Решение уравнений, систем уравнений с параметрами графическим способом.

ГБОУ СОШ №249
Теплякова Л.Ф.

Эпиграф

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи – решайте их.

Д. Пойа “Математическое открытие”

- Переменные a, b, c, ..., которые при решении уравнения считаются постоянными, называются **параметрами**, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.
- Параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d, ..., а неизвестные - буквами x, y, z.

- Решить уравнение с параметрами - значит указать, при каких значениях параметров существуют решения и каковы они.
- Существует несколько алгоритмов решения уравнений с параметрами.

Аналитический способ решения.

Является наиболее сложным способом решения выражений с параметром. Требует точное знание таких понятий как область определения, равносильность, тождественность, следствие, а также теорем связанных с этими понятиями. В ЕГЭ представлены варианты которые возможно решить наиболее простым способом.

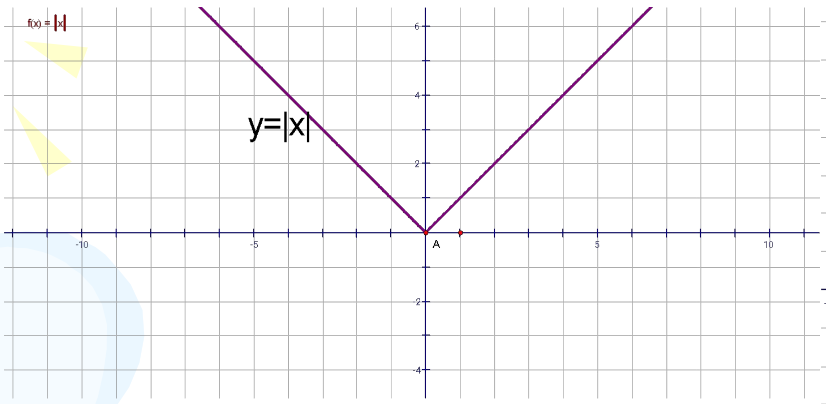
Алгоритм решения уравнений с параметром графическим способом.

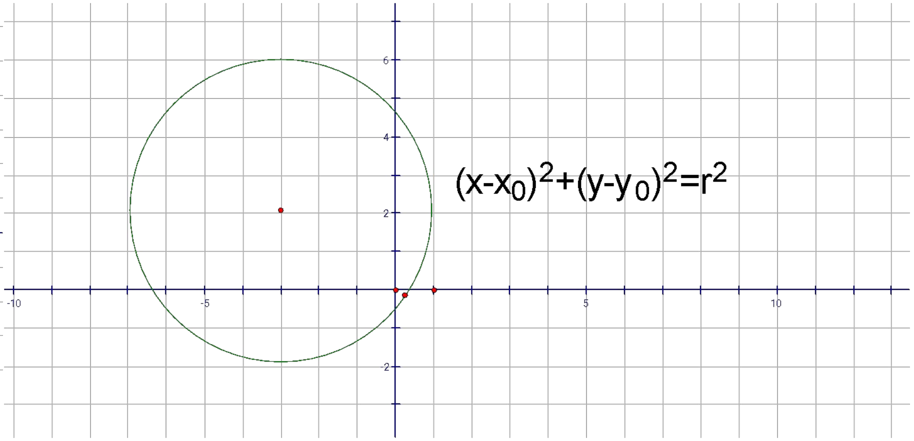
1. Находим область определения.
2. Переносим выражение содержащее а в правую часть.
3. В системе координат строим графики для левой и правой части для тех значений х, которые входят в область определения данного уравнения (неравенства).
4.Находим точки пересечения графиков функций, определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение относительно х.
4. Записываем ответ.

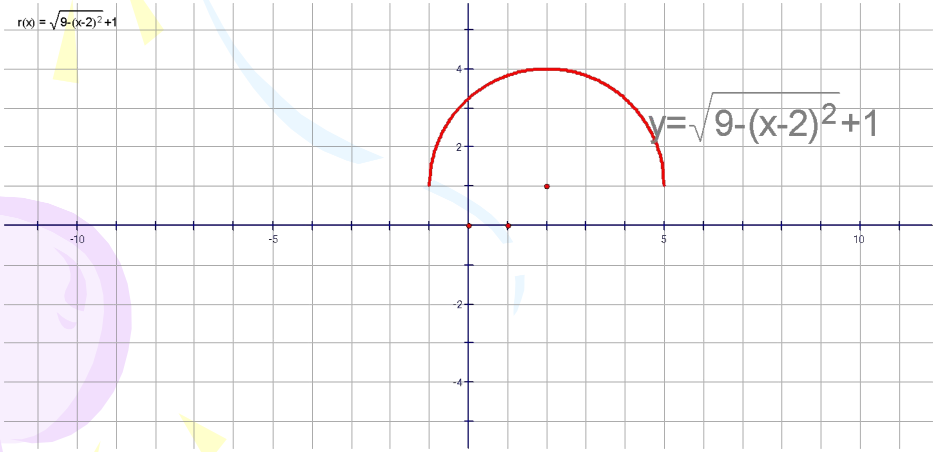
Для успешного решения задач типа С5 необходимо:

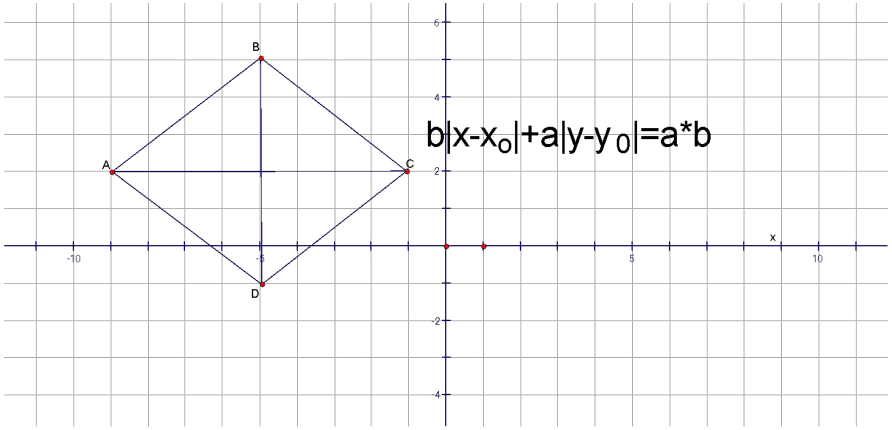
- Уметь решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Уметь строить графики изученных функций
- Использовать для приближенного решения графический метод

