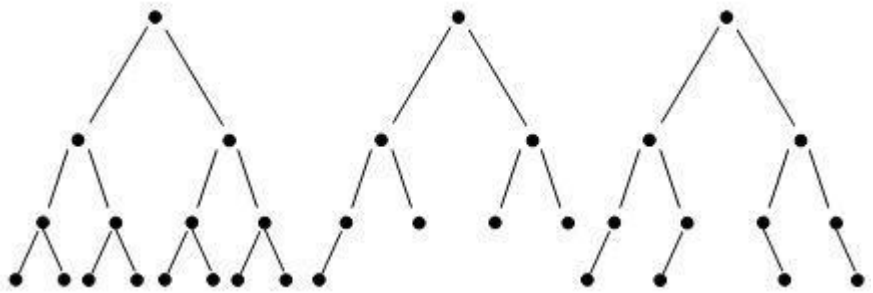
Деревья 2

Идеально сбалансированные бинарные деревья

* Бинарное дерево назовем ***идеально сбалансированным,*** если для ***каждой его вершины количество вершин в левом и правом поддереве различаются не более чем на 1.***



Теорема

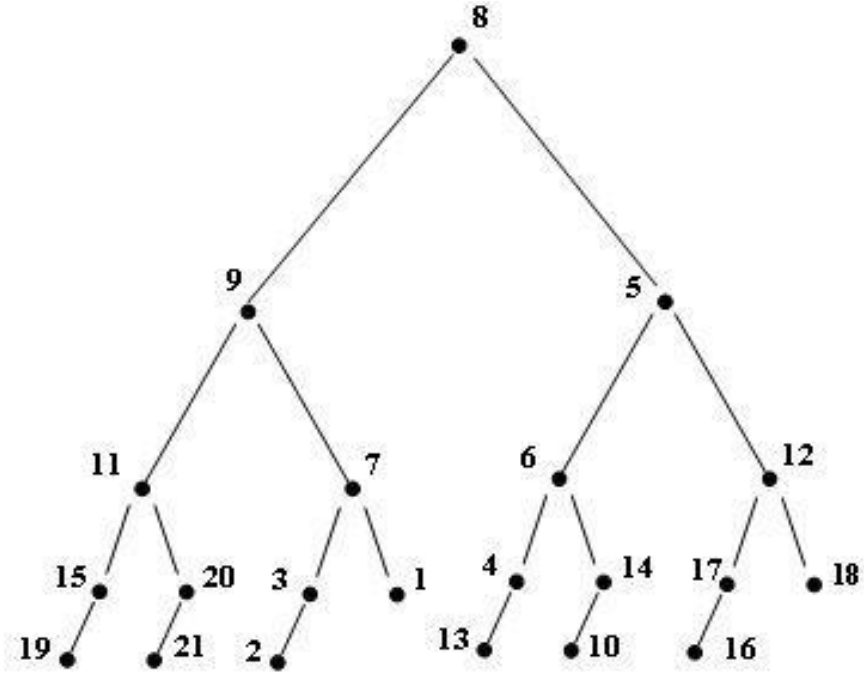
* Длина внутреннего пути в идеально сбалансированном дереве, содержащем n вершин, не превосходит величины:
* $(n+1)[\log_2 n] - 2 * 2^{[\log_2 n]} - 2$

Алгоритм построения идеально сбалансированного дерева при известном числе вершин **n**

* взять одну вершину в качестве корня.
* построить левое поддерево с **nl = n DIV 2** вершинами тем же способом.
* построить правое поддерево с **nr = n-nl-1** вершинами тем же способом.

```
node *Tree (int n, node **p)
// Построение идеально сбалансированного дерева с n вершинами.
// *p - указатель на корень дерева.
{
  node *now;
  int x,nl,nr;

  now = *p;
  if (n==0) *p = NULL;
  else
  { nl = n/2; nr = n - nl - 1; cin>>x;
    now = new(node);(*now).Key = x;
    Tree (nl,&((*now).Left)); Tree (nr,&((*now).Right)); *p = now;}
}
```


8
9
5
11
7
6
12
15
20
3
1
4
14
17
18
19
21
2
13
10
16

Балансированные по высоте деревья (АВЛ-деревья)

* Бинарное дерево поиска называется ***балансированным по высоте,*** если ***для каждой его вершины высота ее двух поддеревьев различается не более, чем на 1.*** Деревья, удовлетворяющие этому условию, часто называют ***АВЛ-деревьями*** (по первым буквам фамилий их изобретателей ***Г.М.Адельсона-Вельского*** и***Е.М. Ландиса***).
* **Показателем балансированности** вершины бинарного дерева мы будем называть ***разность высоты его правого и левого поддерева***.

Математический анализ АВЛ-деревьев

Теорема

* бозначим $\mathbf{T_h}$ - АВЛ-дерево высотой **h** с количеством узлов $\mathbf{N_h}$. Тогда

$$\log_2(N_h+1) = h+1 \le \frac{1}{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \log_2 \left\{ \frac{\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{2}(N_h+1)+9-4\sqrt{5} \right\}$$

Лемма

* Наибольшая длина ветвей **(h+1)** в АВЛ-дереве, содержащем N_h узлов, определяется неравенством

$$h+1 \le \frac{1}{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}} * \log\left[\frac{\sqrt{5}(3-\sqrt{5}}{2} * (N_h+1) + 9 - 4\sqrt{5}\right]$$

Лемма

* Наименьшая длина ветвей **(h+1)** в АВЛ-дереве, содержащем N_h узлов определяется формулой $h+1=\log_2(N_h+1)$

Теорема

* Пусть $\mathbf{T_h}$ - АВЛ-дерево высоты **h,** имеющее $\mathbf{N_h}$ узлов. Тогда для ***средней длины ветвей дерева*** $\mathbf{S_h}$ при имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$S_k \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{\log_2 N_k}{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sim 1.0422977690382 \log_2 N_k$$

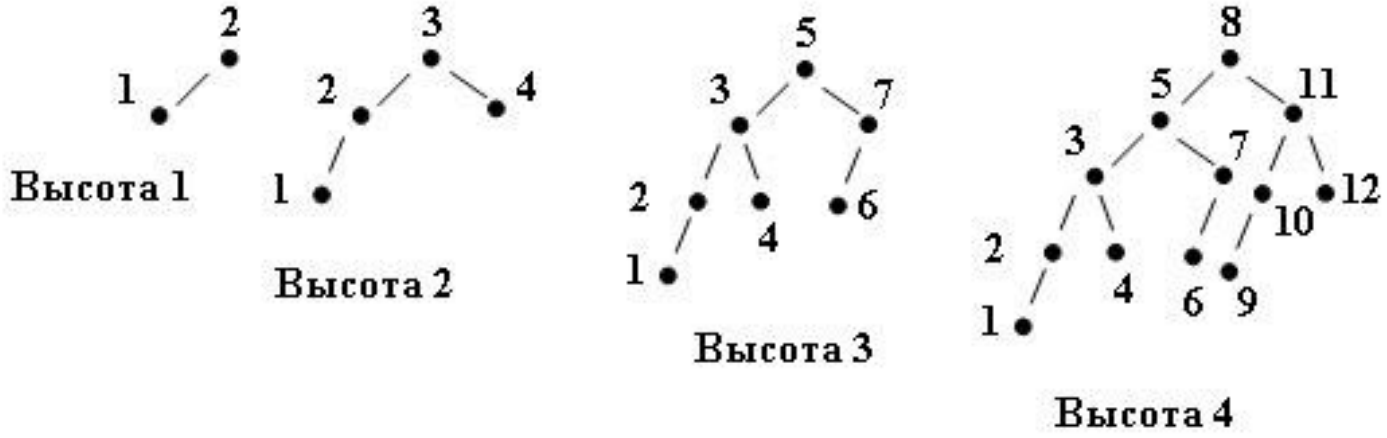
Деревья Фибоначчи

* ***Наиболее асимметричное АВЛ-дерево*** T_h *высоты* ***h*** *имеет* ***наиболее асимметричное АВЛ-дерево*** T_{h-1} ***высоты h-1*** *в качестве одного из своих поддеревьев и* ***наиболее асимметричное АВЛ-дерево*** *высоты* ***h-2*** *в качестве другого. Подобные деревья называются* ***деревьями Фибоначчи.***

Дерево Фибоначчи порядка k

* если **k=0**, то дерево Фибоначчи ***пусто***;
* если **k=1**, то дерево Фибоначчи состоит из единственного узла, ключ которого содержит 1;
* если **k >=2**, то корень дерева Фибоначчи содержит ключ F_k, левое поддерево есть ***дерево Фибоначчи порядка* k-1**, правое поддерево есть ***дерево Фибоначчи порядка* k-2** с ключами в узлах, увеличенными на F_k.
* F_k - **k**-е число Фибоначчи: $F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$, $F_6=13$,

Приммер деревьев Фибоначчи



показатель сбалансированности

* показатель сбалансированности узла = = высота **правого** поддерева - высота ***левого*** поддерева**.**

Балансированные по весу деревья (WB-деревья)

* Класс бинарных деревьев, в которых ограничения на высоты поддеревьев заменено ограничением на число вершин в поддеревьях.
* От АВЛ-деревьев **WB**-деревья отличаются тем, что содержат параметр, который может изменяться так, что можно произвольно ограничивать длину самого длинного пути из корня в висячую вершину за счет увеличения дисбаланса.

