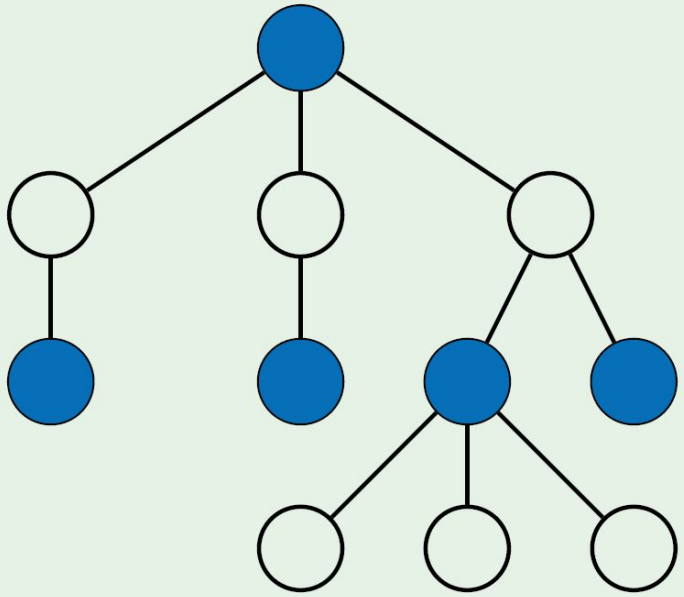
**Вход:** дерево.