Уравнения некоторых линий





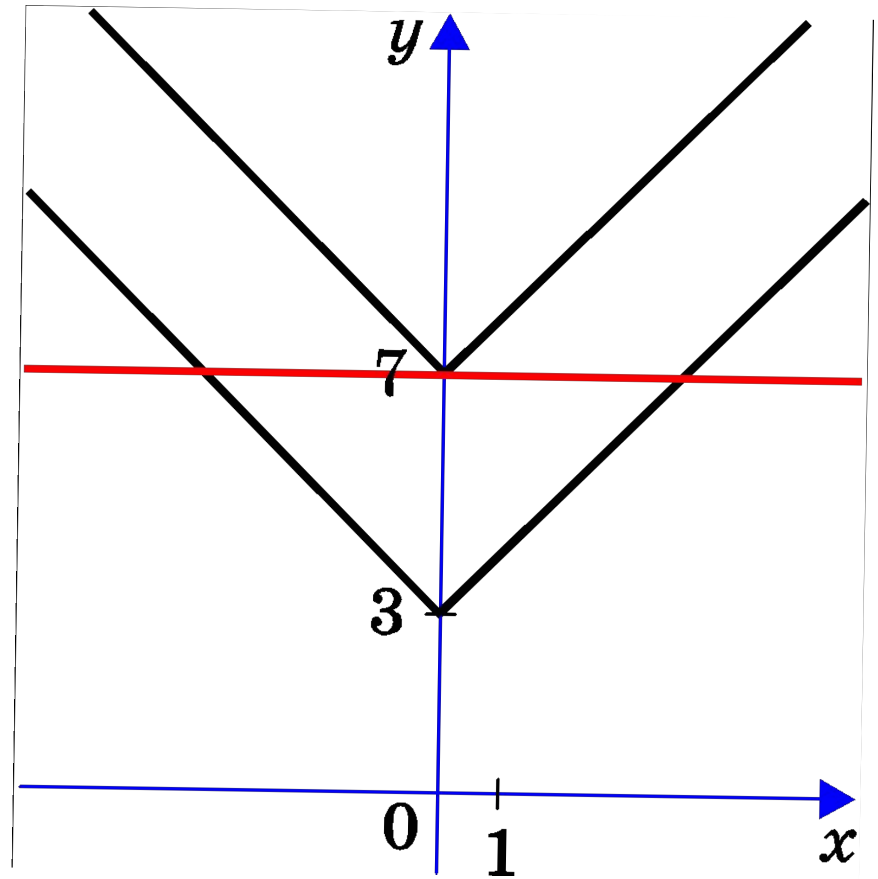




Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$||x| + 5 - a| = 2$$

имеет ровно три корня.



$$|x| + 5 - a = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x| + 3 = a \\ |x| + 7 = a \end{array}\right.$$

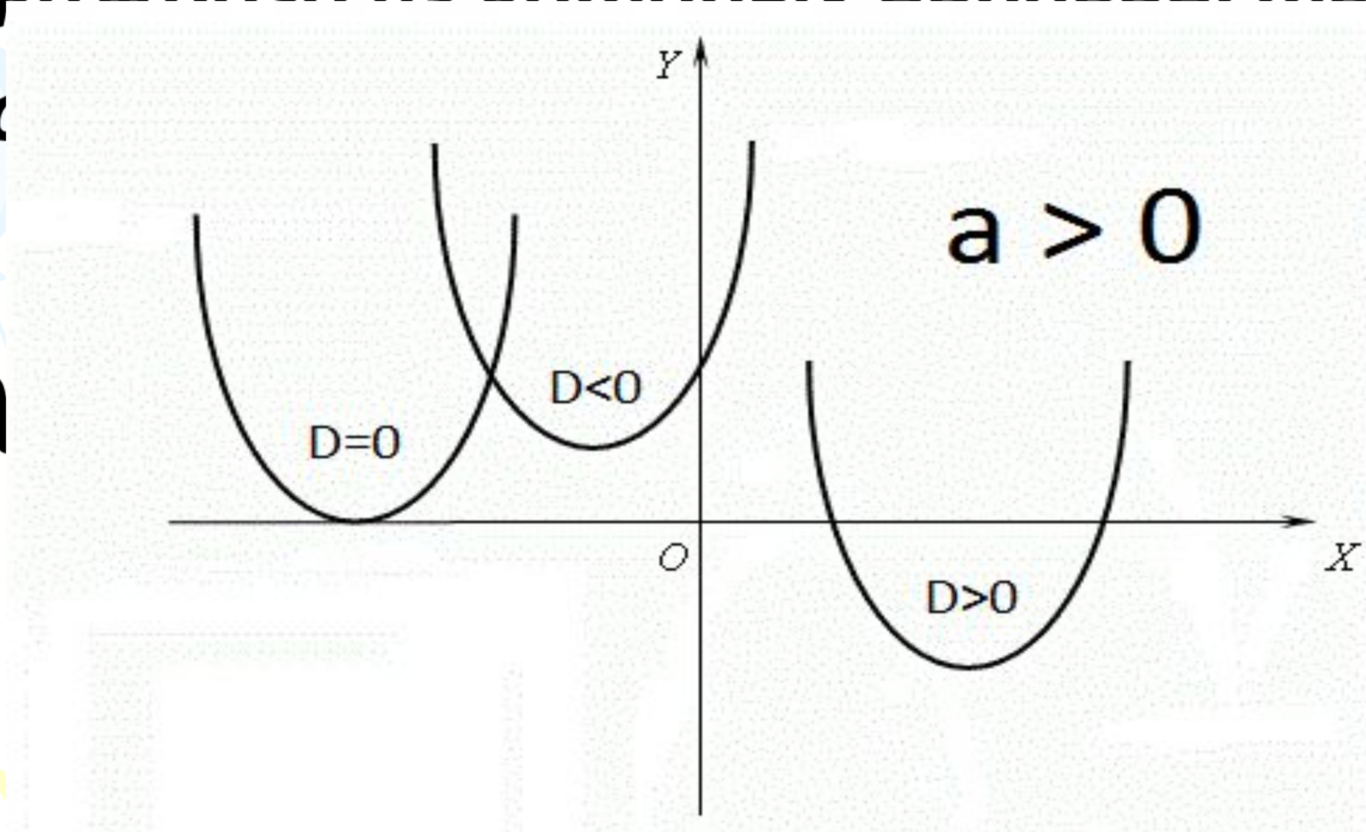
- Найдите все значения a (параметра), для каждого из которых неравенство выполняется для всех x :

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

Рассмотрим неравенство

- Найдите все значения а(параметра), для каждого из которых неравенство выпо

ax



Найдите все значения a (параметра), для каждого из которых неравенство выполняется для всех x :

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 - a(3a-1) = 4 - 3a^2 - a = -(3a^2 + a - 4)$$

$$-(3a^2 + a - 4) < 0$$

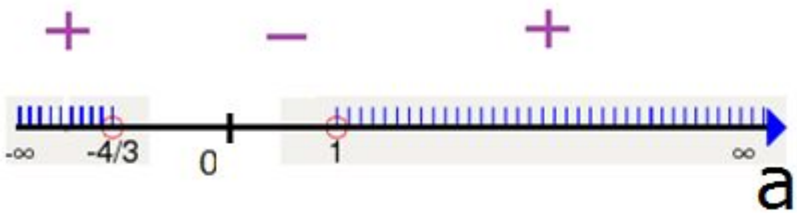
$$3a^2 + a - 4 > 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Условие: а > 0

- Найдите все значения а(параметра), для каждого из которых неравенство выполняется для всех х :

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$



$(1, \infty)$

Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет решения.

Решение.

Рассмотрим первое уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

Заметим, что выражение является уравнением окружности с центром в точке (0; 0) и радиусом равным одному.