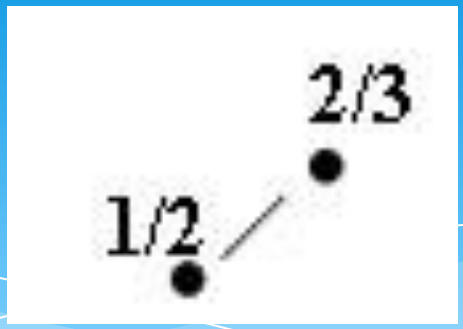
* ***Корневым балансом*** $b(T_n)$ ***бинарного дерева*** $T_n=(T_l,v,T_r)$ называется величина

$$b(T_n)=\frac{n_l+1}{n+1},\ n >= 1$$

$$0 < b(T_n) < 1$$

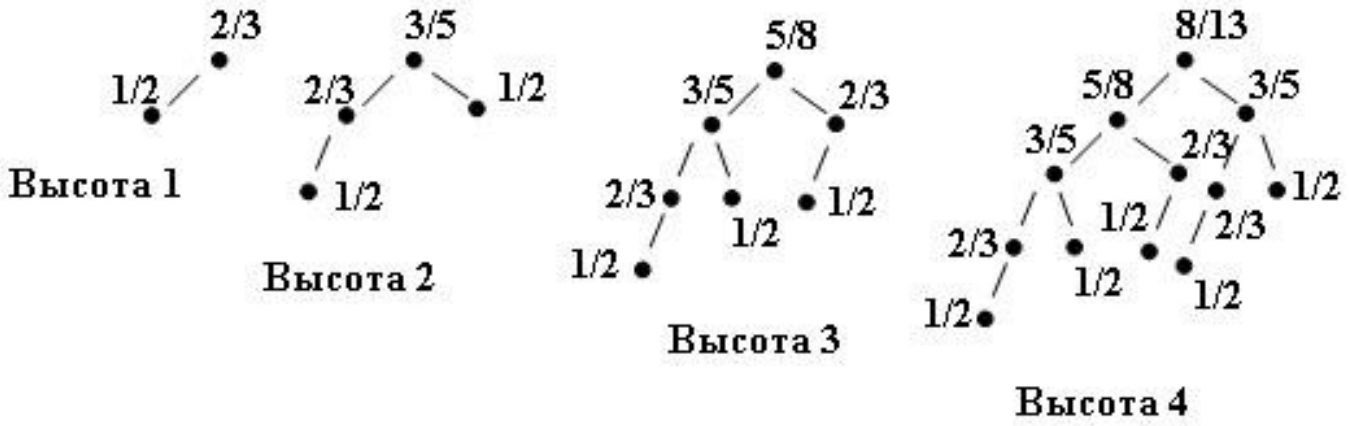
Определение

* ***Дерево T_n называется балансированным по весу с балансом A, 0< A < 1/2,*** если оно удовлетворяет следующим условиям:
* **A <= b(T_n) <= 1 - A;**
* **T_l, T_r - *балансированные по весу деревья с балансом A.***



* Класс бинарных деревьев с балансом **A** - **WB[A]**.
* Пустое бинарное дерево T_0, по определению, входит в **WB[A]** для любого **A**.
* Класс **WB[A]** становится все более ограниченным по мере того, как **A** меняется от 0 до 1/2.
* **Случай 1/2**
* либо левое и правое поддеревья каждой вершины содержат одинаковое число вершин, поэтому классу **WB[1/2]** принадлежат полностью балансированные деревья с $n=2^k-1$ вершинами,
* Либо см. рисунок

Деревья Фибоначчи



Теорема

* Высота дерева $\mathbf{T_n}$ из класса **WB[A]** не превышает

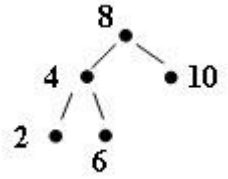
$$\frac{\log_2(n+1)-1}{\log_2\frac{1}{1-A}}$$

высота дерева Фибоначчи не превышает $\mathbf{\log_2(n+1)-1}$

Алгоритмы балансировки

Включение в сбалансированное дерево новой вершины

* сначала было $h_L = h_R$. После включения **L** и **R** станут разной высоты, но критерий сбалансированности не будет нарушен;
* сначала было $h_L < h_R$. После включения **L** и **R** станут равной высоты, то есть критерий сбалансированности даже улучшится;
* сначала было $h_L > h_R$. После включения критерий сбалансированности нарушится и дерево необходимо перестраивать.



```
struct node
 {
   int Key;
   int Count;
   int bal; // Показатель балансированности вершины.
   node *Left;
   node *Right;
 };
```

Определение

* Показатель сбалансированности вершины = ***разность между высотой правого и левого поддерева***

* Проход по дереву, чтобы убедиться, что включаемого значения в дереве нет;
* включение новой вершины и определение результирующего показателя сбалансированности;
* "отступление" по пути поиска и проверка в каждой вершине показателя сбалансированности. При необходимости - балансировка.

Однократный LL-поворот

* p1 = (*p).Left;
* (*p).Left = (*p1).Right;
* (*p1).Right = p;
* (*p).bal = 0;
* p = p1;

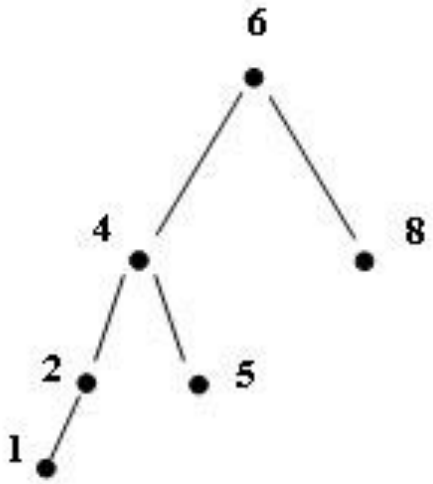
LL-поворот

* p1 = (*p).Left;
* (*p).Left = (*p1).Right;
* (*p1).Right = p;
* (*p).bal = 0;
* p = p1;

RR-поворот

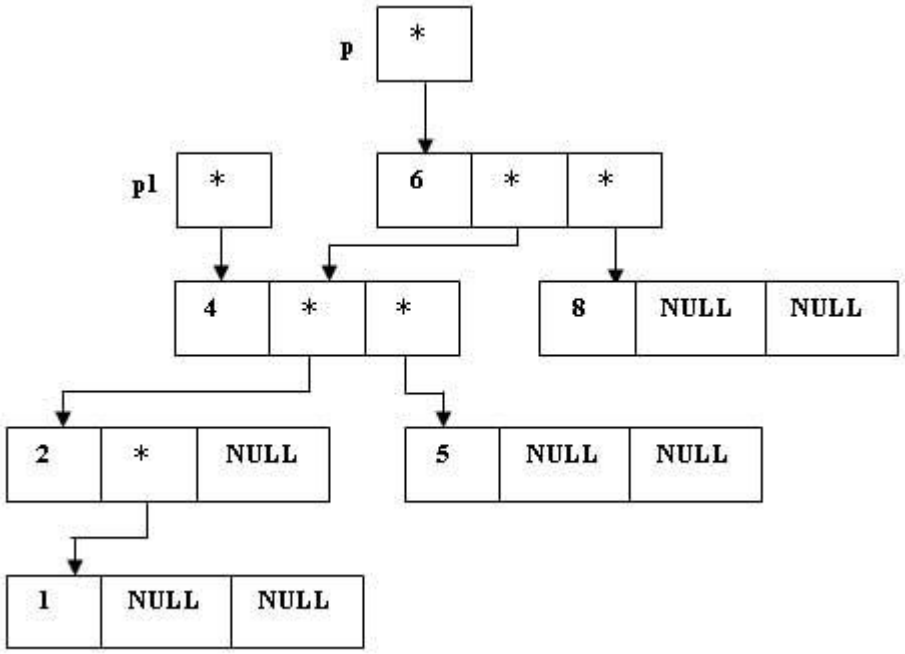
* p1 = (*p).Right;
* (*p).Right = (*p1).Left;
* (*p1).Left = p;
* (*p).bal = 0;
* p = p1;

