

# Ширгина Светлана Анатольевна



Учитель математики  
МБОУ СОШ № 58  
г. Нижнего Новгорода

Образование - высшее  
НГПУ им Горького  
Педагогический стаж - 19 лет  
Категория - первая



---

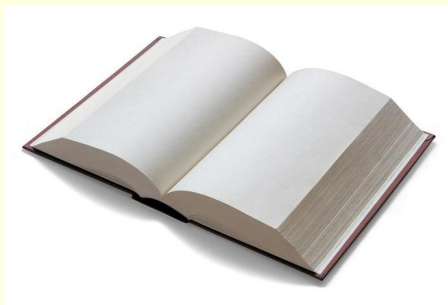
« Теория без практики  
мертва и бесплодна, практика без  
теории  
невозможна и пагубна. Для теории  
нужны знания, для практики,  
сверх того, и умение»

# Алгебра и начала математического анализа

## Применение производной к исследованию и построению графиков функций

Программы  
общеобразовательных  
учреждений.  
Алгебра и начала мат  
анализа. 10 -11 классы.  
Составитель: Бурмистрова Т.  
А.  
Москва: «Просвещение», 2011  
г

Алгебра и начала мат анализа:  
Учебник для 11 класса  
общеобразовательных  
учреждений.  
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин,  
Ю. В. Сидоров.  
Москва: «Просвещение», 2010 г.



# Содержание

1. Пояснительная записка
2. Дидактические цели
3. Ожидаемые результаты освоения темы
4. Психолого-педагогическое объяснение специфики восприятия и освоения учебного материала учащимися в соответствии с возрастными особенностями
5. Обоснование проекта
6. Планирование
7. Контрольная работа
8. Результаты контрольной работы
9. Проект урока. Урок систематизирующего повторения
10. Литература

# Актуальность выбранной темы

Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков помогает решить многие задачи. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес. Поэтому понятие функции является одним из самых важных понятий в математике и ее приложениях, а также занимает важное место в заданиях ЕГЭ.

Цель изучения курса алгебры и начала анализа в 10-11 классах - систематическое изучение функций как важнейшего математического объекта средствами алгебры и математического анализа, раскрытие прикладного значения общих методов математики, связанных с исследованием функций, подготовки необходимого апорта для изучения геометрии и физики.

# Дидактические цели

## Образовательные задачи

- Изучение схемы исследования функции;
- Применение полученных теоретических знаний для решения задач;
- Развитие умения анализировать условие задачи с тем, чтобы выбрать оптимальный вариант решения;
- Осуществление контроля своих знаний.

## Развивающие задачи:

- Способствование развитию общеучебных умений;
- Развитие творческой стороны мышления;
- Умение осуществлять исследовательскую деятельность;
- Развитие уверенности в себе, интереса к предмету.

## Воспитательные задачи:

- Воспитание потребности в знаниях;
- Формирование навыков умственного труда – поиск рациональных путей решения, самообразования, самовоспитания;
- Воспитание культуры общения, взаимопомощи, умения слушать товарища; ответственности.
- Воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры.

# Ожидаемые результаты освоения темы

---

**В результате изучения темы «Применение производной к исследованию и построению графиков функций» ученик должен**

**знать (понимать):**

- Необходимые и достаточные условия экстремума;
- Схему построения графиков функций;

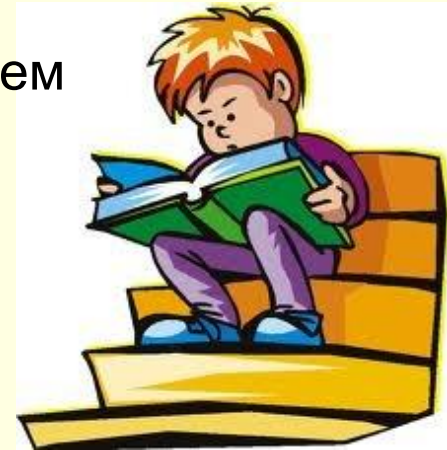
**уметь:**

- Определять по графику производной и изображению знаков производной промежутки возрастания, убывания функции, находить экстремумы;
- Описывать по графику функции свойства и знаки производной;
- Применять полученные знания в практической деятельности.
- Решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

# Государственный образовательный стандарт

**В результате изучения ученик должен уметь:**

- исследовать функции и строить их графики с помощью производной;
- решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции;
- решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа;
- выполнять поисковую и творческую деятельность при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач;





## **Психолого-педагогическое объяснение специфики восприятия и освоения учебного материала учащимися в соответствии с возрастными особенностями**

**В познавательной сфере у старшеклассников происходят свои изменения. Развитие мышления характеризуется более совершенным уровнем формальных операций. У старшеклассников отмечается способность делать общие выводы на основе частных посылок и переходить к частным умозаключениям на базе общих посылок, т.е. способность к индукции и дедукции. Важно отметить, что в этом возрасте молодые люди уже умеют оперировать гипотезами. Развитие внимания характеризуется высокой переключаемостью, распределяемостью, устойчивостью, что позволяет поддерживать достаточно высокий темп работы.**

**В развитии памяти происходит замедление прироста продуктивности непосредственного запоминания при одновременно увеличивающейся продуктивности опосредованного запоминания.**

**Таким образом, развитие когнитивных процессов у старшеклассников достигает такого уровня, что они оказываются практически готовыми к выполнению всех видов умственной работы взрослого человека, включая самые сложные**

# **Психолого-педагогическое объяснение специфики восприятия и освоения учебного материала учащимися в соответствии с возрастными особенностями**

---

**Старший школьный возраст характеризуется продолжающимся развитием общих и специальных способностей детей на базе основных ведущих видов деятельности: учения, общения и труда.**

**В учении формируются общие интеллектуальные способности, особенно понятийное теоретическое мышление. Это происходит за счет усвоения понятий, совершенствования умения пользоваться ими, рассуждать логически и абстрактно.**

**В общении формируются и развиваются коммуникативные способности учащихся, включающие умение вступать в контакт с незнакомыми людьми, добиваться их расположения и взаимопонимания, достигать поставленных целей.**

**В труде идет активный процесс становления тех практических умений и навыков, которые в будущем могут понадобиться для совершенствования профессиональных способностей**

# Обоснование проекта

Выбор данного раздела обусловлен наличием богатого материала для реализации основных принципов педагогических технологий, применяемых на уроках: компьютерных технологий, проблемного обучения, развивающего обучения, традиционной классно-урочной технологии, частично-поисковой и исследовательской деятельности. Типы уроков при изучении темы разнообразны - это урок изучения нового, урок формирования знаний, умений, навыков, урок обобщения и систематизации знаний, урок проверки и оценки знаний, урок ключевых задач, комбинированный урок. На этих уроках предполагается работа с современными средствами обучения, такими как компьютер, проектор.

Материал этой темы используется при изучении многих классов функций: тригонометрических, показательной, логарифмической и др. Он имеет также очень большое прикладное значение и играет большую роль в установлении межпредметных связей (в особенности с курсом физики).

# Планирование (16)

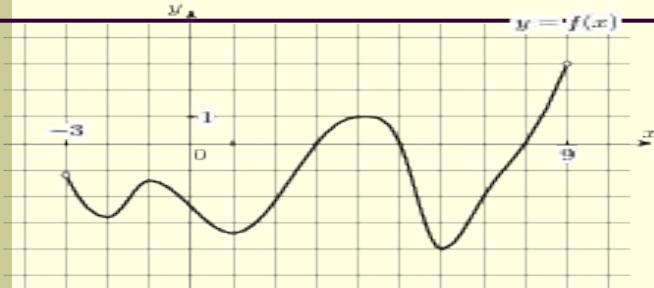
---

1. Возрастание и убывание функции. (2)
2. Экстремумы функции. (2)
3. Применение производной к построению графиков функций. (4)
4. Наибольшее и наименьшее значения функции. (3)
5. Выпуклость графика функции, точки перегиба. (2)
6. Урок обобщения и систематизации знаний (1)
7. Контрольная работа.(1)
8. Анализ контрольной работы. (1)

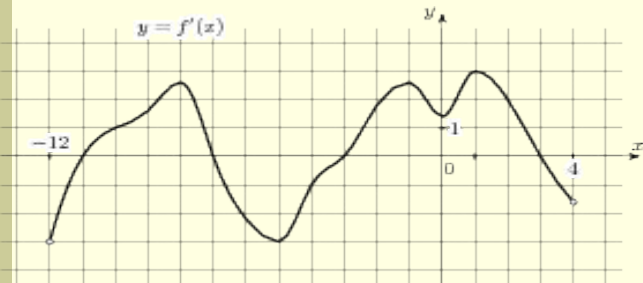
№ п/п	Тема урока	Тип урока	Кол-во часов
1	Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции	Урок-лекция	1
2	Возрастание и убывание функции	Урок усвоения теории	1
3	Возрастание и убывание функции	Урок практикум	1
4	Экстремумы функции	Комбинированный урок	1
5	Экстремумы функции	Урок практикум	1
6	Применение производной к построению графиков функций	Урок-лекция	1
7	Применение производной к построению графиков функций	Урок практикум	1
8	Применение производной к построению графиков функций. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	Комбинированный урок	1
9	Применение производной к построению графиков функций. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	Урок практикум	1
10	Наибольшее и наименьшее значения функции	Урок лекция	1
11	Наибольшее и наименьшее значения функции	Комбинированный урок	1
12	Наибольшее и наименьшее значения функции	Урок практикум	1
13	Наибольшее и наименьшее значения функции	Урок систематизации знаний	1
14	Применение производной к построению графиков функций. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	Урок систематизации знаний	1
15	Применение производной к построению графиков функций. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	Урок - контроль	1
16		Анализ контрольной работы	1

# Контрольная работа

1. На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ .  
Определить количество точек графика, в которых касательная параллельна прямой  $y=12$ .