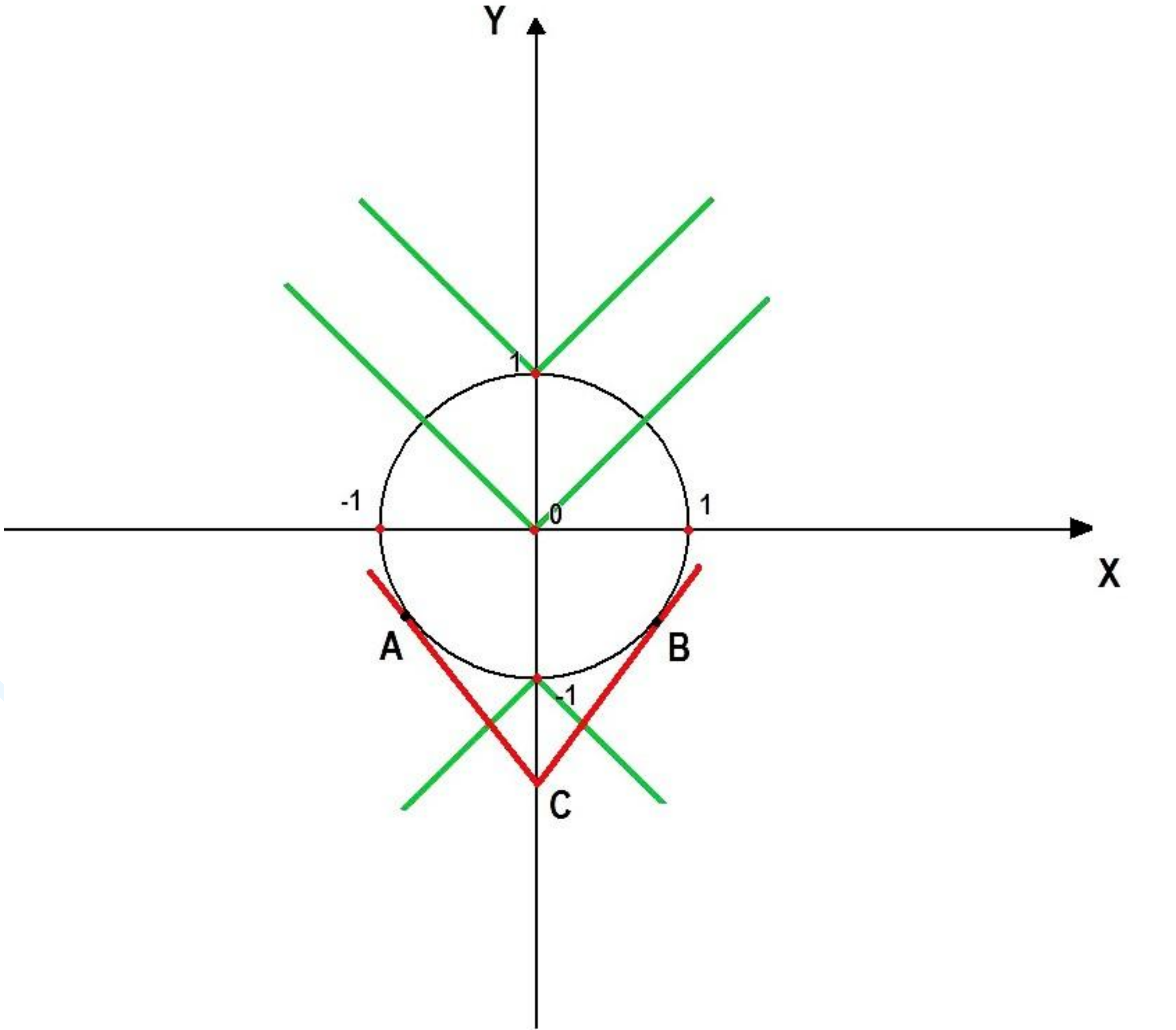
Теперь исследуем второе выражение:

$$y = q|x| + p$$

Графиком $|x|$ является так называемая галочка. От коэффициента q зависит насколько отдалены от оси OY её ветви и куда они направлены, так при $q<0$ они будут направлены вниз, а при $q>0$ верх.

От коэффициента p зависит передвижение графика по оси OY.

Для наглядного решение нам потребуется построение графика.


Y
X
1
-1
0
1
-1
A
B
C

Таким образом система будет иметь решение при p >= -1 и p <= 1.

Ответ: p принимает значения из промежутка [-1;1].

Найдите все положительные а при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x|-9\right)^2+\left(y-5\right)^2=9 \\ \left(x+3\right)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение

Решение.

Для того чтобы решить задачу вам необходимо знать уравнение окружности.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Рассмотрим первое выражение:

$$(|x|-9)^2+(y-5)^2=9$$

Из него следует, что центр окружности будет находиться в точке (9; 5), а также в точке (-9; 5), так как Х находится под знаком модуль, а радиус этих двух окружностей будет равен 3.

(Квадратный корень из 9 равен 3)

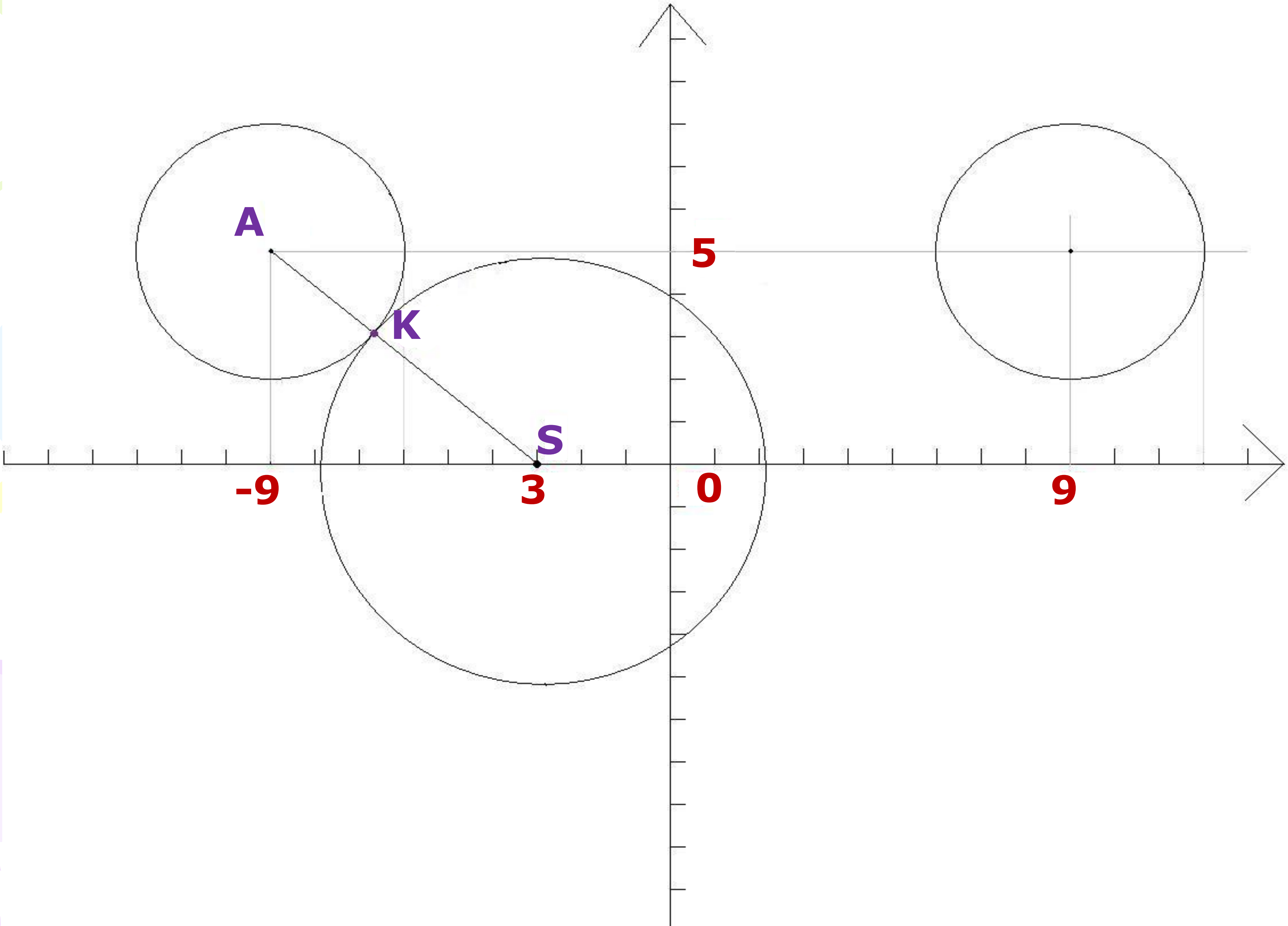
Теперь рассмотрим второе выражение:

$$(x+3)^2 + y^2 = a^2$$

Это выражение с параметром, значение которого нам нужно найти, а также уравнение окружности с центром в точке (-3; 0) и радиусом равным a.