Исходное дерево



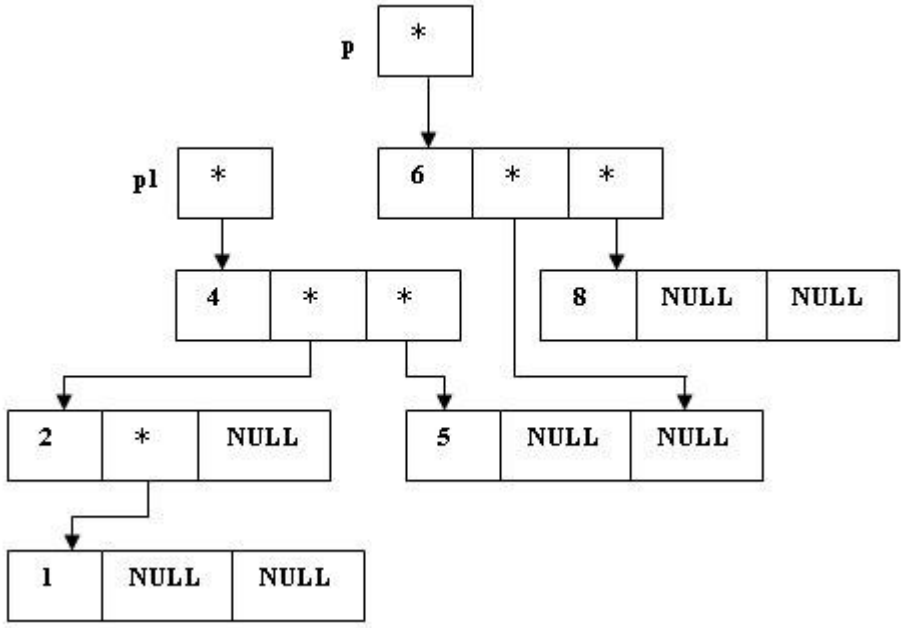
Сохранение адреса нового корня дерева

* p1 = (*p).Left;



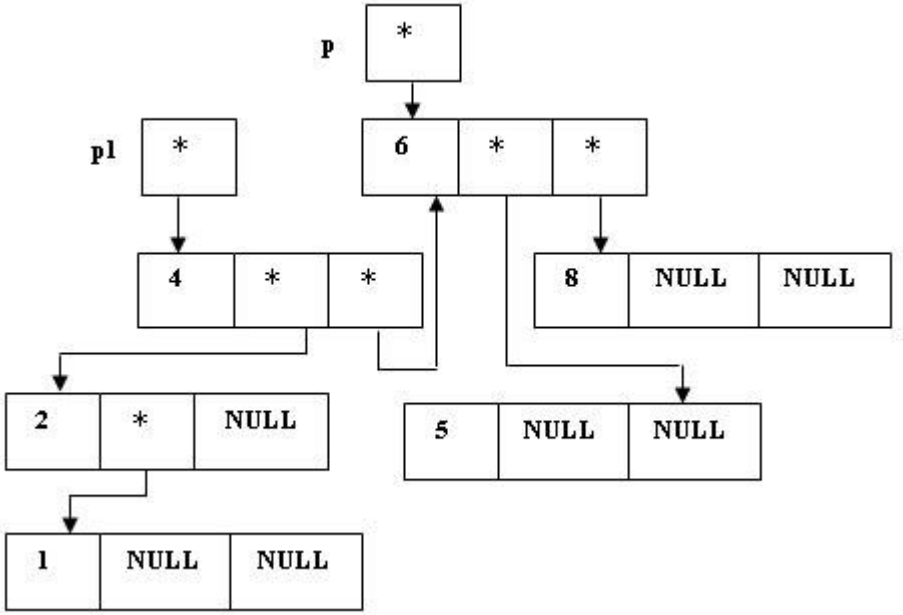
Переприкрепление

* (*p).Left = (*p1).Right;



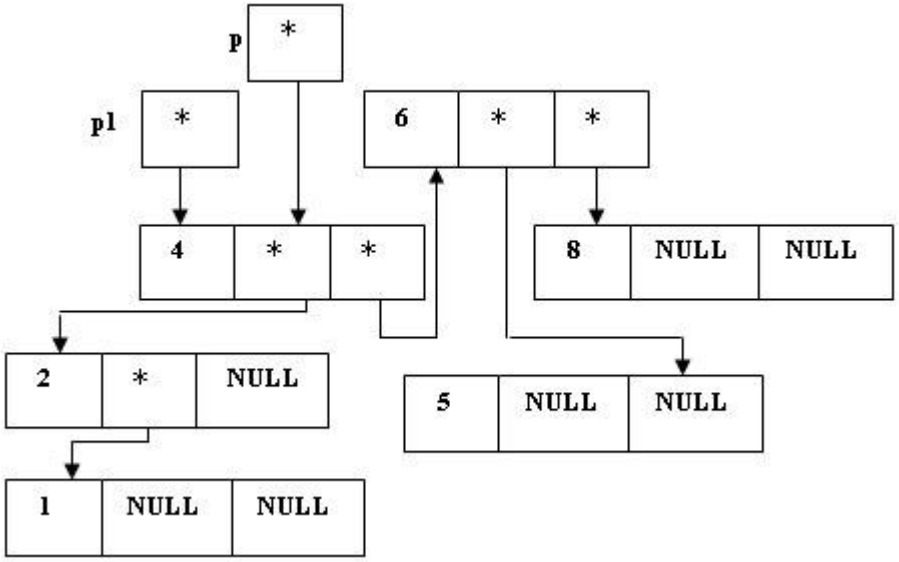
Определение правого поддерева "нового" корня

* (*p1).Right = p;