**Выход:** независимое множество (множество не соединённых друг с другом вершин) максимального размера.

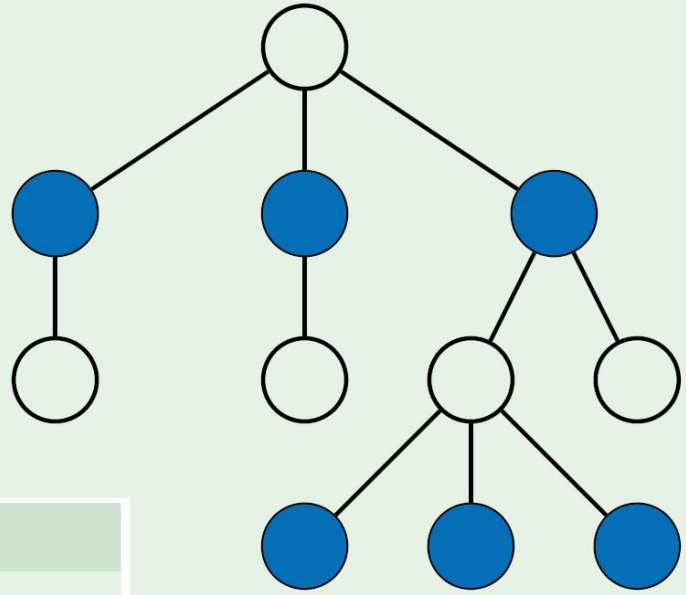
# Пример



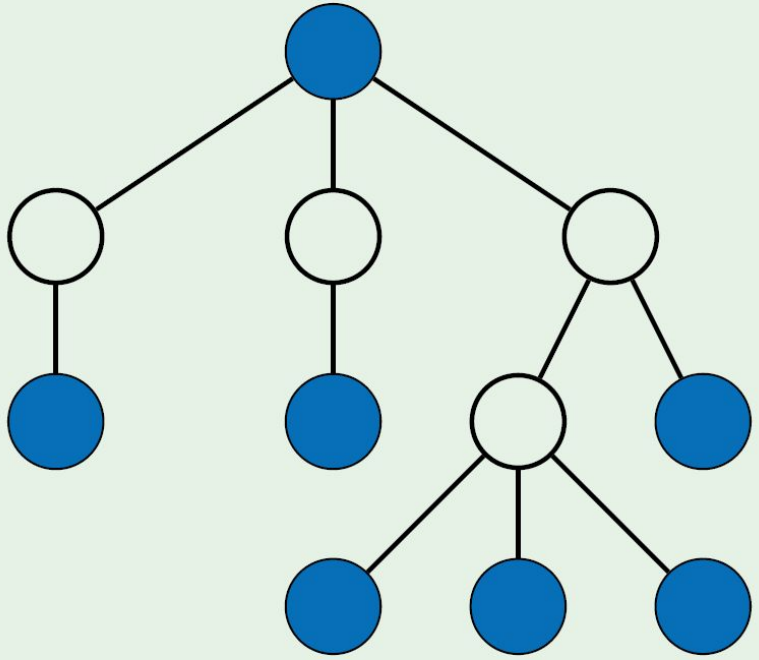
Пример



Пример

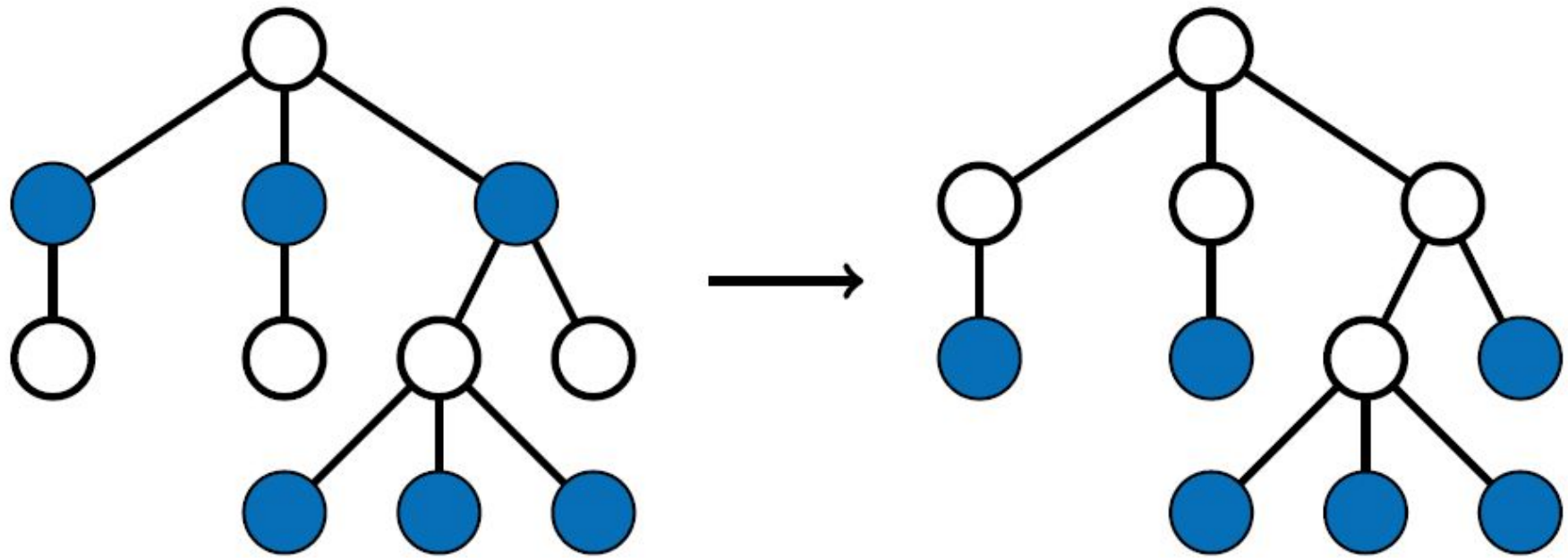


Пример



# Надёжный шаг

Существует оптимальное решение, содержащее каждый лист дерева.



Можно взять в решение все листья.