Для наглядного решение нам потребуется построение окружностей.

Вариант 1



Расстояние KS = AS-AK

AS можно найти по формуле расстояния между двумя точками на плоскости

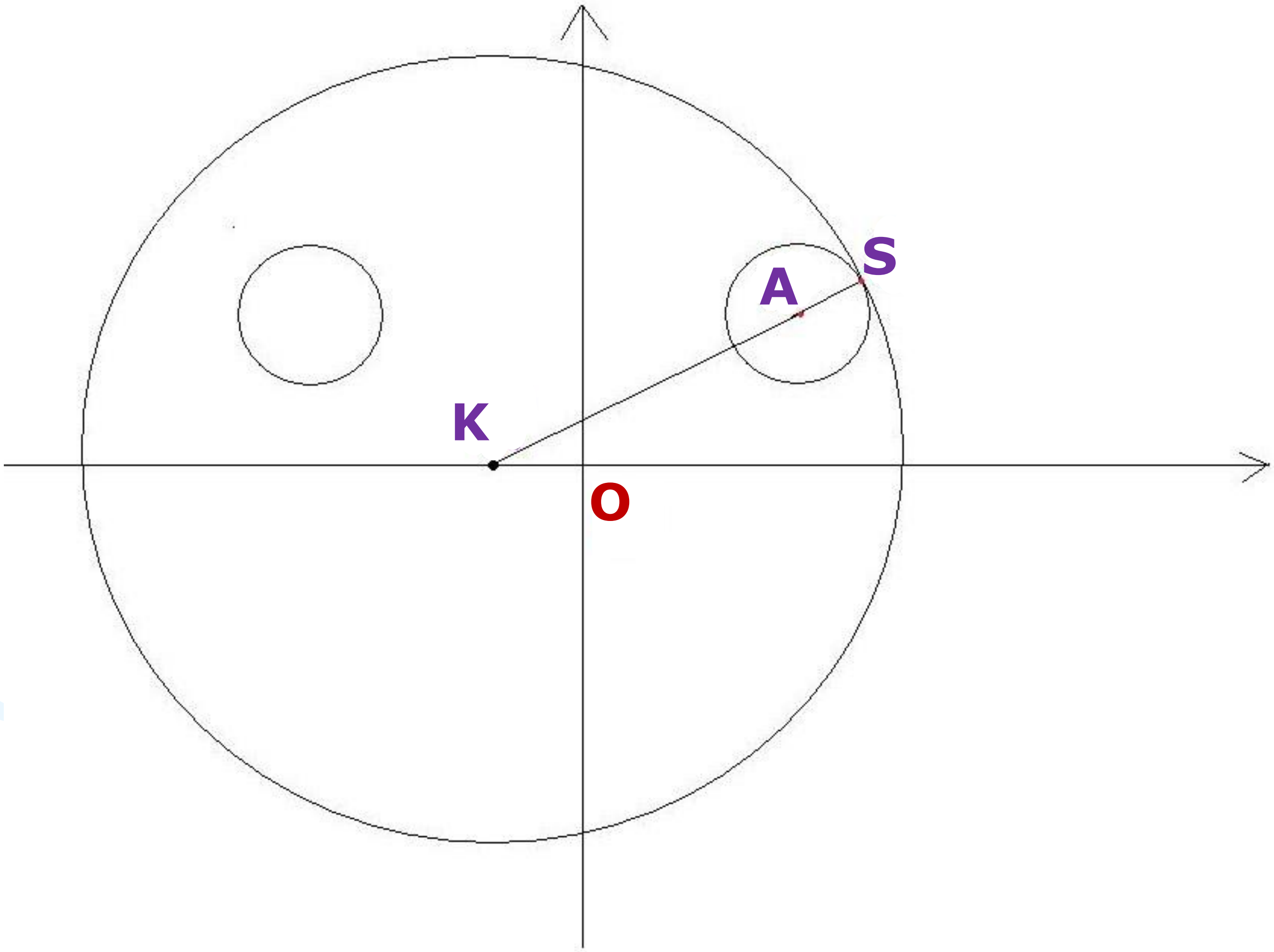
AS= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

AS= $\sqrt{61}$

AK=R=3 следовательно

KS = $\sqrt{61}$ - 3

Вариант 2



Расстояние KS=AS+AK

AK также можно найти по ранее изложенной формуле

AK = 13

AS = R = 3

KS = 13 + 3 = 16

ОТВЕТ: Система имеет одно решение при a=16 и когда a принимает значение $\sqrt{61}$ - 3.