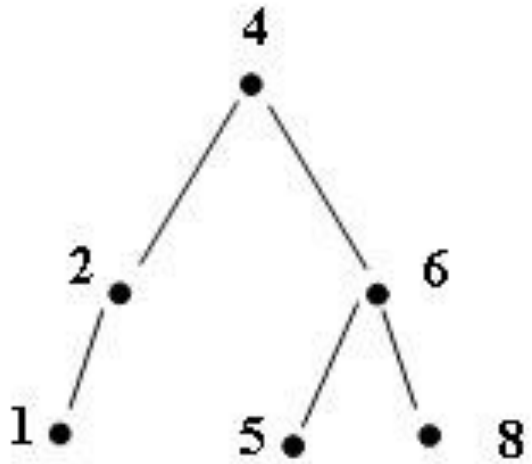


Установка начальных значений

* (*p).bal = 0;
* p = p1;
*



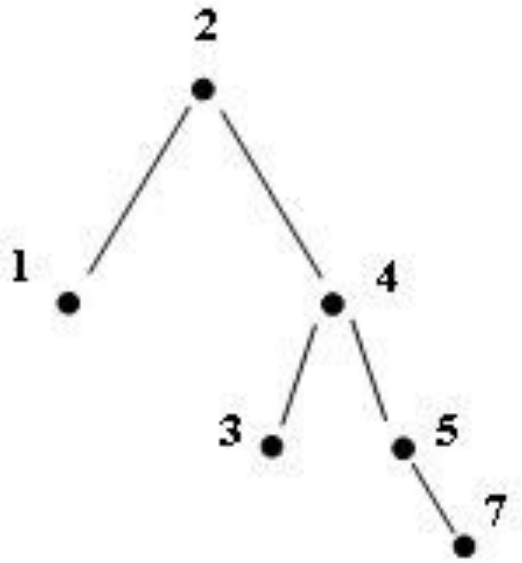
Результирующее дерево



Однократный RR-поворот

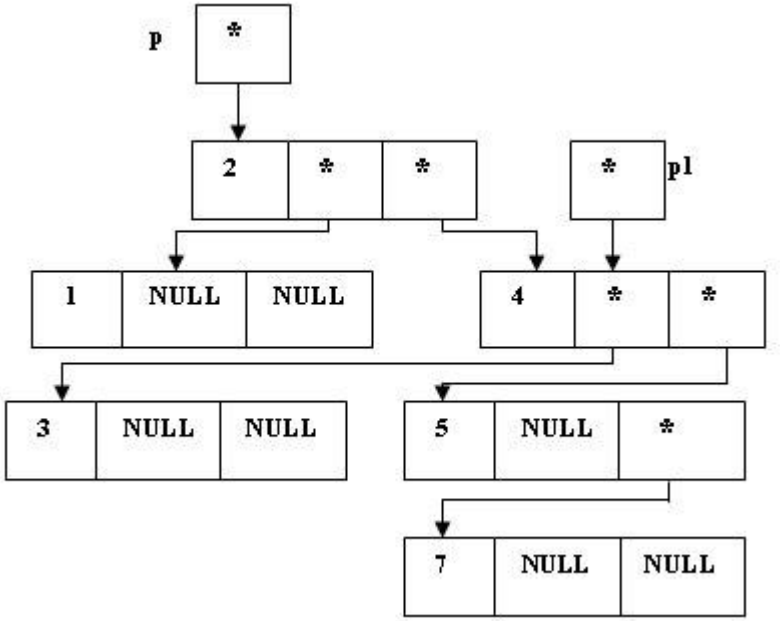
* p1 = (*p).Right;
* (*p).Right = (*p1).Left;
* (*p1).Left = p;
* (*p).bal = 0; p = p1;

Исходное дерево



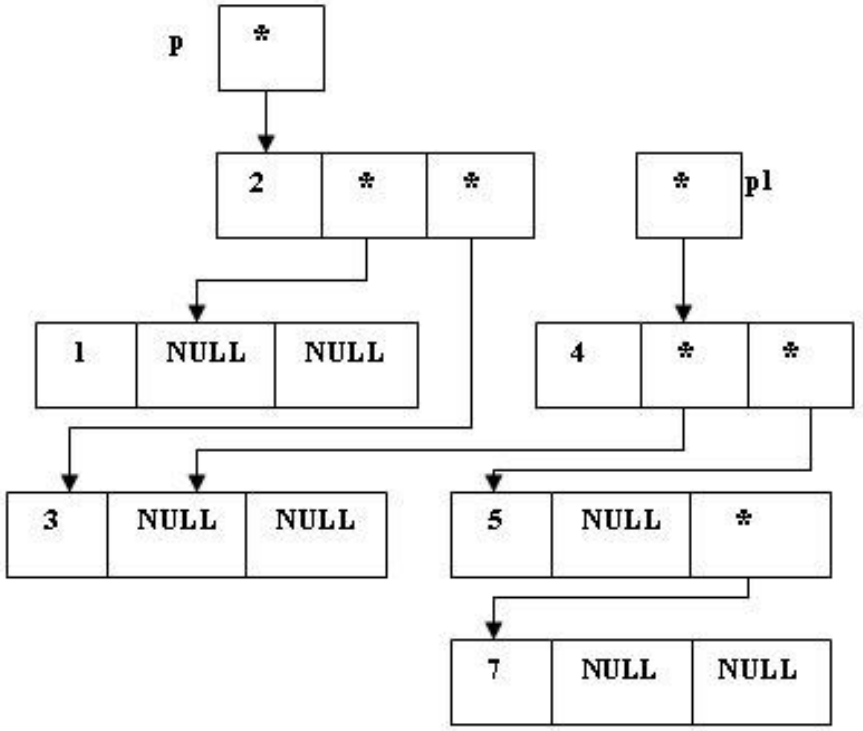
Сохранение адреса нового корня дерева

* p1 = (*p).Right;



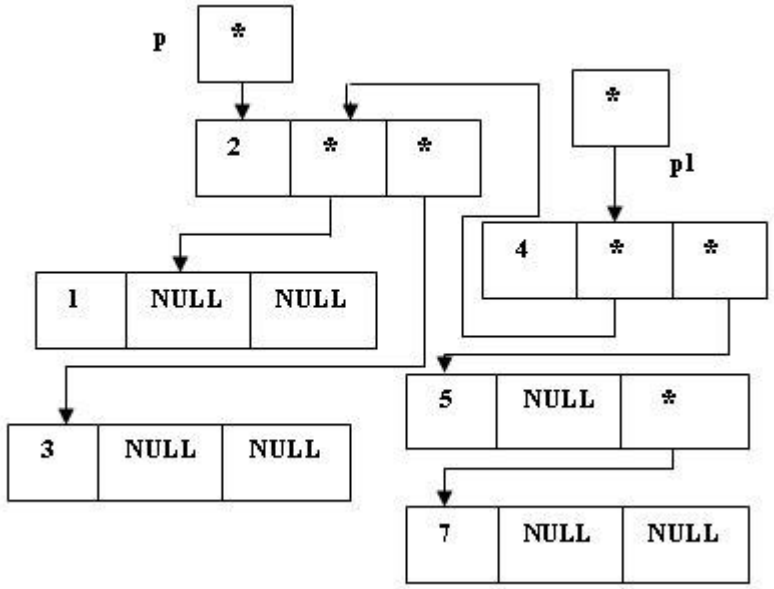
Переприкрепление

* (*p).Right = (*p1).Left;



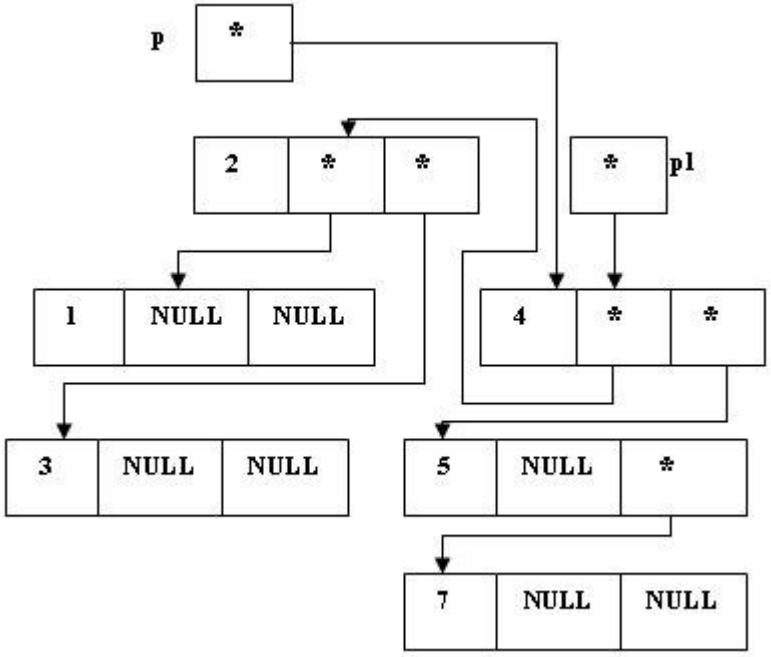
Определение левого поддерева "нового" корня

* (*p1).Left = p;