# Алгоритм

**Функция MaxIndependentSet($T$)**

```
пока T не пусто:
  взять в решение все листья
  выкинуть их и их родителей из T
вернуть построенное решение
```

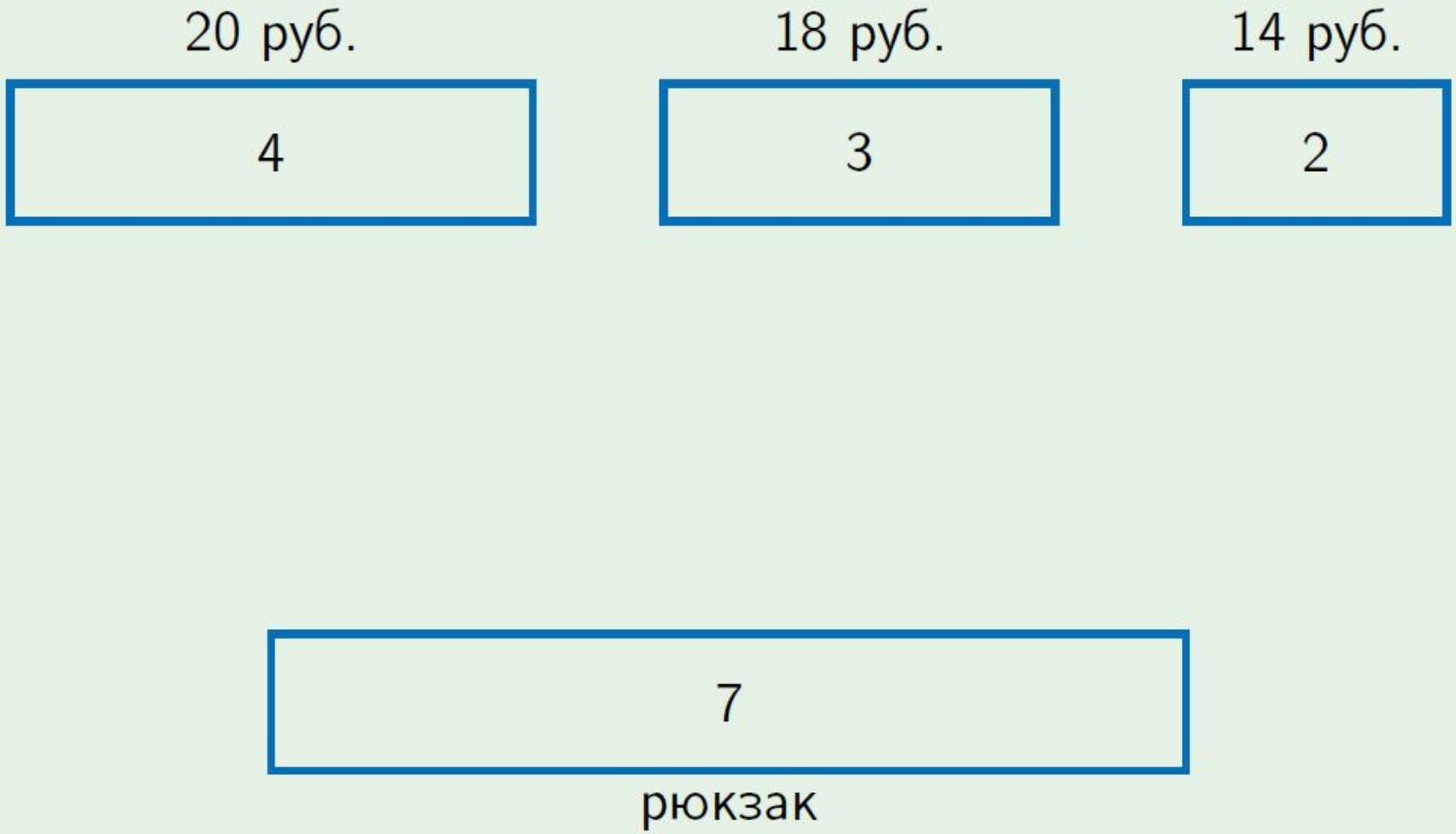
Время работы: $O(|T|)$.