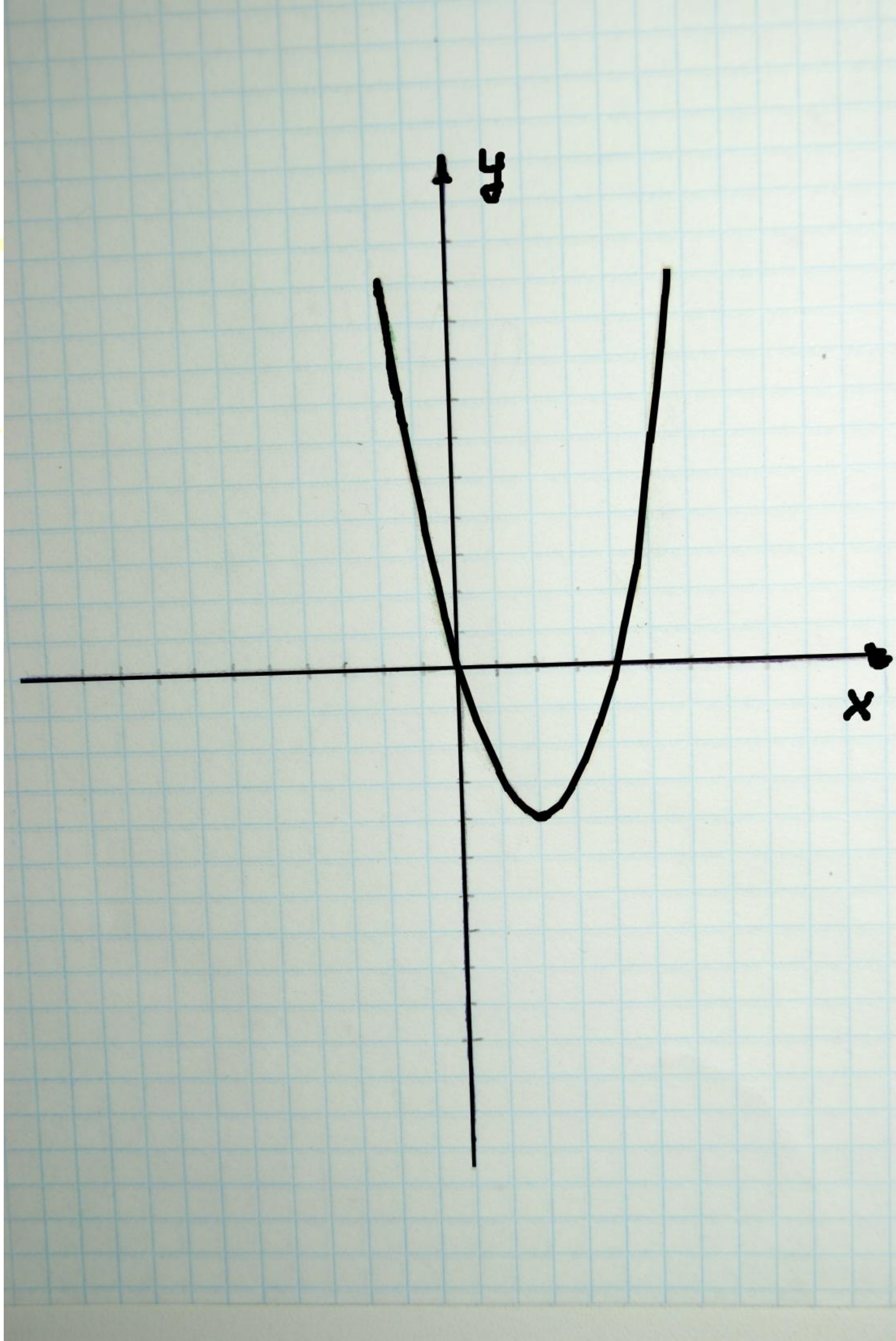
Сколько корней имеет уравнение

$$a=|x^2-4|x||?$$

1) $y=x^2-4x$

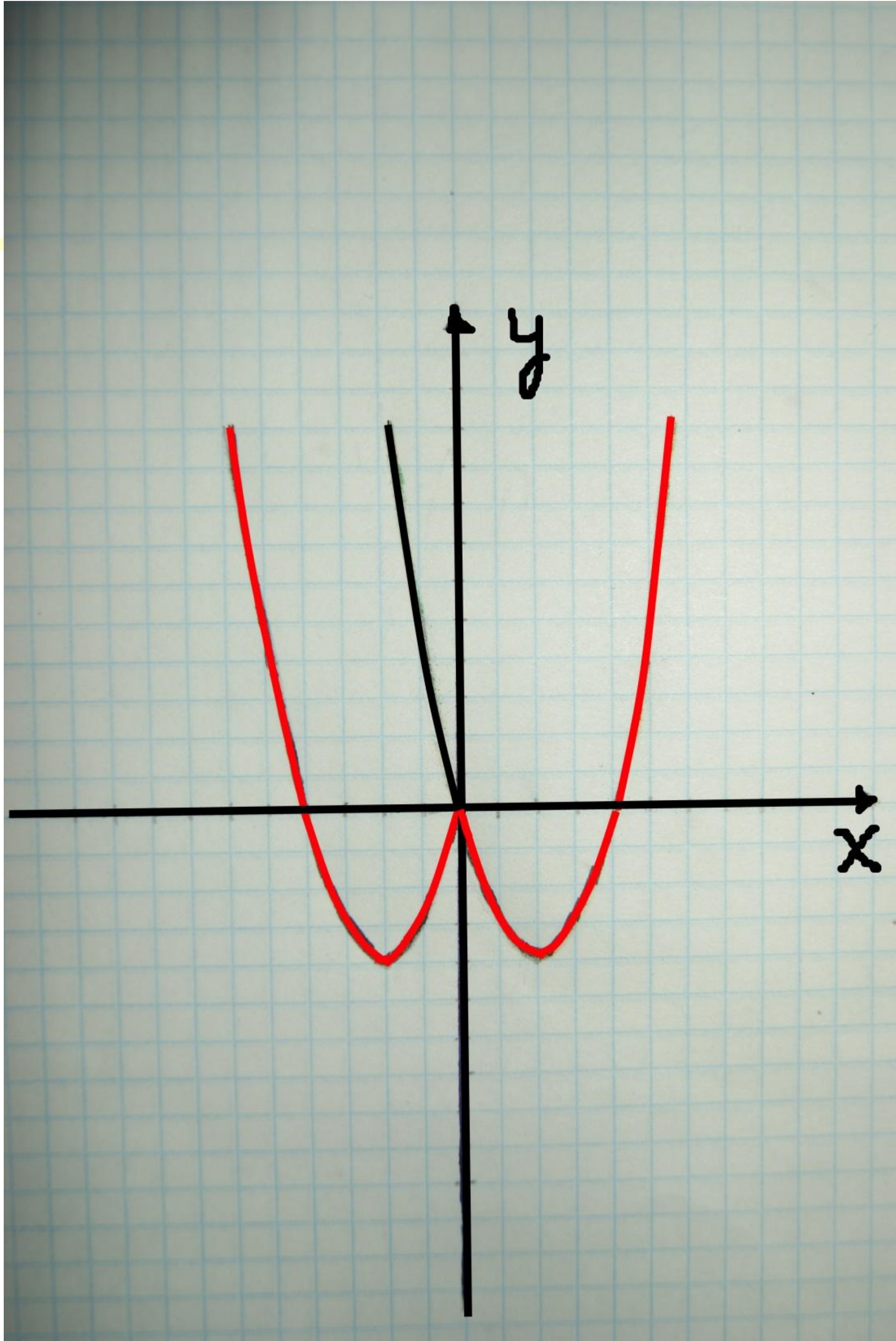
Построим график данной функции:

$x=2$; $y=-4$ (вершина)