2. На рисунке изображен график производной.  
Определить количество точек минимума функции



3. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

4. Построить график функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$$

5. Найти наибольшее значение функции  
на отрезке  $(-4, 5; 0)$ .

$$y = \ln(x+5)^5 - 5x$$

6. Найти все значения  $a$ , при которых функция  
возрастает на всей области определения

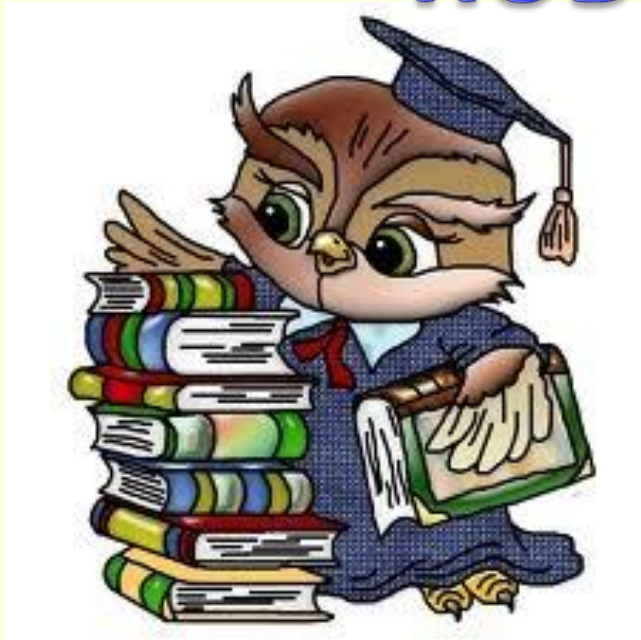
$$f(x) = x^3 + 6ax^2 + 9ax - 12$$

## Результаты выполнения контрольной работы по теме «применение производной к исследованию и построению графиков функций»

Вид работы	Кол-во учеников	Получили 5	Получили 4	Качество знаний	Уровень обученности
Контрольная работа	26	8	13	81%	100%

Проект урока

# Урок систематизирующего повторения



Тип урока: урок систематизации знаний обобщения и



# Цели и задачи урока

Целью урока является решение следующих задач:

- **образовательные:**
  1. систематизировать и обобщить знания и умения в использовании производной при исследовании и построении графиков функций с помощью производной;
  2. Показать примеры заданий ЕГЭ, при решении которых используются знания и умения, полученные при изучении данной темы;
  3. рассмотреть некоторые примеры использования производной при решении заданий С5 .
  
- **развивающие:**
  1. развитие умений в применении знаний в конкретной ситуации, умение работать в проблемной ситуации;
  2. Развитие умений сравнивать, обобщать, правильно формулировать задачи и излагать мысли;
  3. Развитие самостоятельной деятельности учащихся.
  
- **воспитательные:**
  1. воспитание трудолюбия, взаимопомощи, математической культуры;
  2. Воспитание настойчивости и заинтересованности в конечном результате труда.



# Для осуществления поставленных на урок задач выбраны



## Методы

наглядный, словесный,  
частично-поисковый,  
исследовательский.

## Формы

фронтальная, коллективная,  
индивидуальная, работа в парах,  
групповая.

## Средства обучения

компьютер, проектор, мел, доска,  
карточки с заданием.

# Схема урока

1. **Организационный момент. (0,5 мин.)**
2. **Актуализация опорных знаний.**
  - Устная работа по закреплению теоретического материала (3 мин);
  - Работа с интерактивной доской по готовым чертежам (4 мин.);
  - ЭОР: практикум по теме «Применение производной к исследованию функций» (3 мин.).
3. **Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности:**
  - Работа в парах с карточкой (3 мин.);
  - Практическая работа (5 мин.).
4. **Творческое задание (работа в группах) (20 мин)**
5. **Подведение итогов урока - 3 минут;**
6. **Домашнее задание (0,5 мин.)**
7. **Оценивание учащихся - 3 минут.**

# Описание хода урока

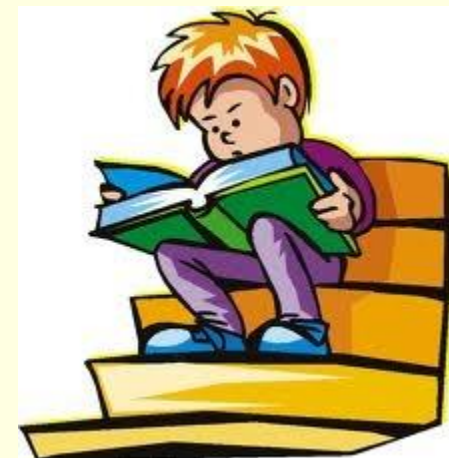
Тема урока: Урок повторения по теме  
« Применение производной к исследованию и построению графиков функций»

Эпиграф урока: « Величие человека — в его способности мыслить » (Паскаль) »

Требования государственного стандарта:

На этом занятии повторяются и закрепляются знания и умения

- исследовать функции и строить их графики с помощью производной;
- решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции;
- решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке;



# Мотивация

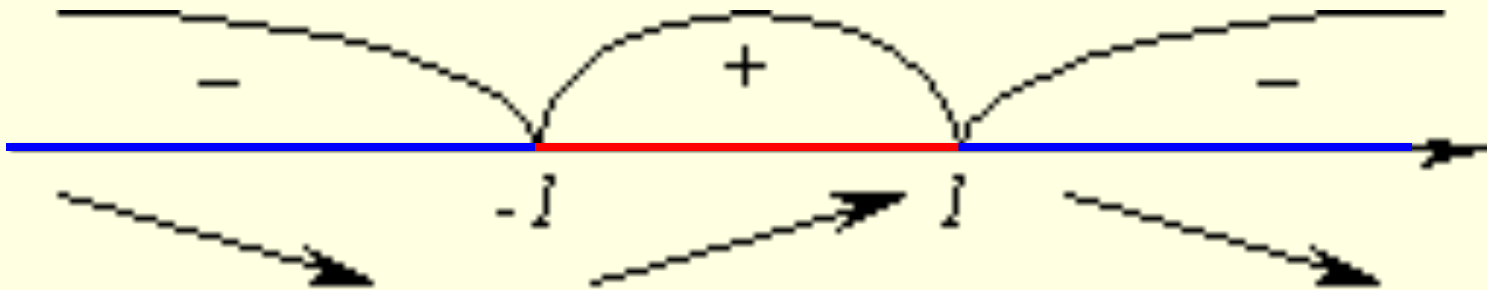
---

- Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решить многие задачи и порой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес.

# Актуализация знаний

## 1. Достаточный признак возрастания (убывания) функции.

- если производная функции  $y=f(x)$  положительна для любого  $x$  из интервала  $X$ , то функция возрастает на  $X$ ;
- если производная функции  $y=f(x)$  отрицательна для любого  $x$  из интервала  $X$ , то функция убывает на  $X$ .



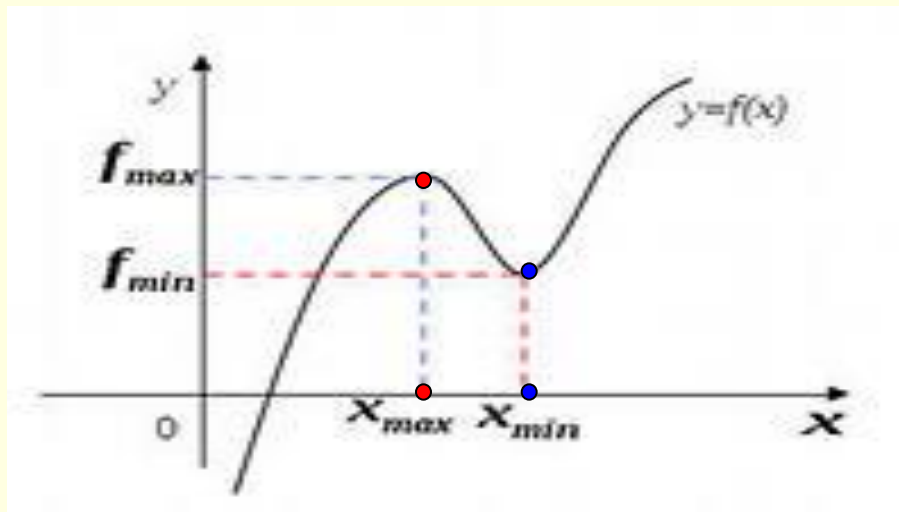
# Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции

---

- найти область определения функции;
- найти производную функции;
- решить неравенства  $f'(x) > 0$  и  $f'(x) < 0$  на области определения;
- к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

# Достаточные условия существования экстремума в точке: признак максимума и минимума.

- если в точке  $x_0$  функция непрерывна и в ней производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  - точка максимума;
- если в точке  $x_0$  функция непрерывна и в ней производная меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  - точка минимума.