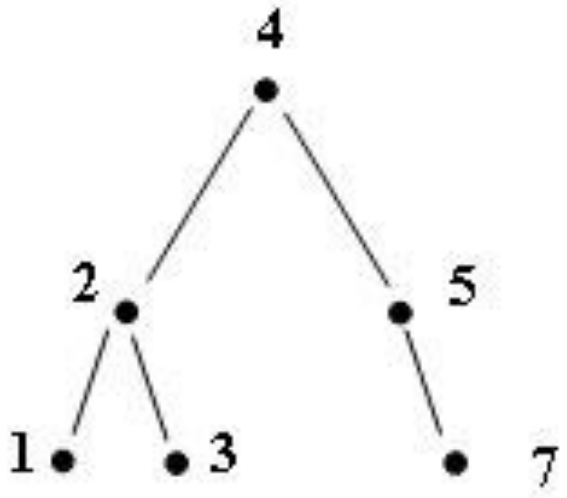


Установка начальных значений

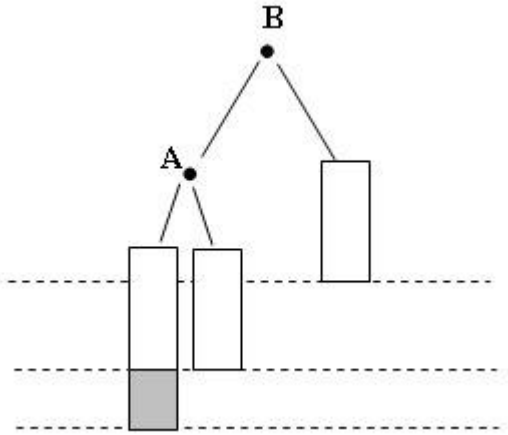
* (*p).bal = 0; p = p1;

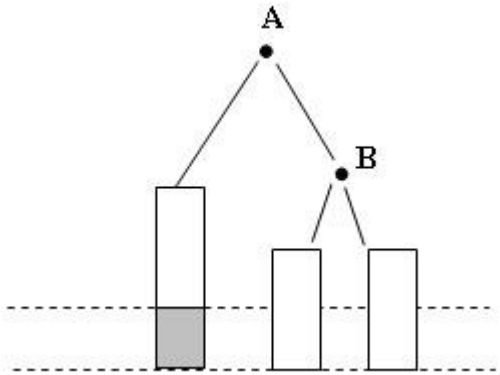


Результирующее дерево



* Если после вставки показатели сбалансированности вершин имеют одинаковый знак и отличаются только на единицу, то восстановить баланс дерева можно ***однократным поворотом*** (включая одно "переприкрепление" поддерева), при этом вставка не будет оказывать влияния на другие участки дерева.

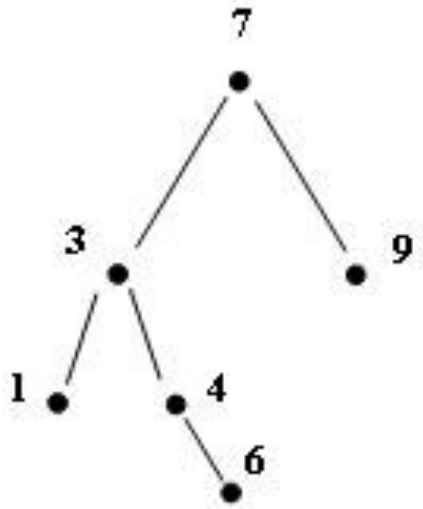

B
A


A
B

Двукратный LR-поворот

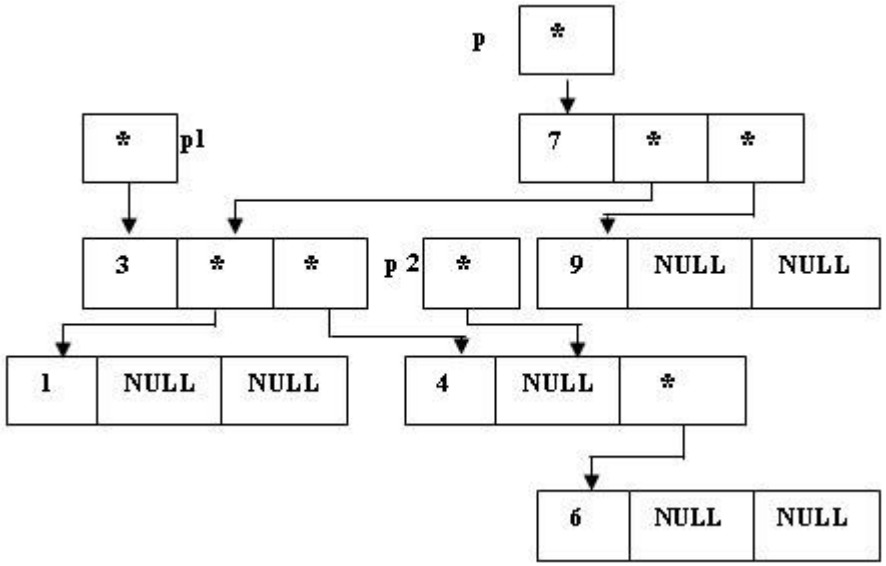
```
p1 = (*p).Left;
p2 = (*p1).Right;
   (*p1).Right = (*p2).Left;
(*p2).Left = p1;
   (*p).Left = (*p2).Right;
(*p2).Right = *p;
   p = p2;
```

Исходное дерево



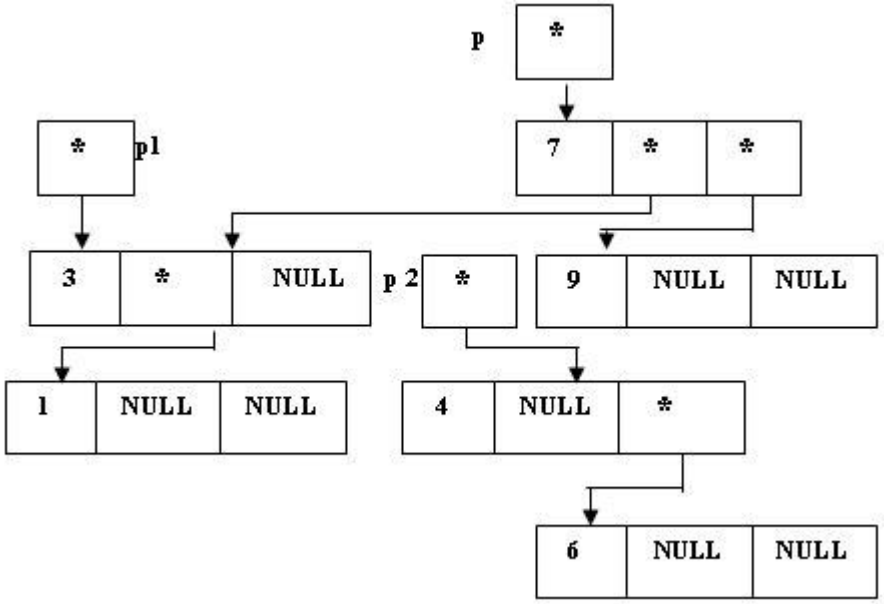
Определение **p1** и **p2**

* p1 = (*p).Left; p2 = (*p1).Right;



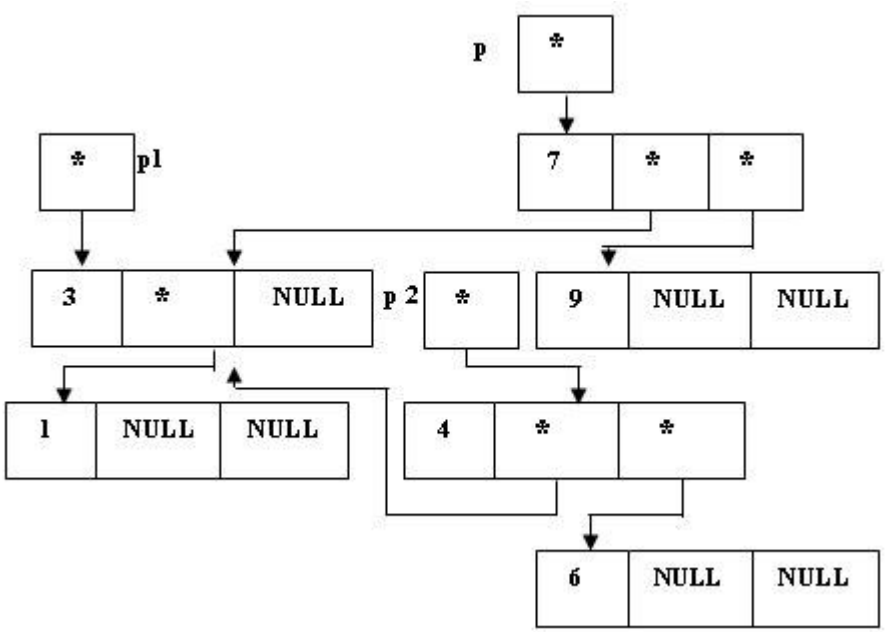
Переприкрепление

* (*p1).Right = (*p2).Left;