## Непрерывный рюкзак

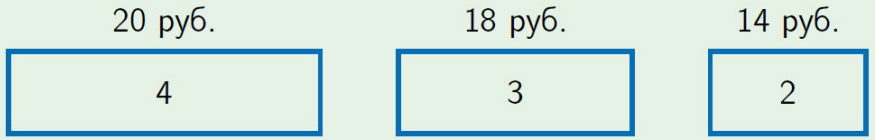
**Вход:** веса $w_1, \ldots, w_n$ и стоимости $c_1, \ldots, c_n$ данных $n$ предметов; вместимость рюкзака $W$.

**Выход:** максимальная стоимость частей предметов суммарного веса не более $W$.

## Пример



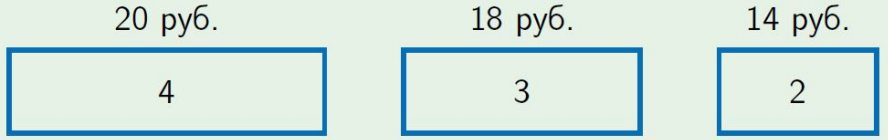
## Пример





всего: 38 руб.

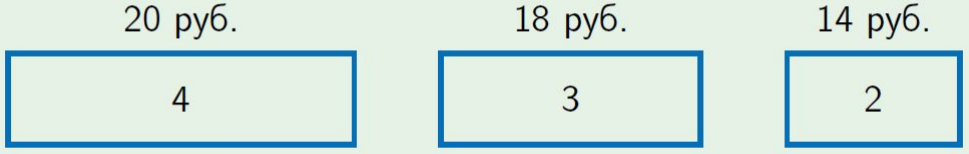
## Пример

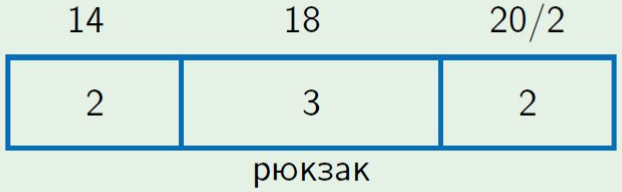




всего: 40 руб.