# Алгоритм отыскания экстремумов функции.

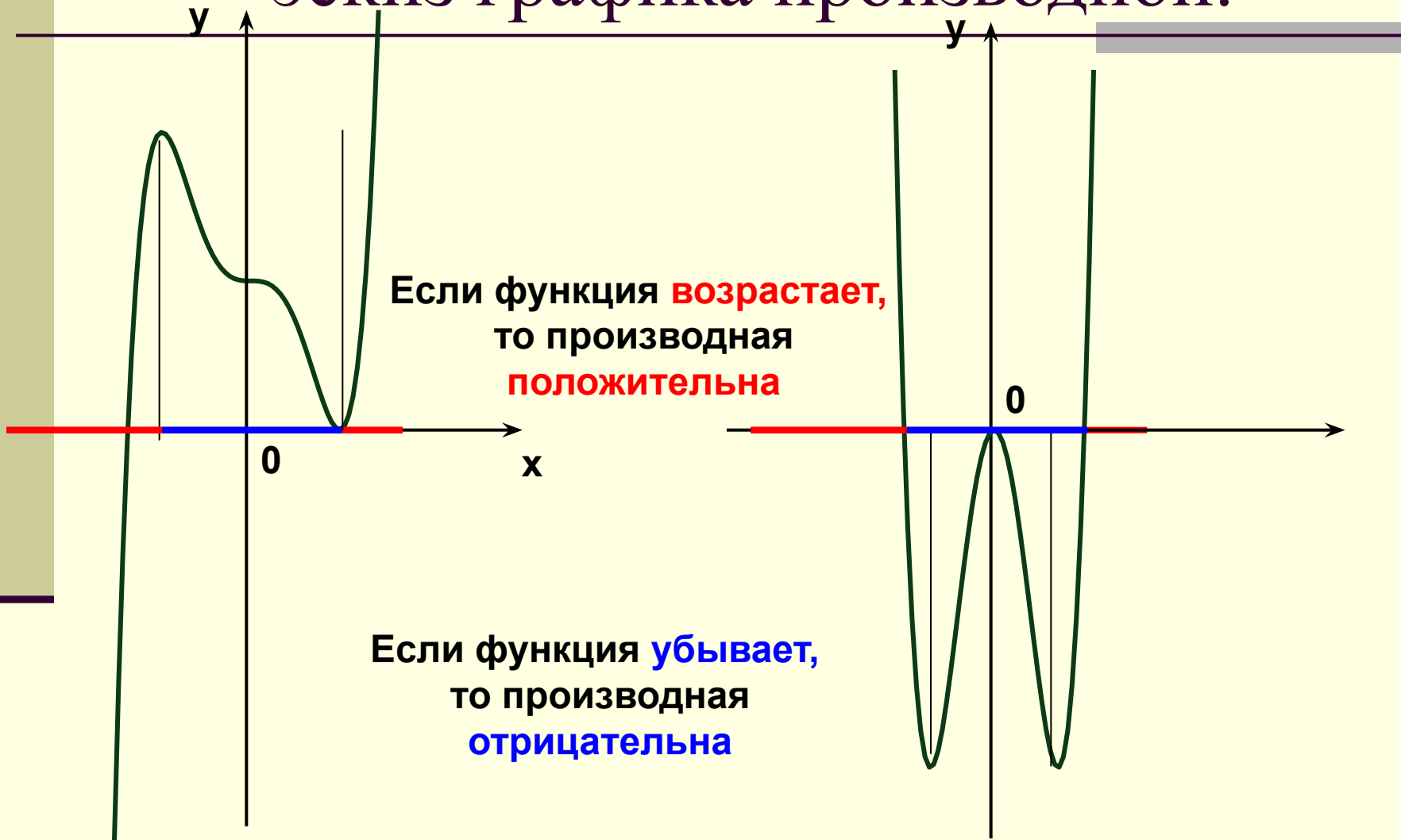
---

- Найти производную функции.
- Найти критические точки, т.е. точки, в которых функция непрерывна, а производная равна нулю или не существует.
- Рассмотреть окрестность каждой из точек, и исследовать знак производной слева и справа от этой точки.

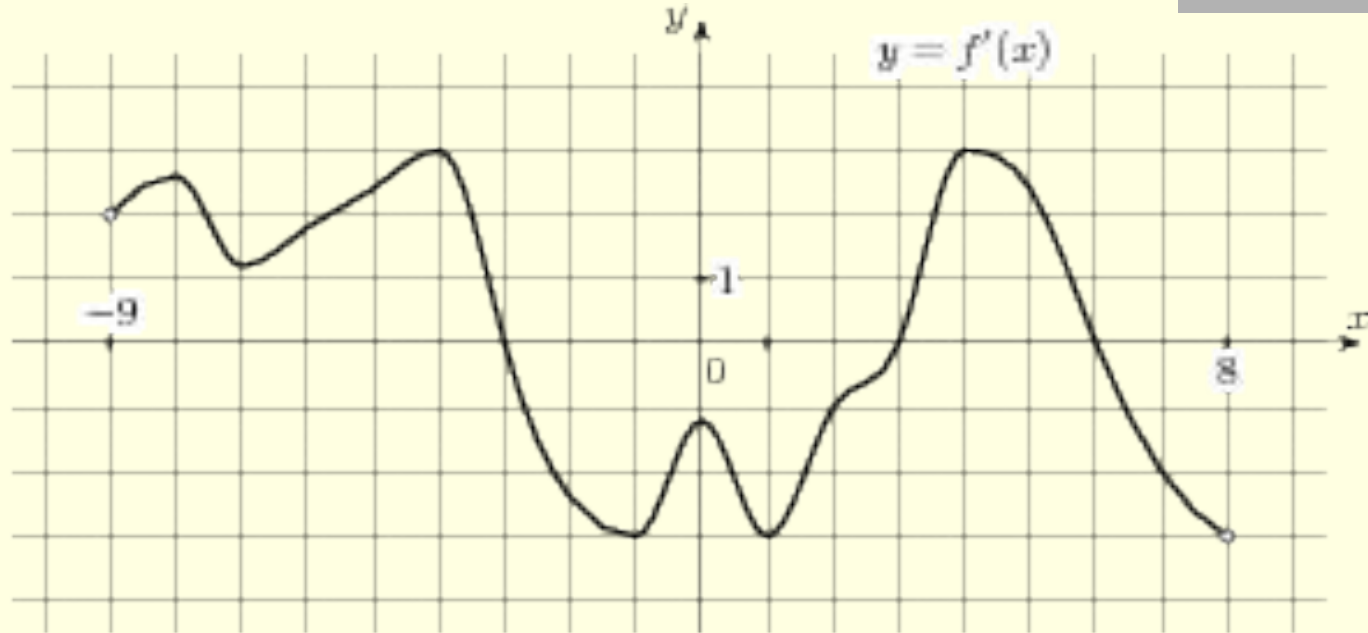
# Схема исследования функции (с помощью производной).

1. Найти область определения функции и исследовать поведение функции в граничных точках этой области (при стремлении аргумента к границе области). Найти вертикальные асимптоты.
2. Выяснить симметрию графика (четность или нечетность функции) и вопрос о периодичности функции.
3. Найти точки разрыва и промежутки непрерывности.
4. Определить нули (корни) функции и промежутки знакопостоянства.
5. Найти точки и значения экстремумов и промежутки монотонности.
6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости.
7. Найти наклонные асимптоты графика функции.
8. Указать другие специфические особенности функции.
9. Построить график функции