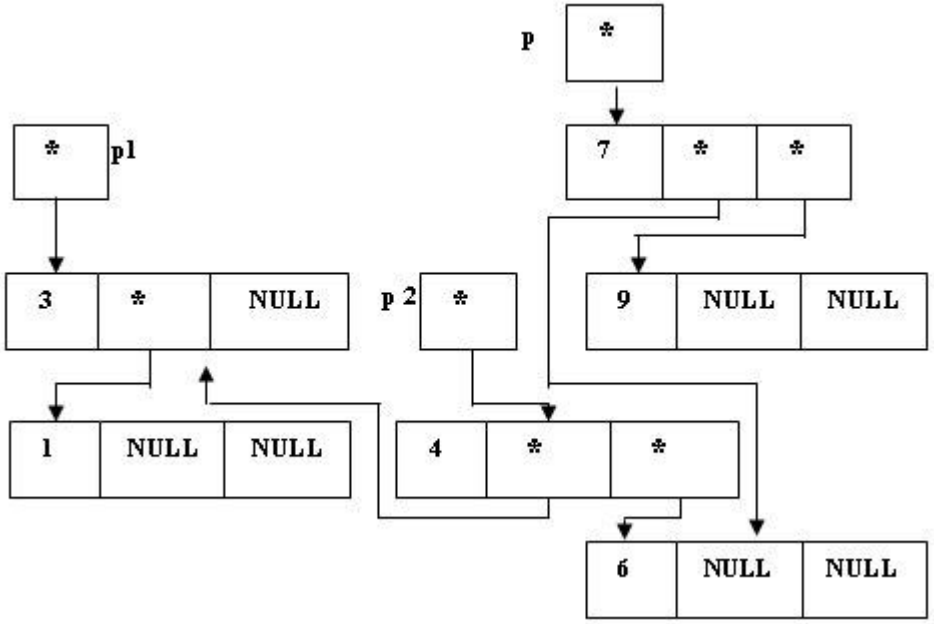
Определение левого поддерева "нового" корня

* (*p2).Left = p1;



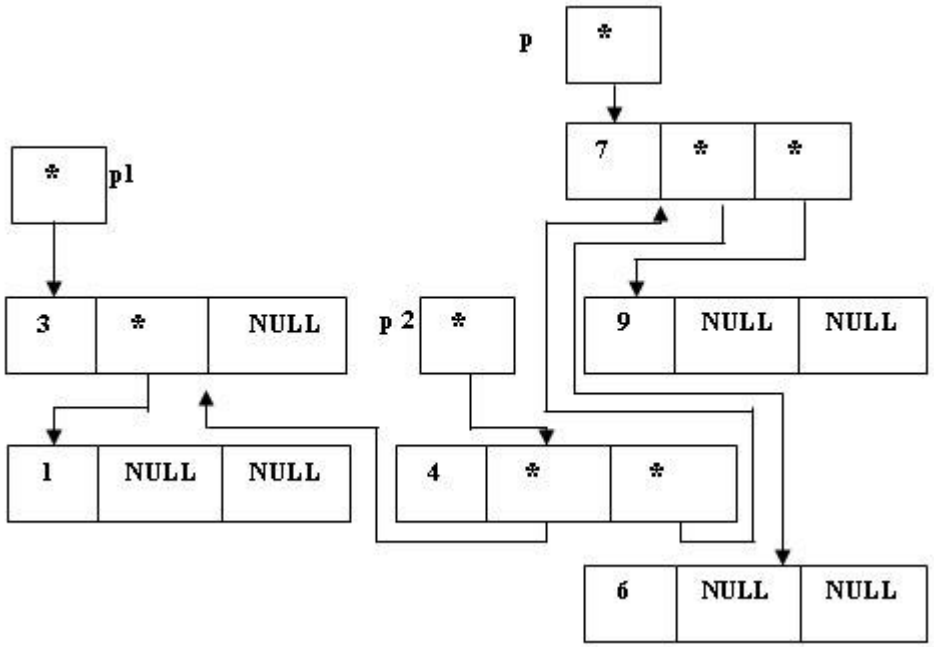
Переприкрепление

* (*p).Left = (*p2).Right;



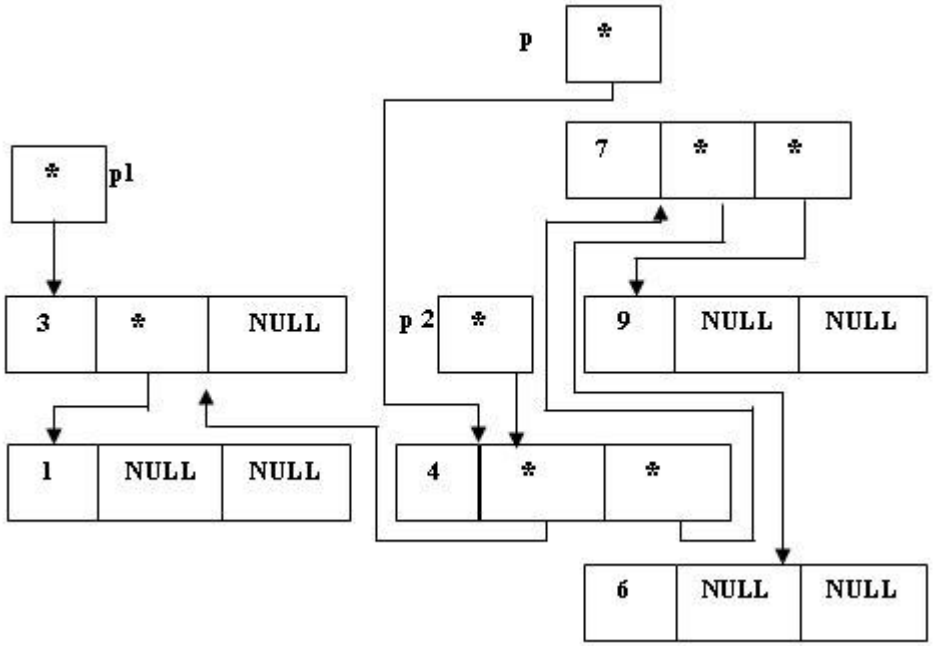
Определение правого поддерева "нового" корня

* (*p2).Right = *p;

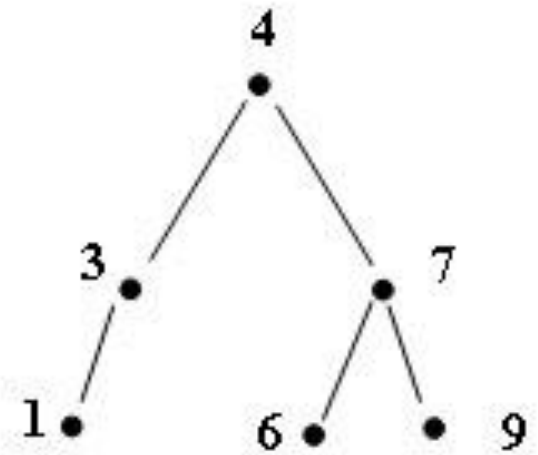


Установка начальных значений

* p = p2;