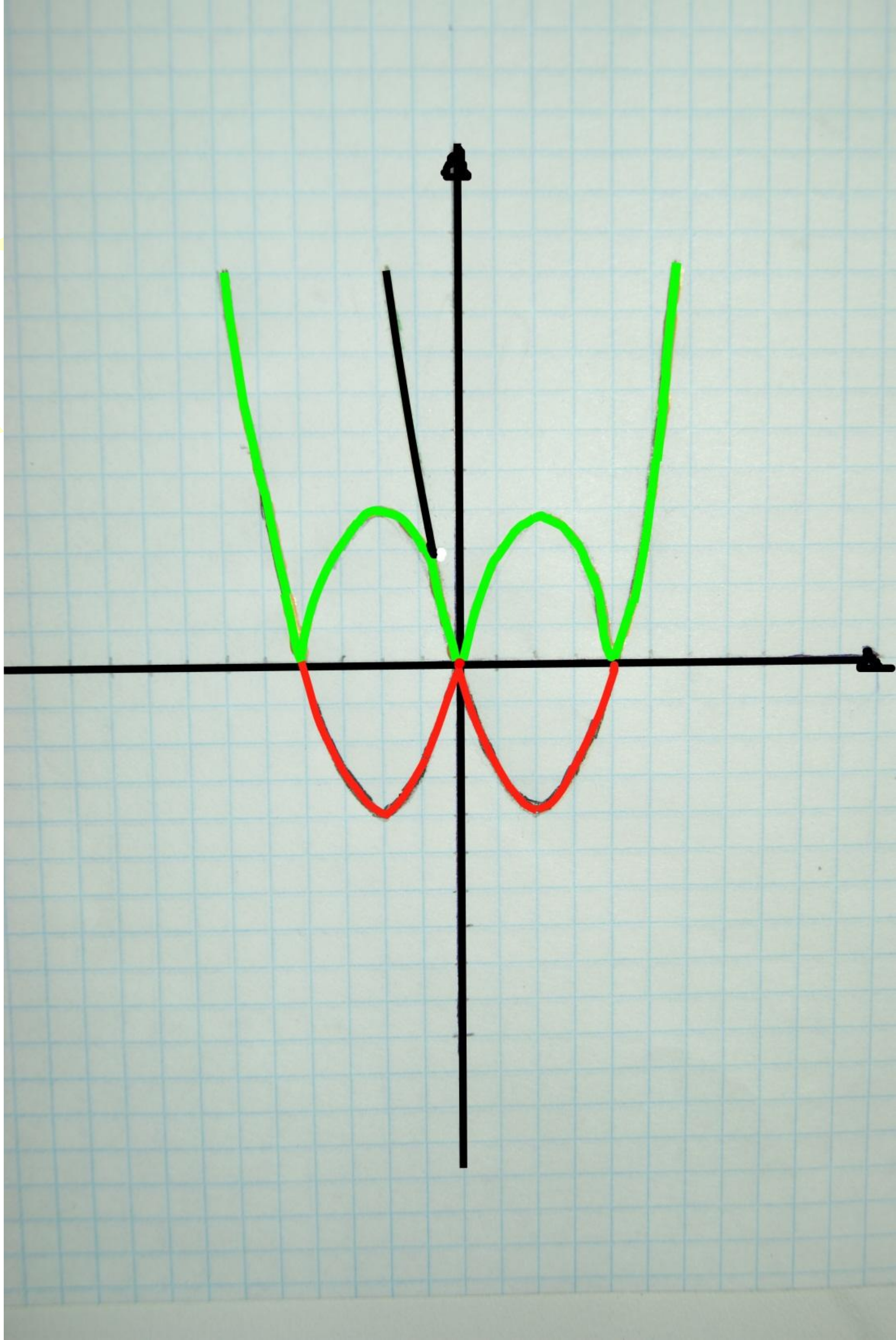
2) $y=x^2-4|x|$

Построим график данной функции.



3) $y=|x^2-4|x||$

Построим график данной функции:



Ответ:

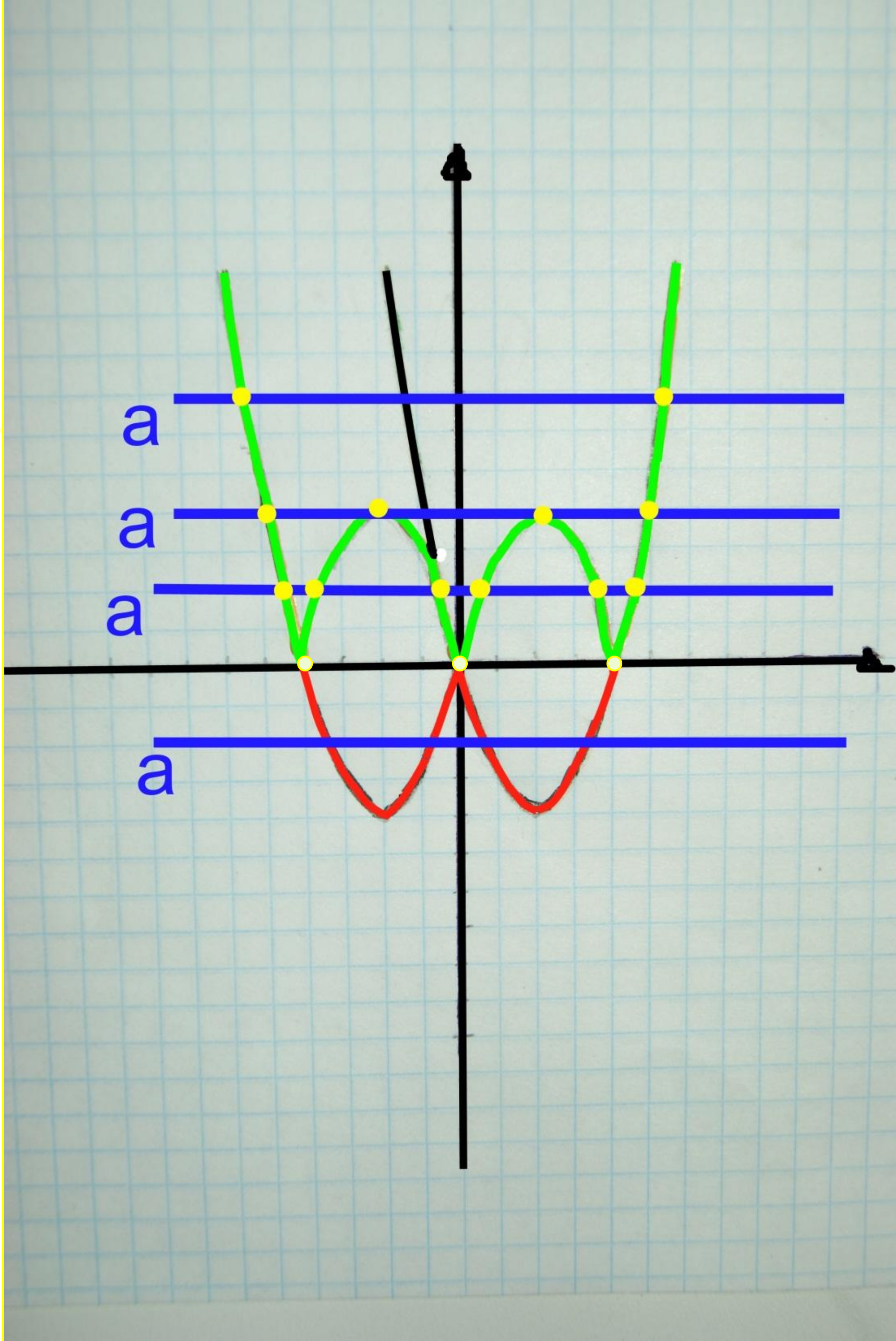
1)если а<0, то нет решений

2) если 0<а<4, то имеет 6 решений

3) если а=4, то имеет 4 решения

4) если а=0, то имеет 3 решения

5) если а>4, то имеет 2 решений



Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y| \quad ; \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \,. \end{cases}$$

имеет ровно 8 решений.

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=c^2}$ - уравнение окружности ;

(a ; b) – центр окружности; c – радиус.

$\boxed{|x|+|y|=1}$ - уравнение ромба .

1. $4(x+1)+y^2=a^2-x^2$

$(x+2)^2+y^2=a^2$

(-2 ; 0) - центр окружности;

a – радиус.