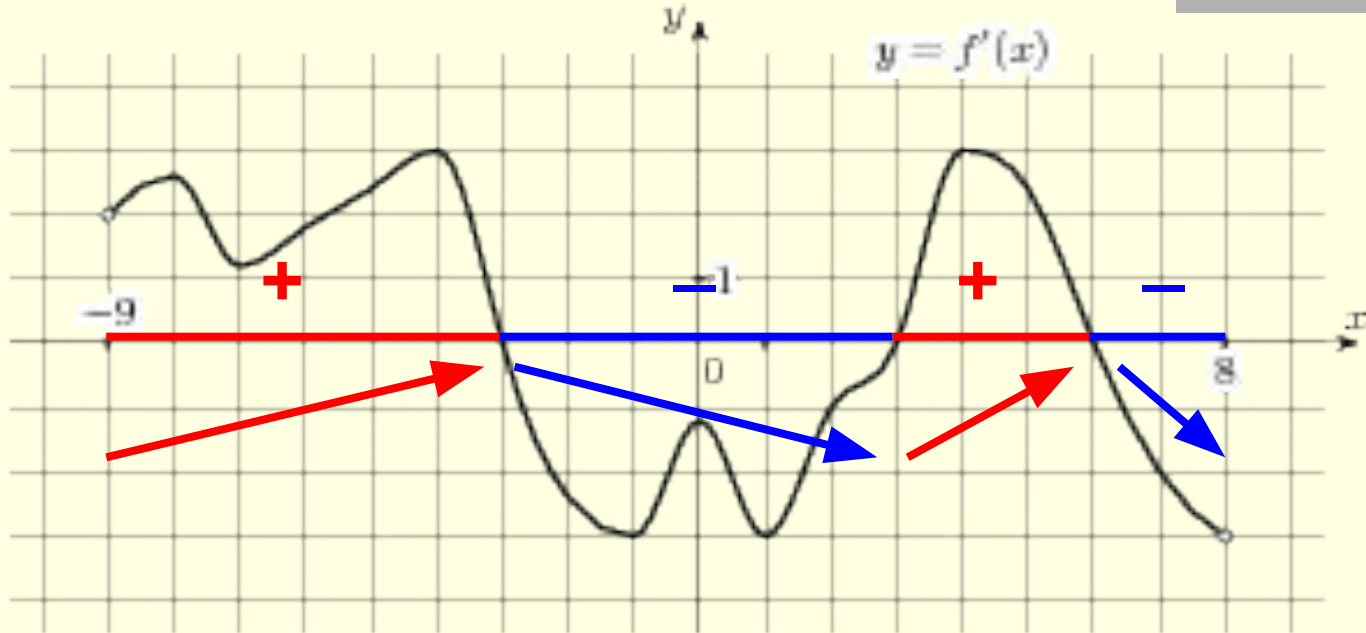
# По графику функции построить эскиз графика производной.



**На рисунке график производной. Определить промежутки возрастания и убывания функции.**



На рисунке график производной. Определить промежутки возрастания и убывания функции.

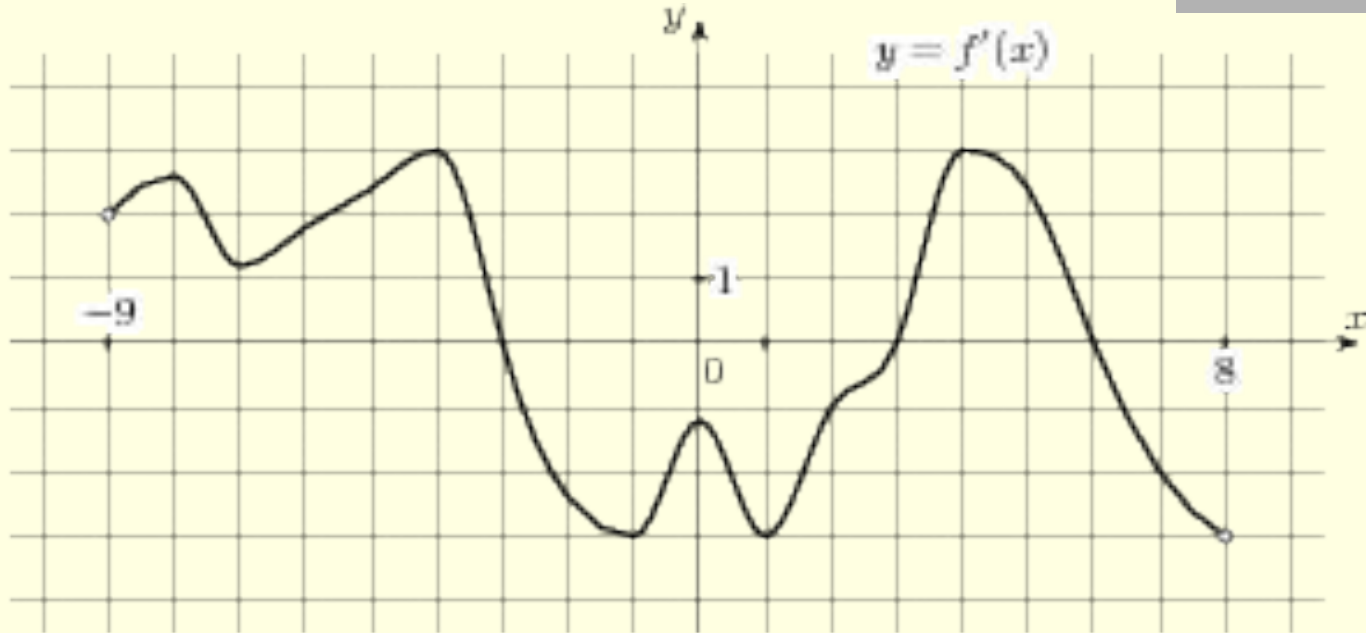


Ответ:

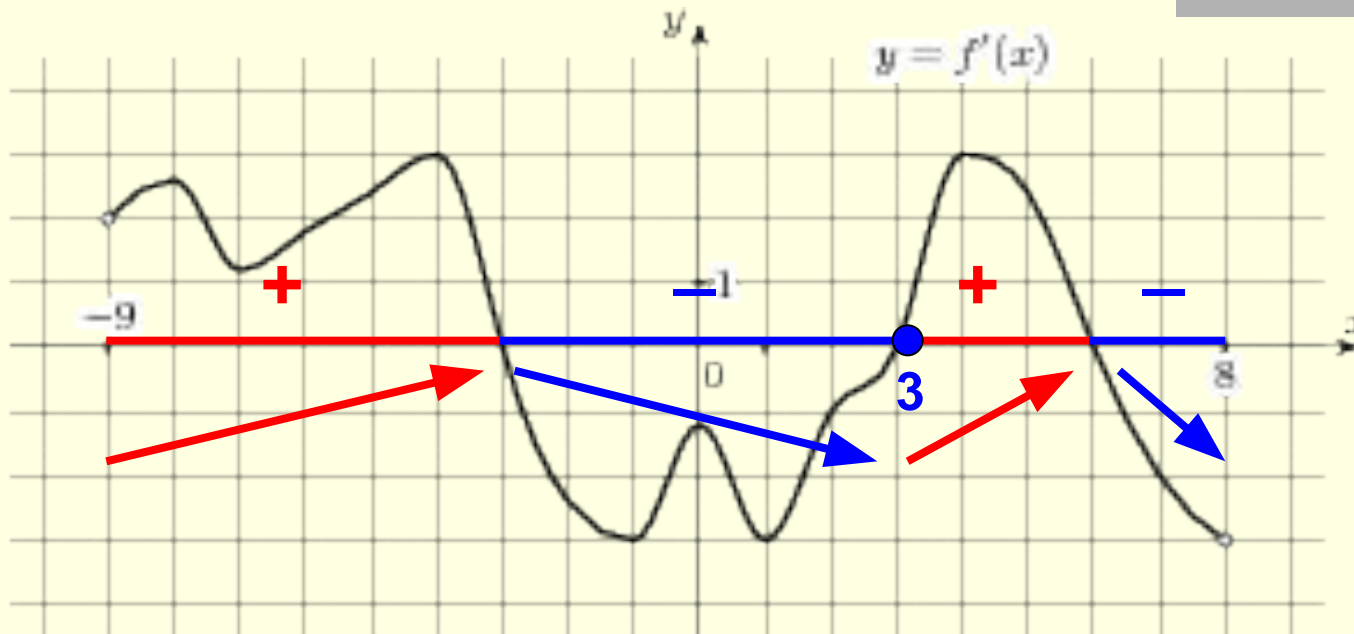
Возрастает на  $[-9; -3]$  и на  $[3; 6]$

Убывает на  $[-3; 3]$  и на  $[6; 8]$ .