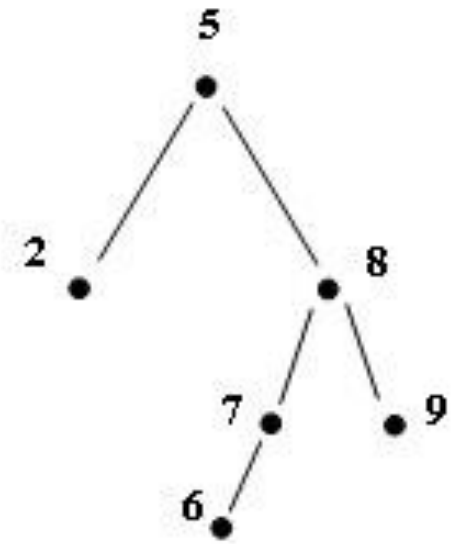
Результирующее дерево



Двукратный RL-поворот

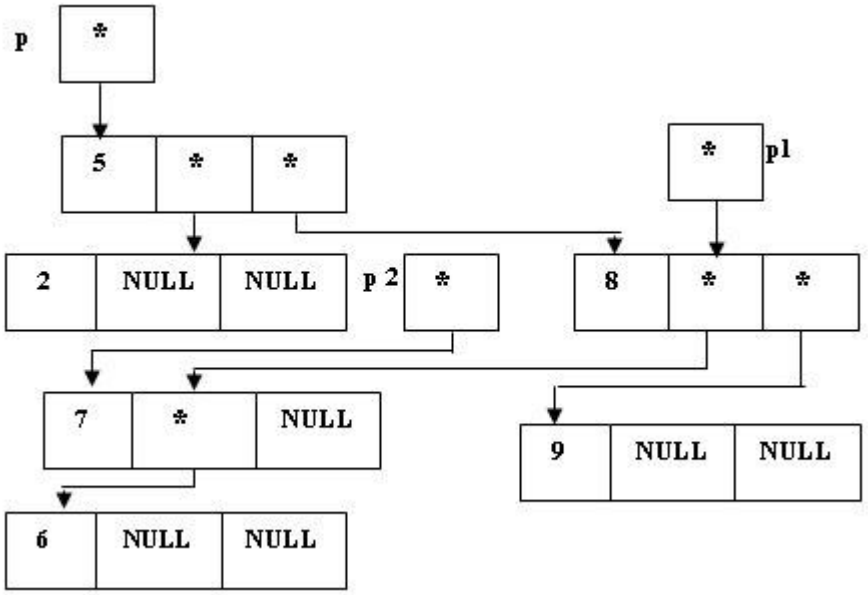
* p1 =(*p).Right; p2 = (*p1).Left;
* (*p1).Left = (*p2). Right; (*p2). Right = p1;
* (*p).Right = (*p2). Left; (*p2). Left = *p;
* p = p2;

Исходное дерево



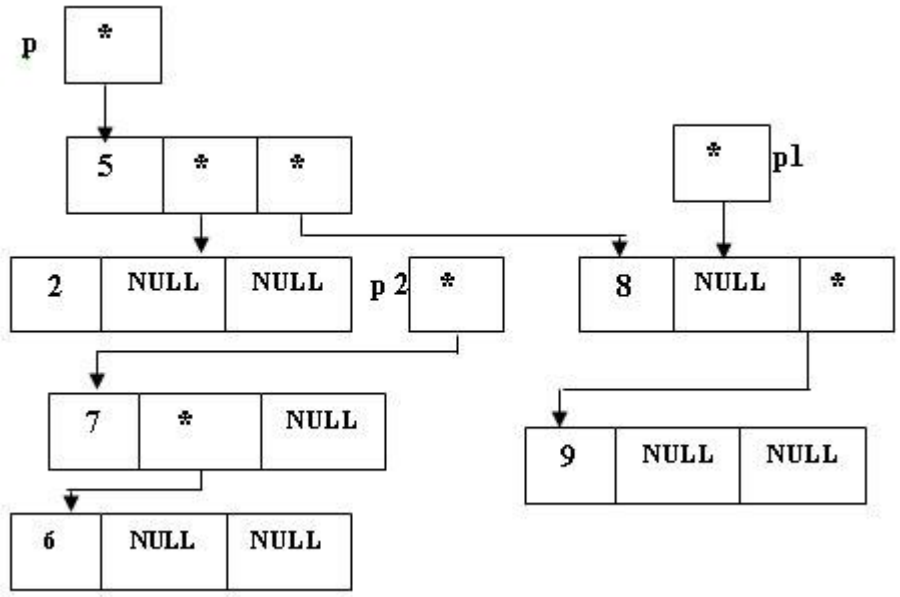
Определение p1 и p2

* p1 = (*p).Right; p2 = (*p1).Left;



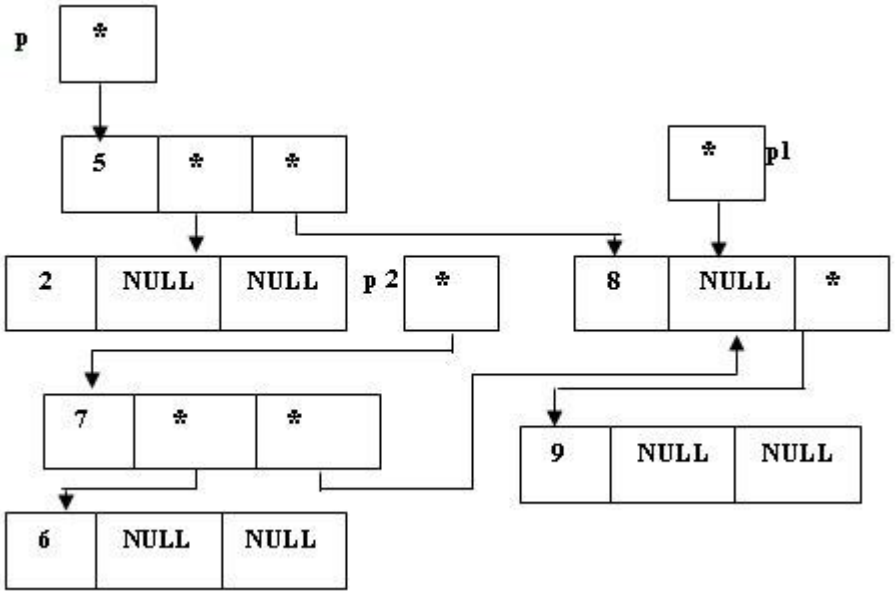
Переприкрепление

* (*p1).Left = (*p2). Right;



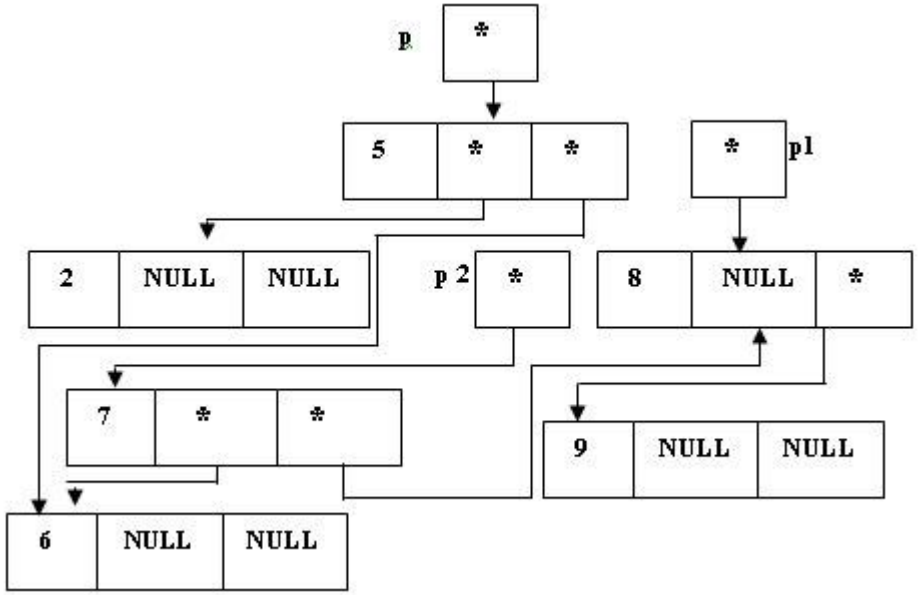
Определение правого поддерева "нового" корня

* (*p2). Right = p1;



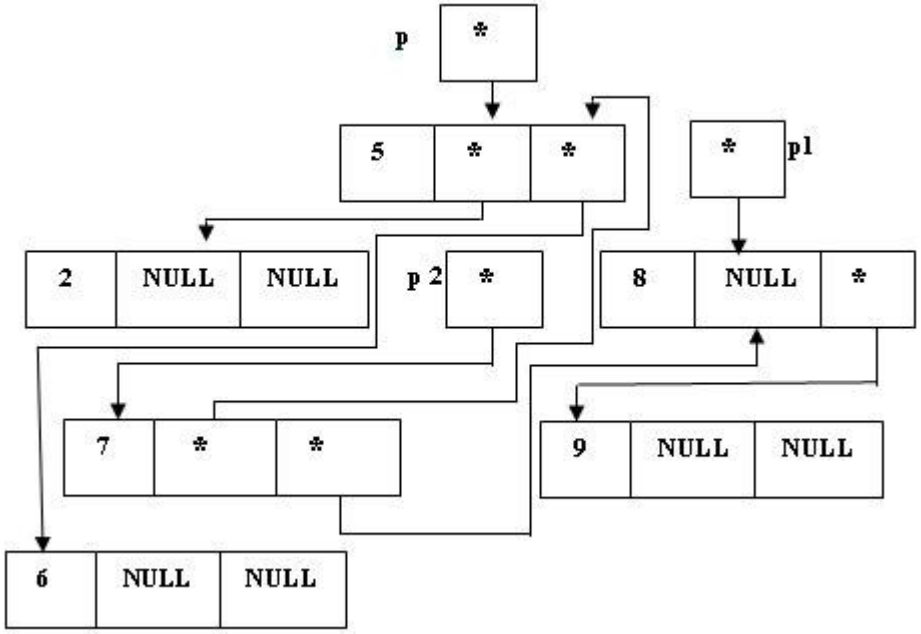
Переприкрепление

* (*p).Right = (*p2). Left;