## Пример

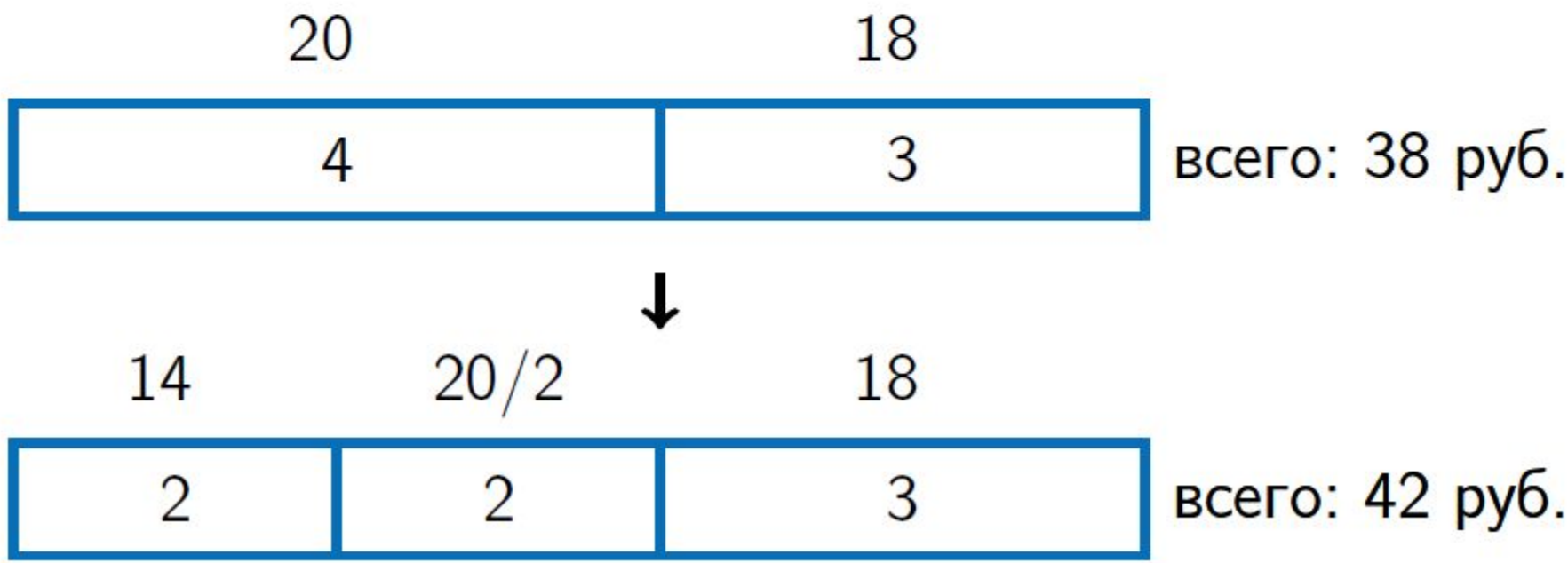



всего: 42 руб.

# Надёжный шаг

Существует оптимальное решение, содержащее максимально возможную часть предмета, стоимость которого за килограмм максимальна.



# Алгоритм

**Функция KNAPSACK$(w_1, c_1, \ldots, w_n, c_n)$**

```
отсортировать предметы по убыванию c/w
для всех предметов в полученном порядке:
  взять по максимуму текущего предмета
вернуть построенное решение
```

Время работы: $T(\textsc{Sort}) + O(n) = O(n \log n)$.

# Основные идеи

**Надёжный шаг.** Существует оптимальное решение, согласованное с локальным жадным шагом.

**Оптимальность подзадач.** Задача, остающаяся после жадного шага, имеет тот же тип.

# Задача на программирование: покрыть отрезки точками

По данным $n$ отрезкам необходимо найти множество точек минимального размера, для которого каждый из отрезков содержит хотя бы одну из точек.

В первой строке дано число $1 \leq n \leq 100$ отрезков. Каждая из последующих $n$ строк содержит по два числа $0 \leq l \leq r \leq 10^9$, задающих начало и конец отрезка. Выведите оптимальное число $m$ точек и сами $m$ точек. Если таких множеств точек несколько, выведите любое из них.

---

**Sample Input 1:**

```
3
1 3
2 5
3 6
```

---

**Sample Output 1:**

```
1
3
```

# Задача на программирование: непрерывный рюкзак

Первая строка содержит количество предметов $1 \leq n \leq 10^3$ и вместимость рюкзака $0 \leq W \leq 2 \cdot 10^6$. Каждая из следующих $n$ строк задаёт стоимость $0 \leq c_i \leq 2 \cdot 10^6$ и объём $0 < w_i \leq 2 \cdot 10^6$ предмета ($n, W, c_i, w_i$ — целые числа). Выведите максимальную стоимость частей предметов (от каждого предмета можно отделить любую часть, стоимость и объём при этом пропорционально уменьшатся), помещающихся в данный рюкзак, с точностью не менее трёх знаков после запятой.

---

**Sample Input:**

```
3 50
60 20
100 50
120 30
```

---

**Sample Output:**

```
180.000
```

# Задача на программирование: различные слагаемые

По данному числу $1 \leq n \leq 10^9$ найдите максимальное число $k$, для которого $n$ можно представить как сумму $k$ различных натуральных слагаемых. Выведите в первой строке число $k$, во второй $-$ $k$ слагаемых.

---

**Sample Input 1:**

```
4
```

---

**Sample Output 1:**

```
2
1 3
```

---

**Sample Input 2:**

```
6
```

---

**Sample Output 2:**

```
3
1 2 3
```