**На рисунке график производной. Найти точку минимума функции**



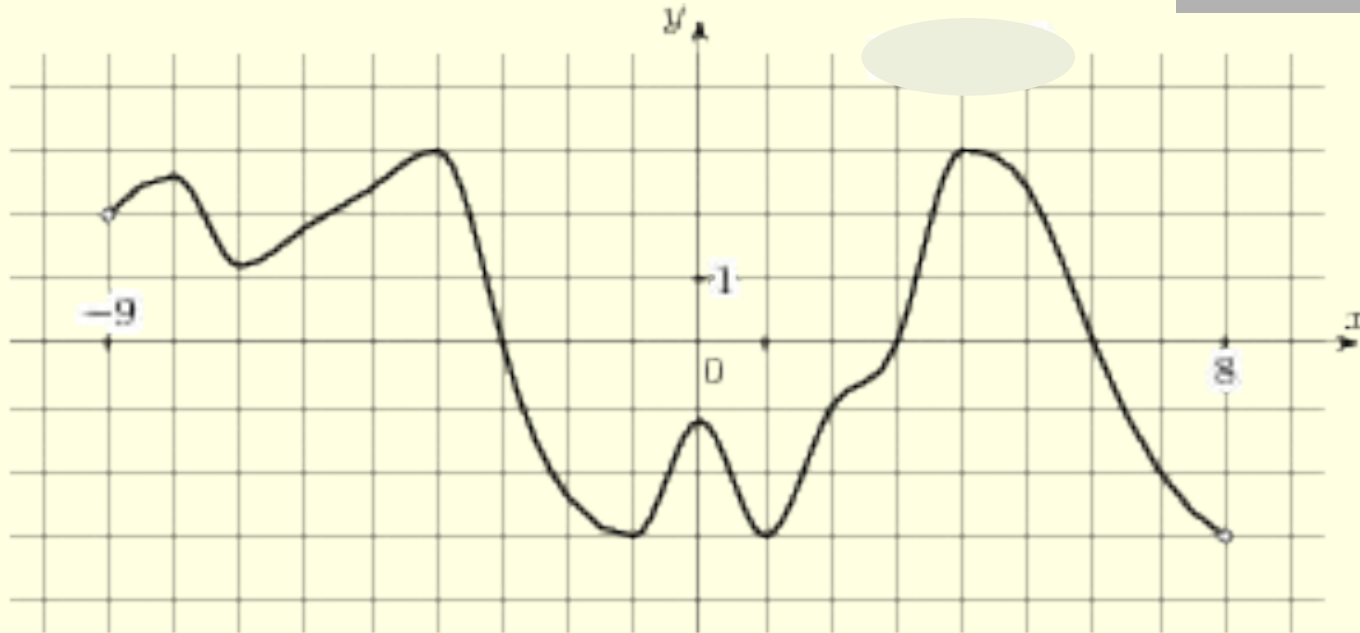
На рисунке график производной. Найти точку минимума функции.



Ответ:

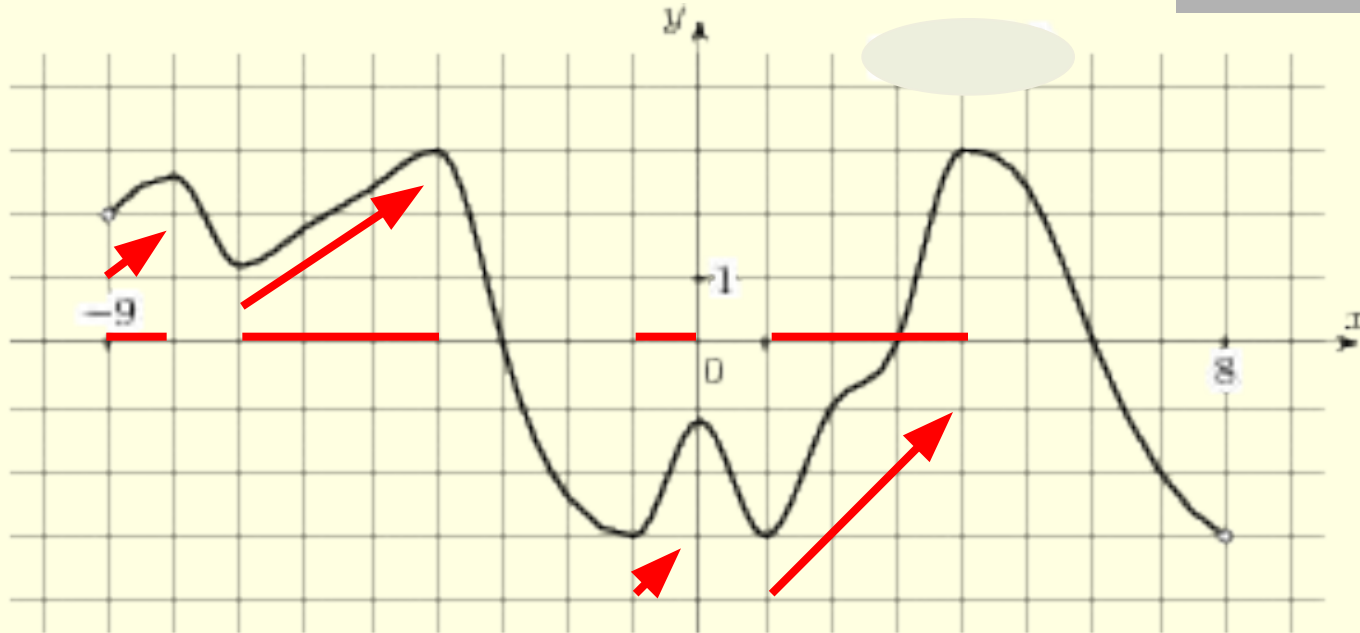
$$x_{\min} = 3$$

**На рисунке график функции. Определить количество промежутков, на которых производная принимает положительные значения.**



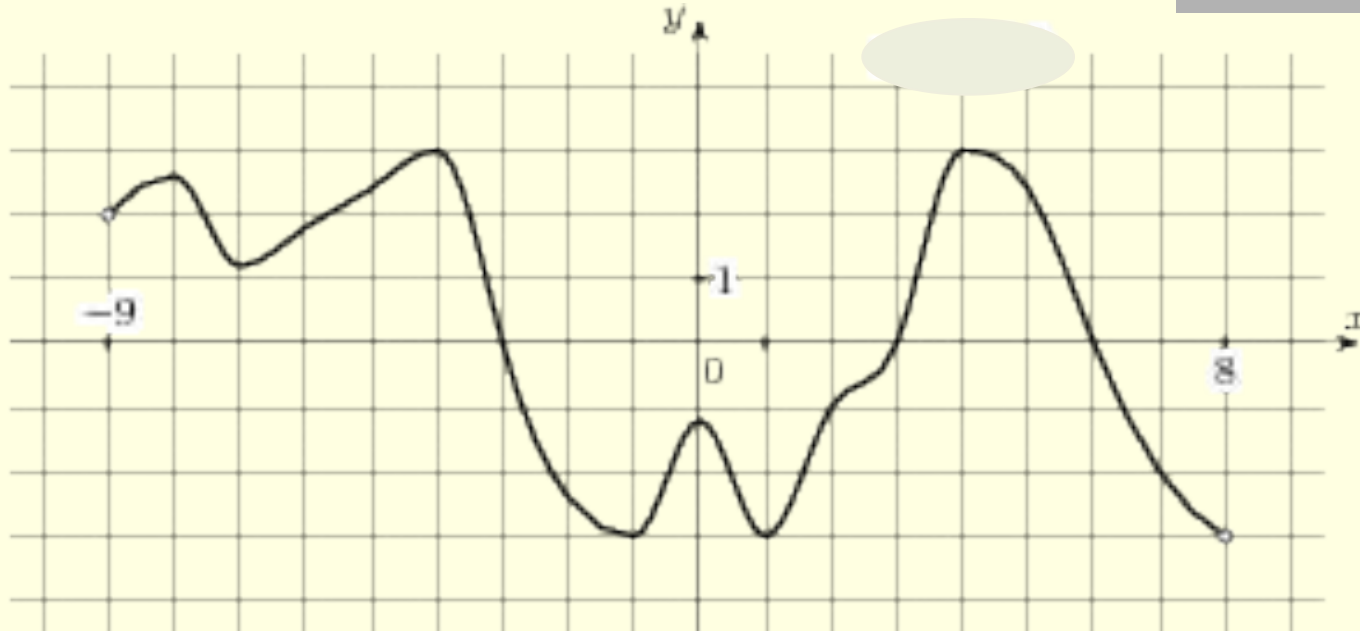


На рисунке график функции. Определить количество промежутков, на которых производная принимает положительные значения.

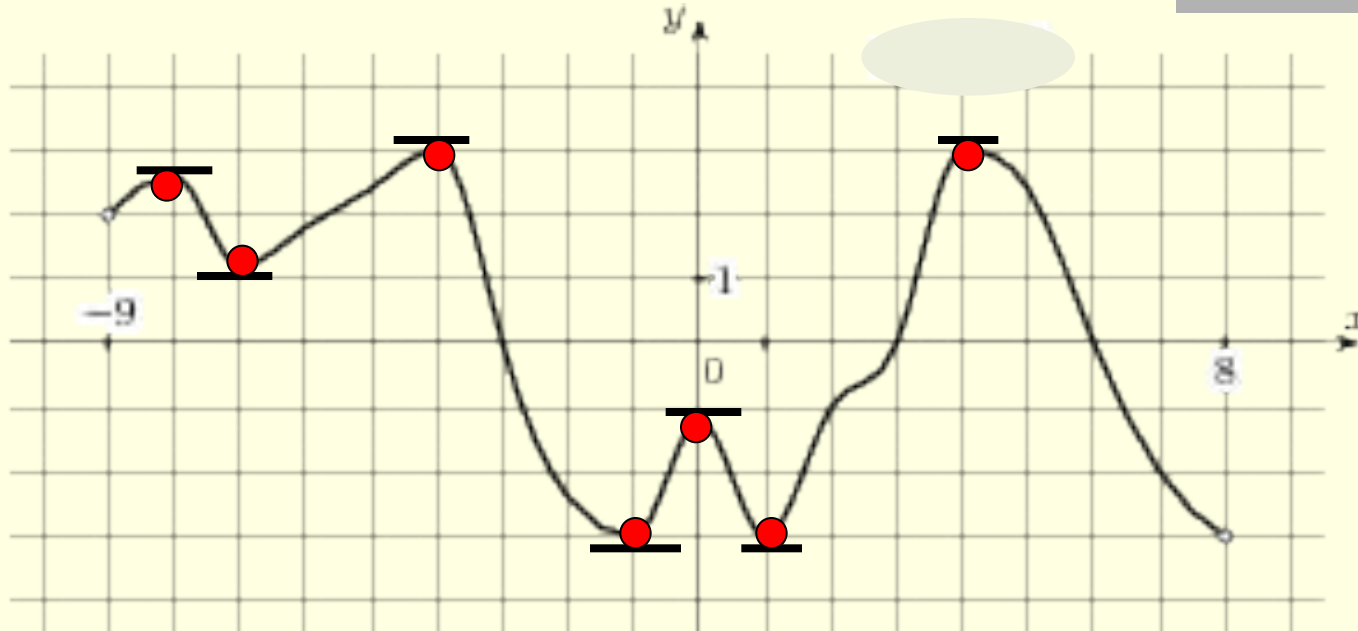


Ответ: 4 промежутка

На рисунке график функции. Определить количество точек, в которых касательная параллельна прямой  $y=-29$ .