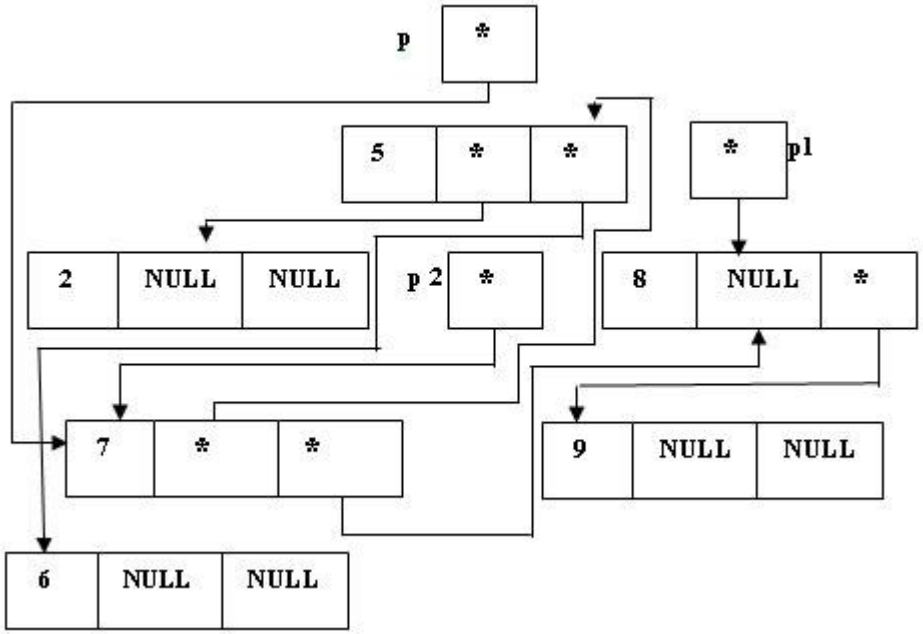
Определение правого поддерева "нового" корня

* (*p2). Left = *p;

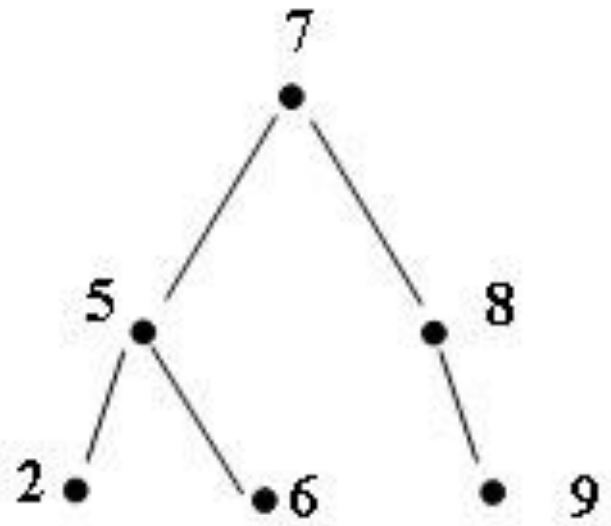


Установка начальных значений

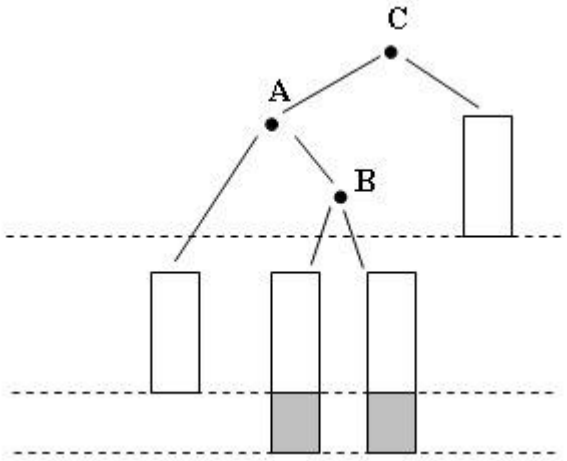
* p = p2;

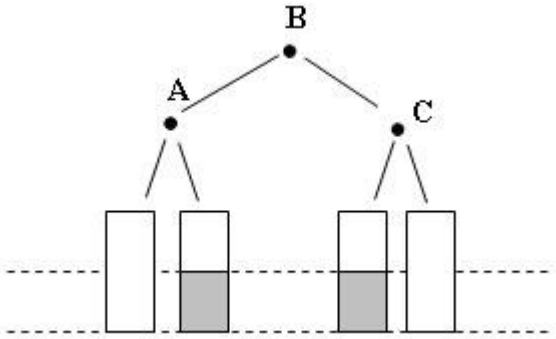


Результирующее дерево

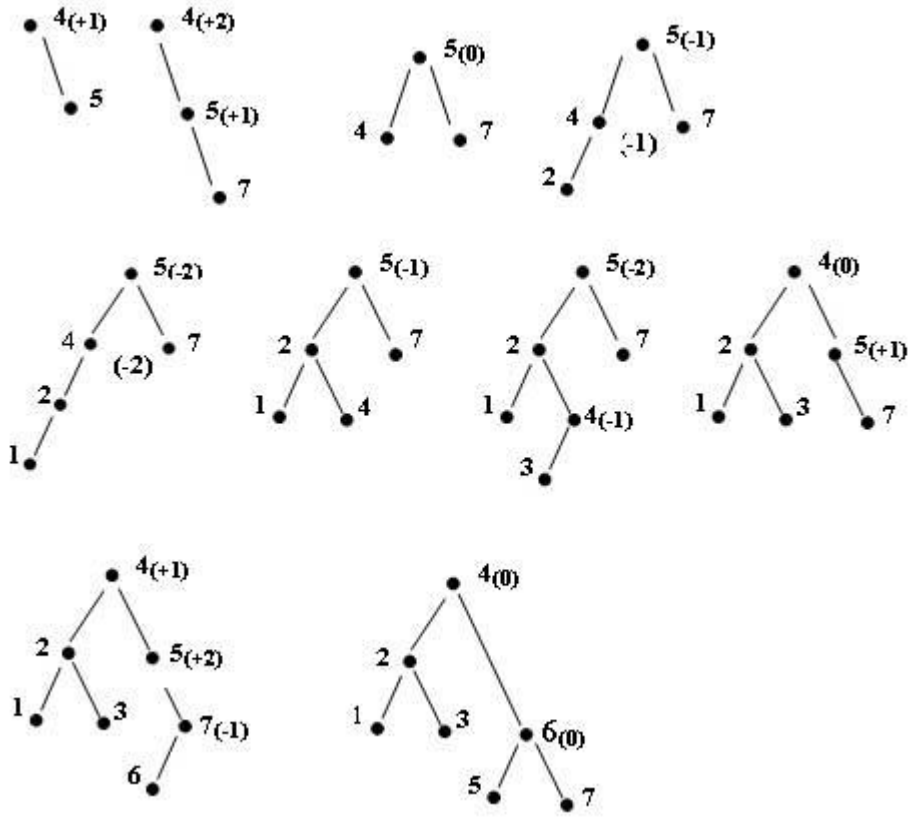


* Если после вставки показатели сбалансированности имеют разный знак, то можно восстановить баланс дерева ***двухкратными поворотами трех вершин.*** В этом случае вставка также не оказывает влияния на другие участки дерева


C
A
B


B
A
C

Построение AVL дерева



* http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%92%D0%9B-%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BE
* http://www.proteus2001.narod.ru/gen/txt/6/avl.html
* http://habrahabr.ru/post/150732/