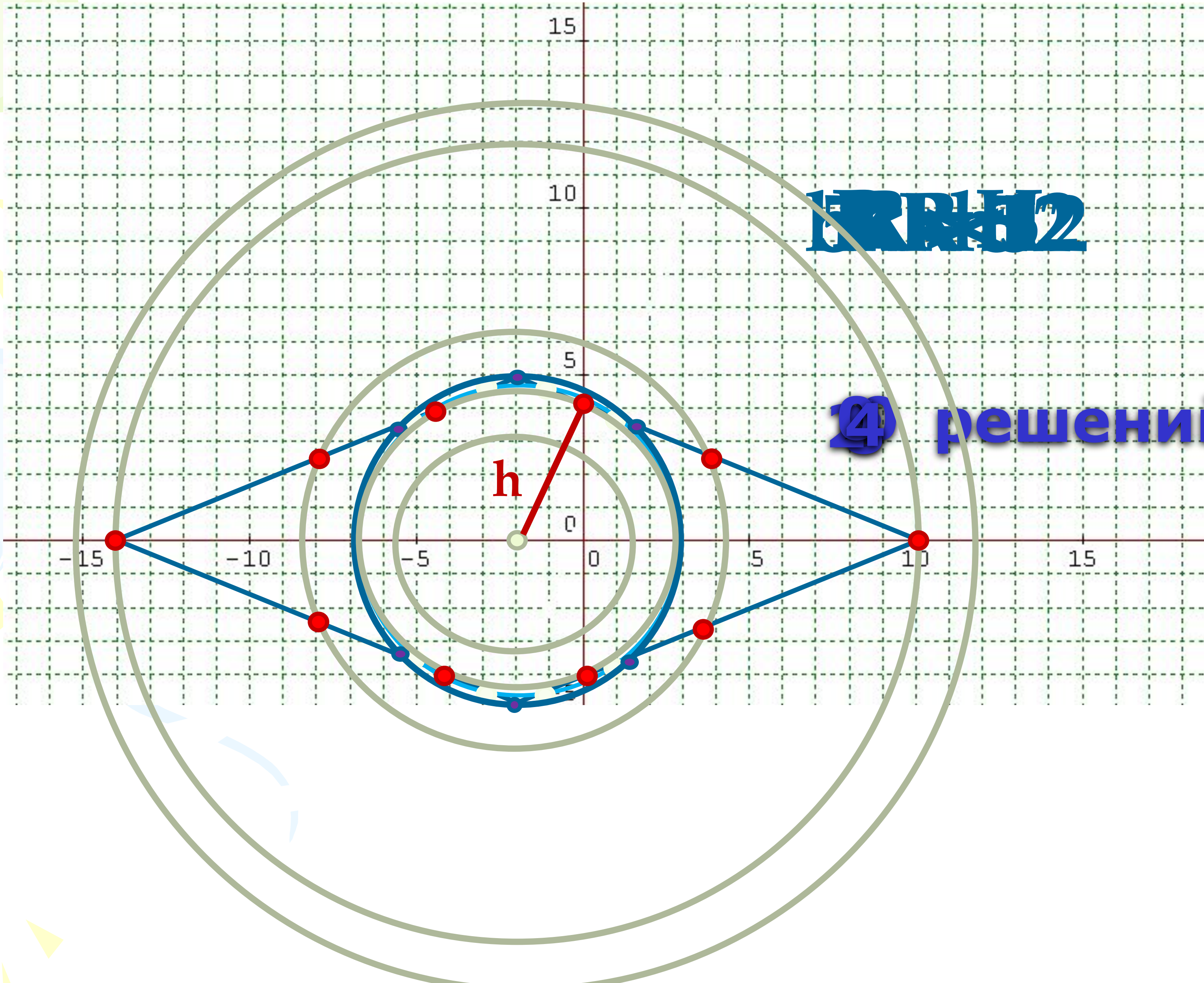
2. $5|x+2|=60-12|y|$

$5|x+2|+12|y|=60$

y = 0; x = 10; x = -14;

x = -2; y = ± 5;

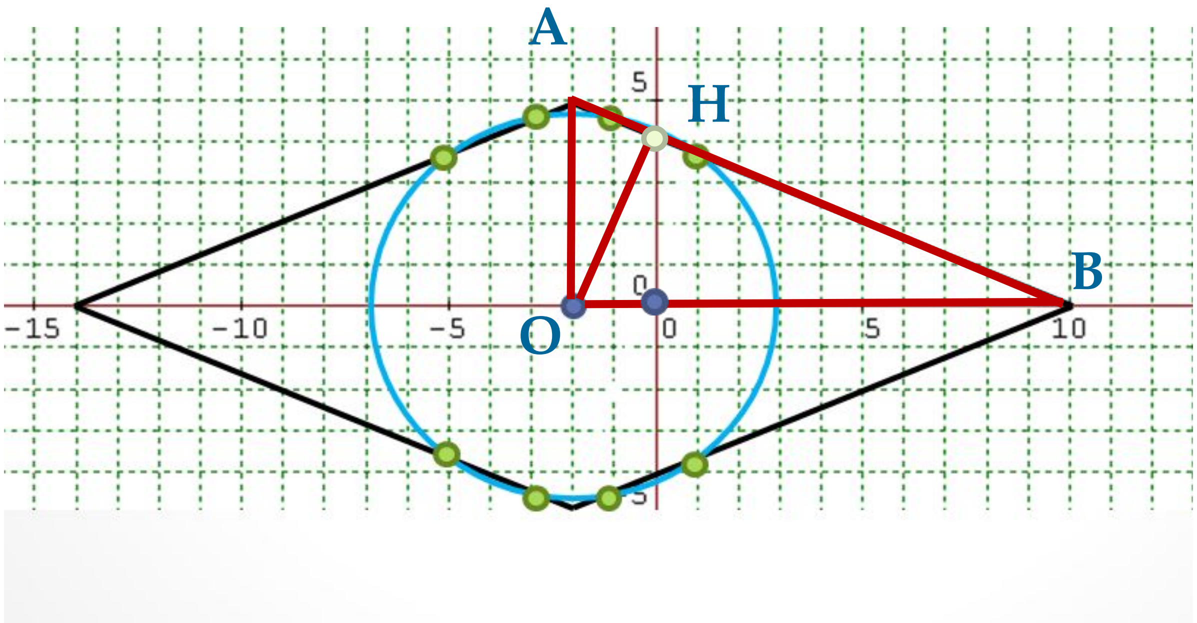
Решение системы – точки пересечения графиков.



решений

Найдите все значения *a* (параметра), для каждого из которых неравенство выполняется для всех *x* :

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$



Найдите все значения *a* (параметра), для каждого из которых неравенство выполняется для всех *x* :

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

$$f(x) = x^2 - 3\left|x - a^2\right| - 5x$$

1.Найти а при котором данная функция имеет более двух точек экстремума

2.Найдите все значения параметра а при каждом из которых функция имеет хотя бы одну точку максимума

$$f(x) = x^2 - 3\left|x - a^2\right| - 5x$$

Раскрываем модуль:

1) $x^2 - 3x + 3a^2 - 5x = x^2 - 8x + 3a^2$

При x $\geq a^2$

2) $x^2 - 3a^2 + 3x - 5x = x^2 - 2x - 3a^2$

При x $\leq a^2$

Найдем вершины парабол

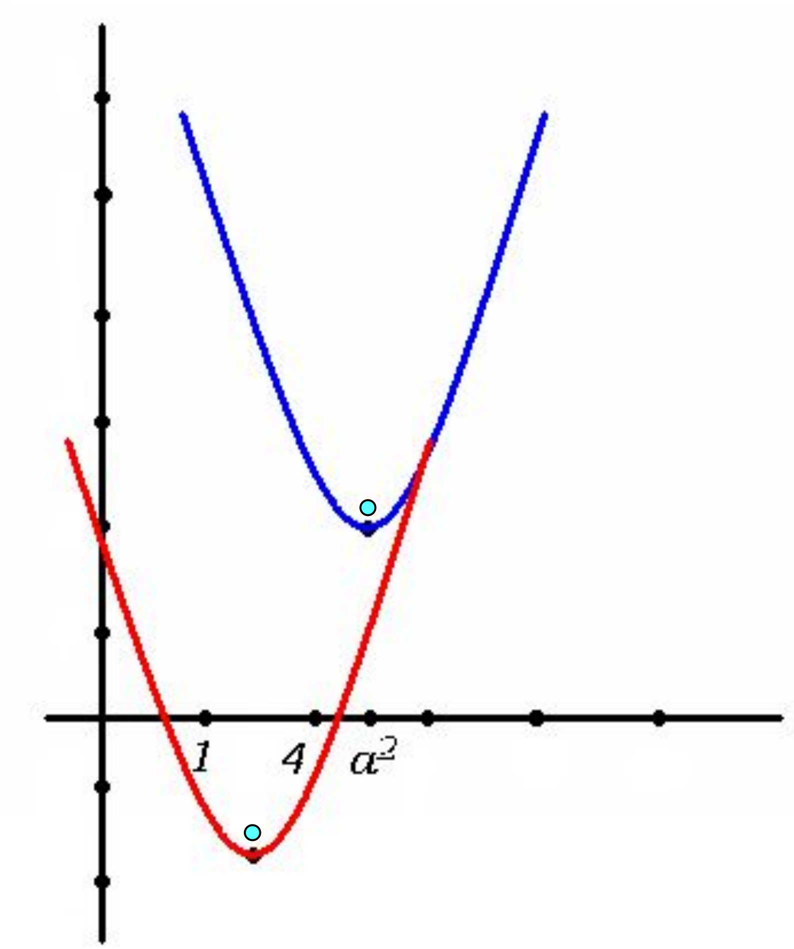
1) $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = 4$

2) $x_0 = 1$

Приравняем функции и найдем значение а

$$x^2 - 8x + 3a^2 = x^2 - 2x - 3a^2$$

$a^2 = x$



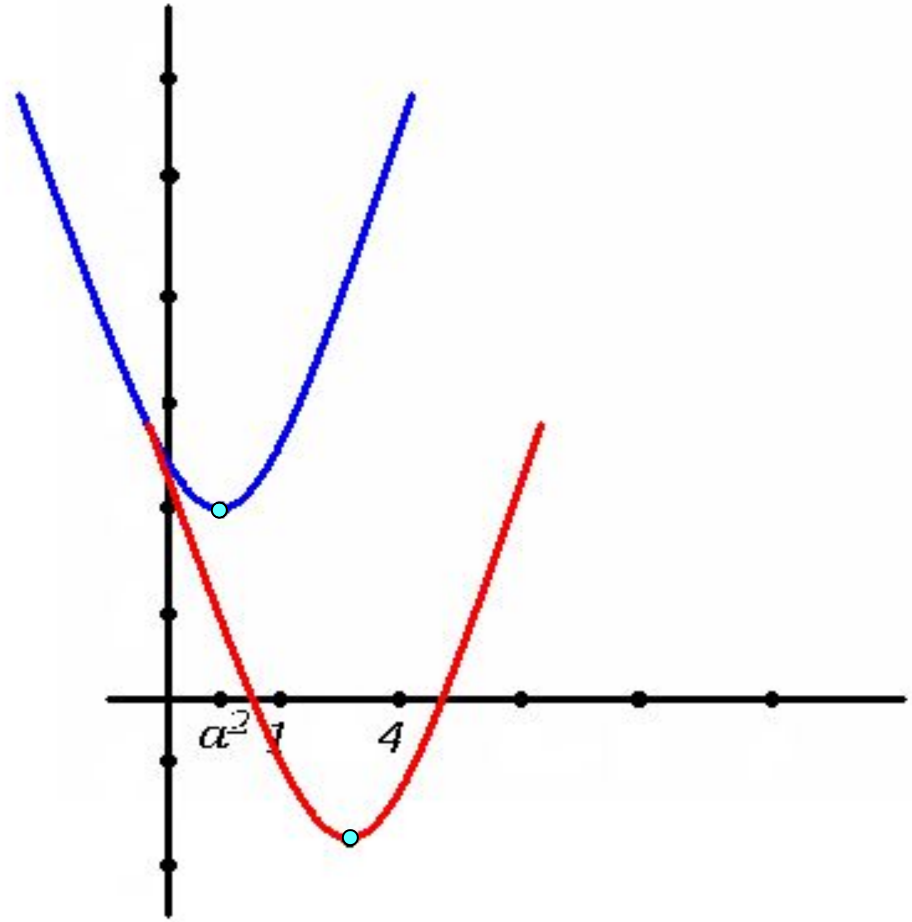
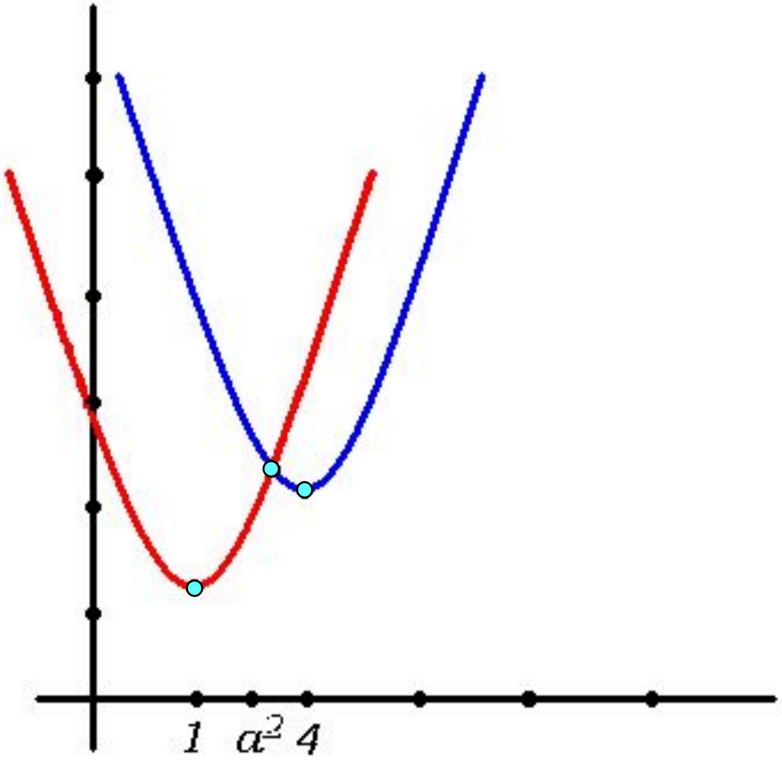


ГРАФИК ИМЕЕТ 2 ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА, НО НЕТ ТОЧЕК МАКСИМУМА



ПРИ ДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

$$1 \le a^2 \le 4$$

$$1 \le |a| \le 2$$

ФУНКЦИЯ ИМЕЕТ ТРИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА И ТОЧКУ МАКСИМУМА

ОТВЕТ: ***а принадлежит [-2;-1] и [1;2]***

Благодорим ребят:

Радимушкина Дмитрия,

Заботину Аллу,

Иванову Алину,

Клушенцову Александру,

Дорофееву Элеонору,

Сонину Маргариту,

Поводову Анастасию,

Янушевского Олега ,

ЗА ПОМОШЬ В ПОДГОТОВКЕ ПРЕЗЕНТАЦИИ.