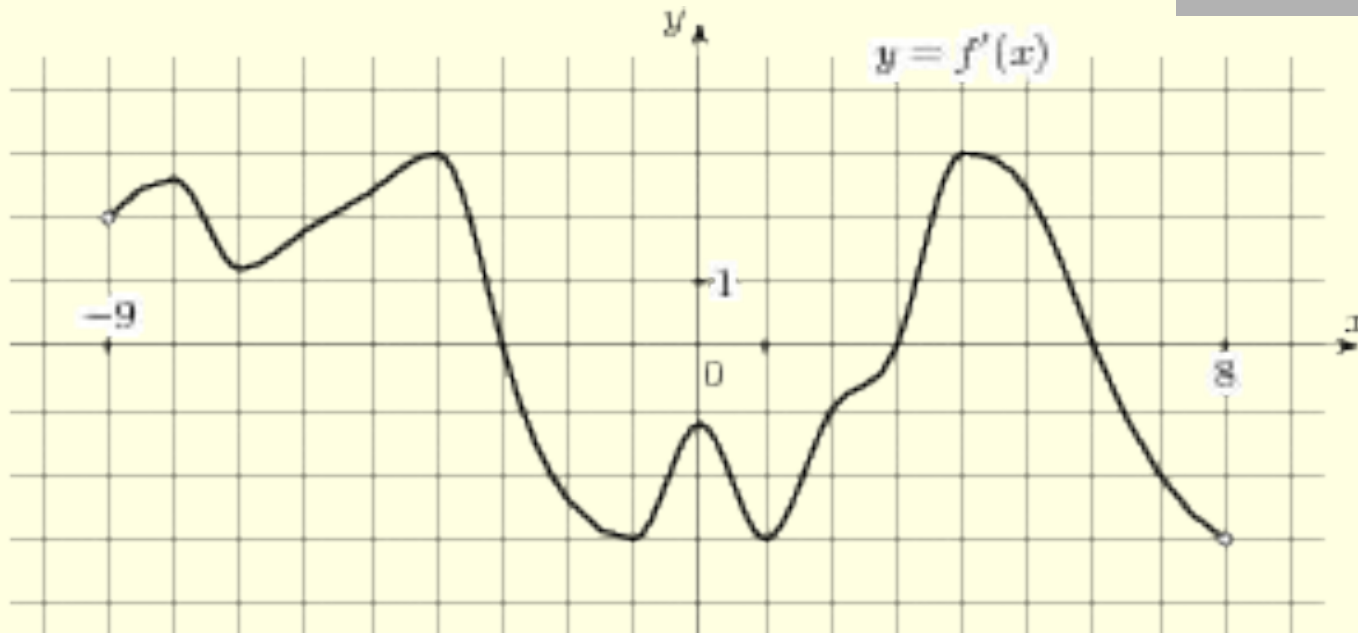
На рисунке график функции. Определить количество точек, в которых касательная параллельна прямой  $y=-29$ .



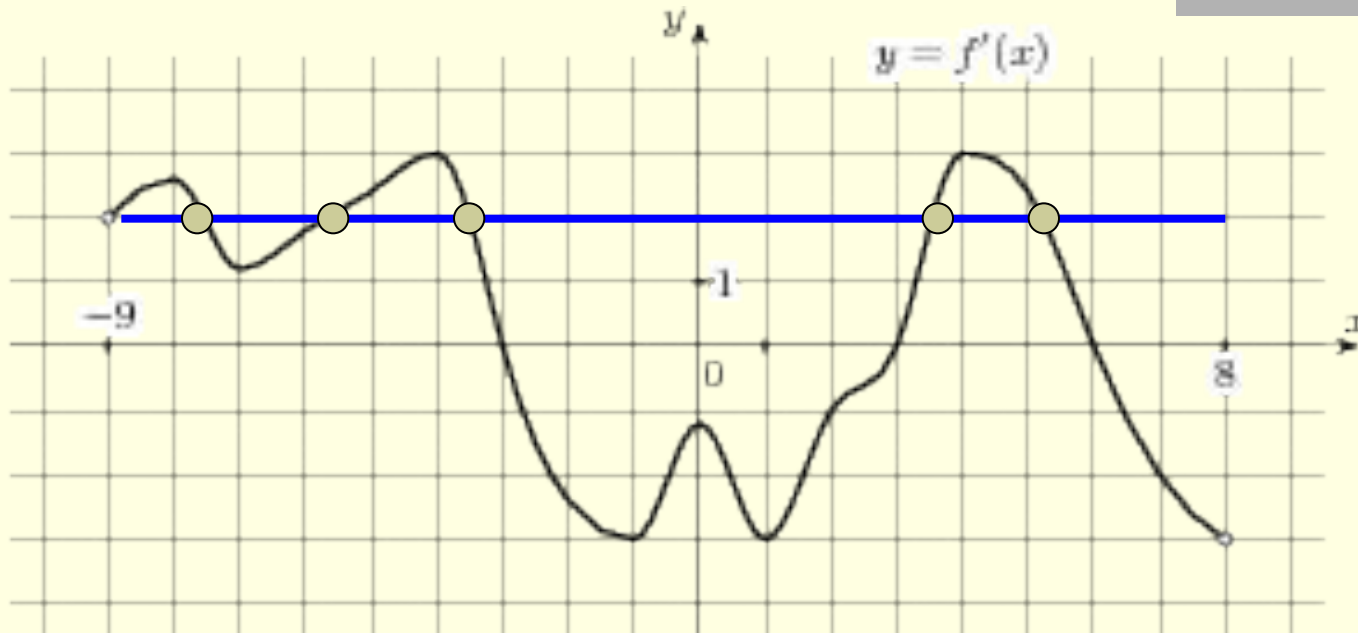
$K=0$

Ответ: 7 точек

**На рисунке график производной. Определить количество точек, в которых касательная параллельна прямой  $y=2x-5$ .**



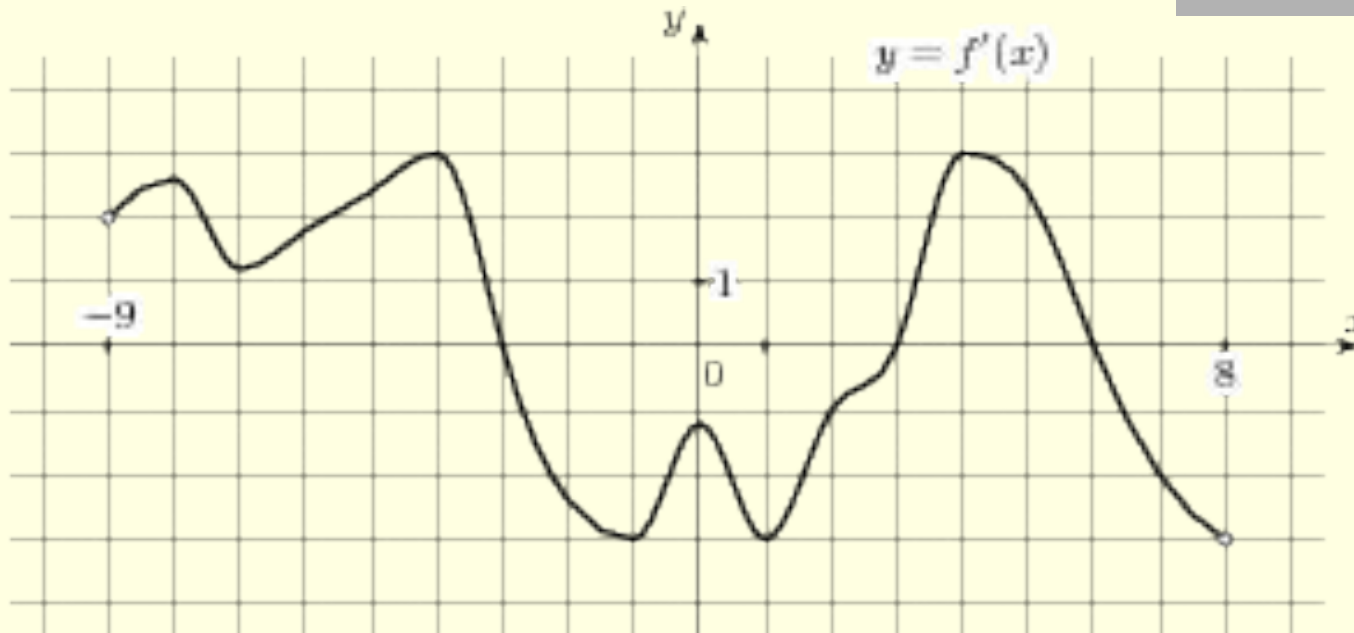
На рисунке график производной. Определить количество точек, в которых касательная параллельна прямой  $y=2x-5$ .



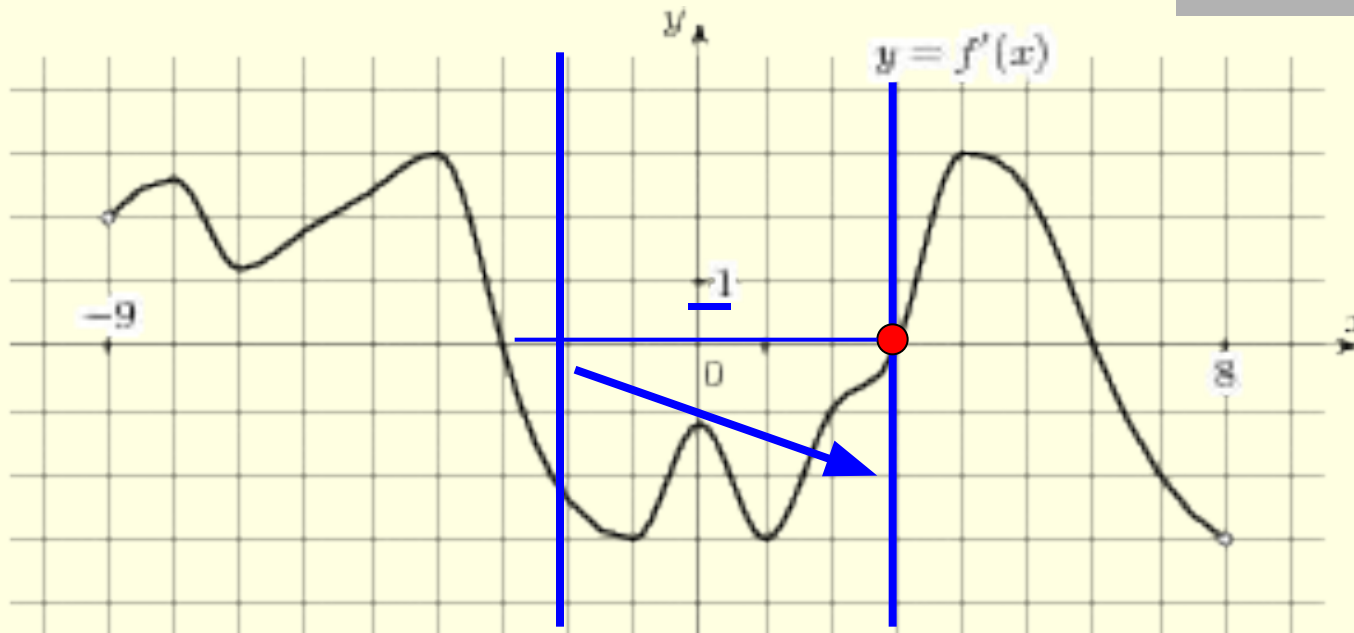
$K=2$

Ответ: 5 точек

На рисунке график производной. В какой точке промежутка  $[-2;3]$  функция принимает наименьшее значение.

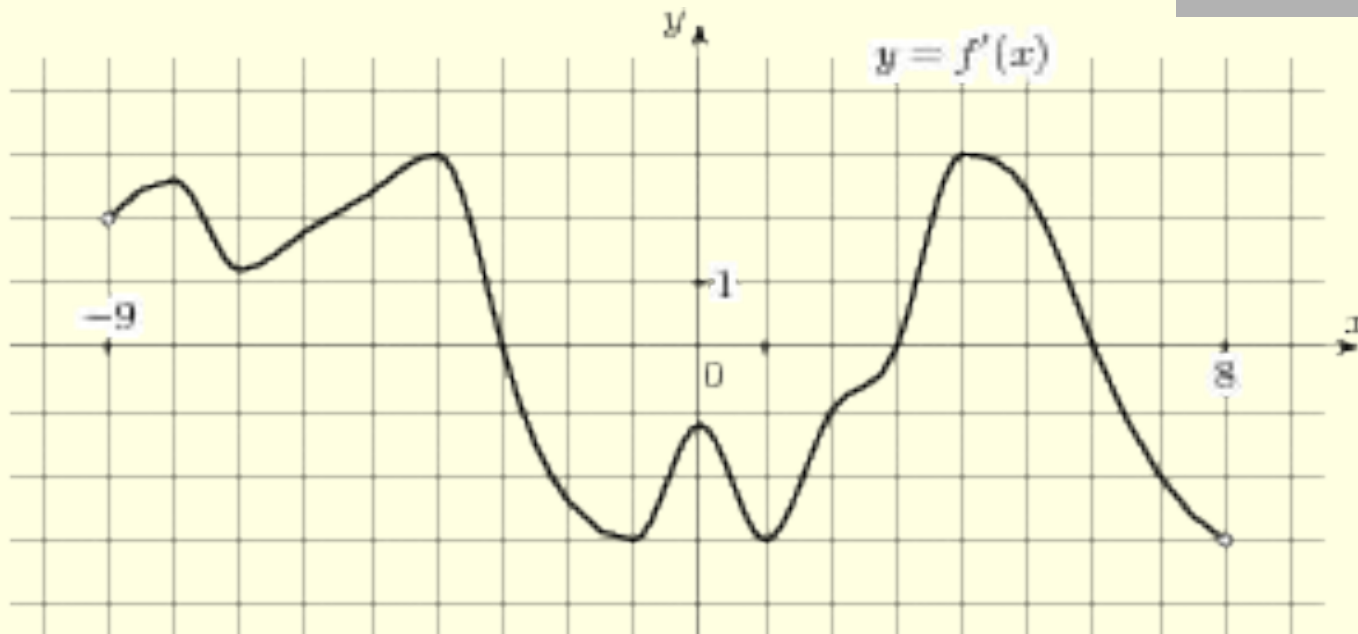


На рисунке график производной. В какой точке промежутка  $[-2;3]$  функция принимает наименьшее значение?



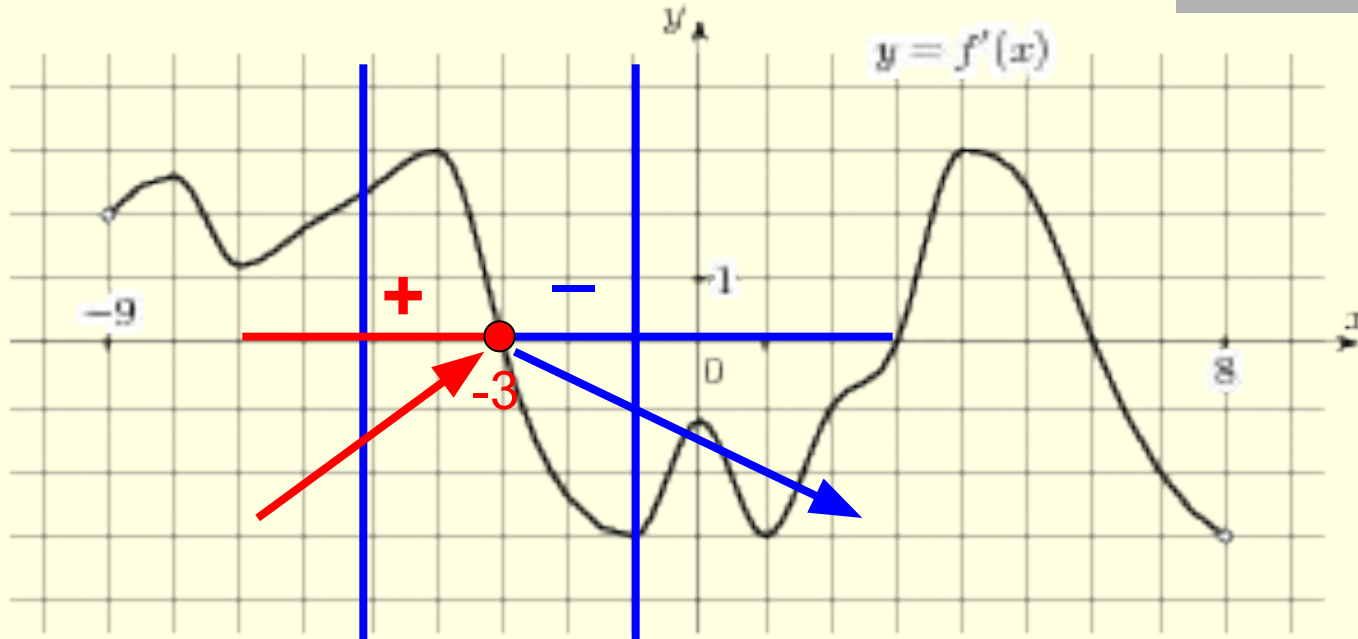
Ответ: функция принимает наименьшее значение в точке 3

На рисунке график производной. Определить в какой точке промежутка  $[-3; -1]$  функция принимает наибольшее значение?





На рисунке график производной. Определить в какой точке промежутка  $[-3;-1]$  функция принимает наибольшее значение?



**ОТВЕТ : функция принимает наибольшее значение в точке -3.**

# Работа в группах

1 вариант: исследовать функцию

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$$

и найти её наименьшее значение

2 вариант: построить график функции

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

**3 вариант: исследовать функцию**

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$$

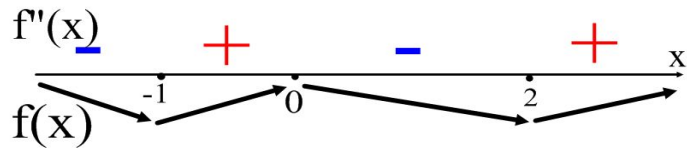
и найти её наименьшее значение

4 вариант: построить график функции

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

# Работа в группах

1 группа

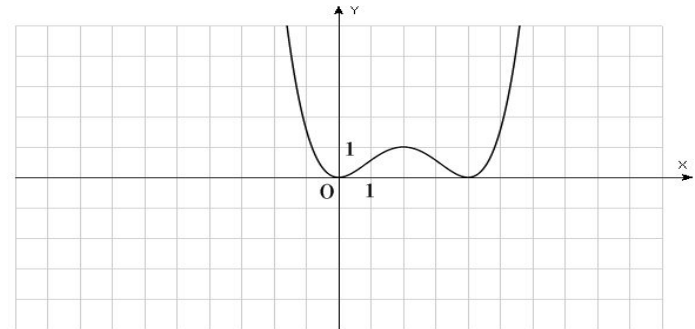


$$f(-1) = -5$$

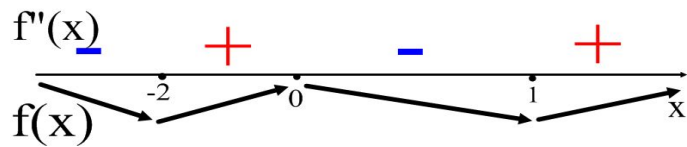
$$f(2) = -32$$

Наименьшее значение функции -32.

2 группа



3 группа

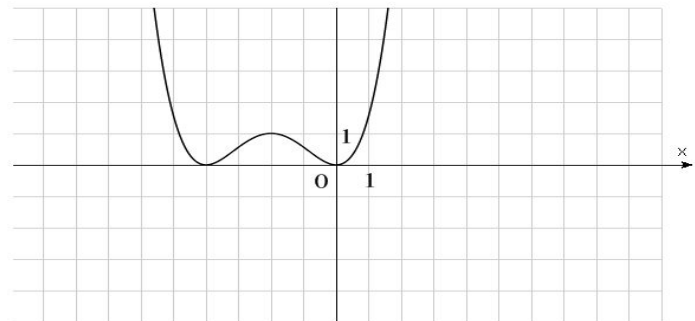


$$f(-2) = -32$$

$$f(1) = -5$$

Наименьшее значение функции -32.

4 группа



# Работа в группах

1 группа: при каких значениях параметра  $a$  функция

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5a - 12$$

принимает значения не меньше 17?

2 группа: при каких значениях параметра  $a$  значения функции

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3a + 14$$

больше 17?

3 группа: найти все значения параметра  $a$ , при которых значение выражения

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7a - 15$$

не меньше 9?

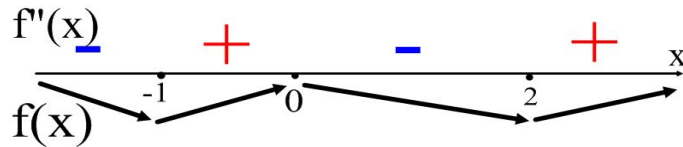
4 группа: найти все значения параметра  $a$ , при которых решением неравенства

$$3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8a + 9 > 0$$

является любое число?

# Работа в группах

1 группа



$$f(-1) = -5 + 5a - 12 = 5a - 17$$

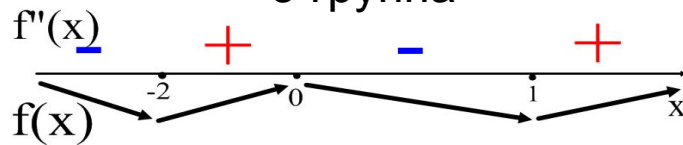
$$f(2) = -32 + 5a - 12 = 5a - 44$$

Наименьшее значение функции  $-32 + 5a - 12 = 5a - 44$

При  $5a - 44 > 0$  условие задачи выполнено.

Ответ:  $a > 8,8$

3 группа



$$f(-2) = -32 + 7a - 15 = 7a - 47$$

$$f(1) = -5 + 7a - 15 = 7a - 20$$

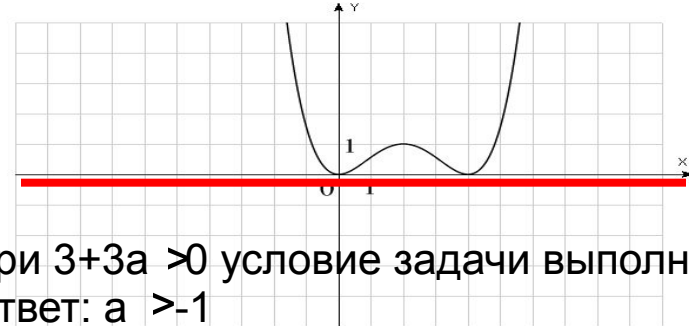
Наименьшее значение функции  $-32 + 7a - 15 = 7a - 47$

При  $7a - 47 > 0$  условие задачи выполнено.

Ответ:  $a > 47/7$

2 группа

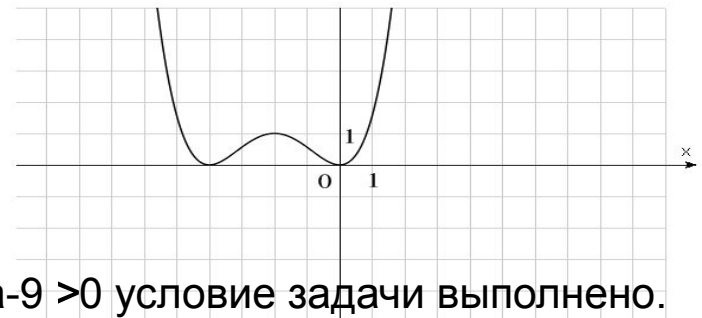
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad y = 3 + 3a$$



При  $3 + 3a > 0$  условие задачи выполнено.  
 Ответ:  $a > -1$

4 группа

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad y = 8a - 9$$



При  $8a - 9 > 0$  условие задачи выполнено.  
 Ответ:  $a > 1,125$

# Домашнее задание

- Исследовать функцию  $f(x) = x^3 + 3x - 1$  на монотонность.
- Определить множество значений функции на промежутке  $[0; +\infty]$
- Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax^3 + 3ax - a + 1}{x^3 + 3x - 1} = 2$$

имеет хотя бы один неотрицательный корень.

# Литература

1. Алгебра и начала мат анализа: Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений. Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. Москва: «Просвещение», 2010 г.
2. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра и начала мат анализа. 10 -11 классы. Составитель: Бурмистрова Т. А. Москва: «Просвещение», 2011 г
3. Епишева О.Б. Технологии обучения математике на основе деятельного подхода. М.: Просвещение, 2003
4. «Алгебра и начала анализа» под ред. Ф.Ф. Лысенко. Ростов-на-Дону: «Легион», 2007г
5. Крамор В.С. «Примеры с параметрами и их решения». Москва: «АРКТИ», 2001г
6. «Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы» под ред. С.А. Шестакова. Москва: «Внешсигма», 2006г
7. Кулеков Ю.М. Уроки математического творчества. М.: Просвещение, 2005
8. Личностно-ориентированный подход в педагогической деятельности. Под ред. Стенакова А.В. М. «Сфера», 2004
9. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики. М.: Просвещение, 2005
10. Основы технологии развивающего обучения математики. Н. Новгород, 1997
11. Семенов , Яценко «Материалы для подготовки к ЕГЭ»
12. «ЕГЭ 3000 задач с ответами. Математика» под ред. А.Л.Семенов, И.В.Яценко. Москва: «Экзамен», 2013г
13. «Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся/ФИПИ». Москва: «Интеллект-центр» ,2009г.

---

***Спасибо за внимание!!!***