Квадратные уравнения

ГБОУ СОШ № 249

Теплякова Людмила Федоровна

Из истории

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи».

Основные понятия

Квадратным уравнением называют уравнения вида $ax^2+bx+c = 0$, где коэффициенты a, b, c– любые действительные числа, причём $a \neq 0$.

Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

Способы решения
1. Формулы

Подкоренное выражение b^2-4ac называется дискриминантом

$D = b^2-4ac$

при $D>0$ два кореня ;

при $D=0$ один корень (в некоторых контекстах говорят также о двух равных или совпадающих корнях);

при $D<0$ корней на множестве действительных чисел нет.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Корни квадратного уравнения при чётном коэффициенте *b*

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{(2k)^2 - 4ac}{4} = \frac{4(k^2 - ac)}{4} = k^2 - ac$$

Все необходимые свойства при этом сохраняются: $\frac{D}{4} > 0 \Rightarrow D > 0$

$$x = \frac{-2k}{2a} = \frac{-k}{a}$$

Неполные квадратные уравнения

b = 0; c = 0

$$ax^2 = 0;$$

$$x^2 = 0;$$

$$x = 0.$$

- **b = 0; c ≠ 0**

$$ax^2 = -c;$$

$$x^2 = -\frac{c}{a};$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

- **b ≠ 0; c = 0**

$$ax^2 + bx = 0;$$

$$x(ax + b) = 0;$$

$x = 0$ **или**

$$ax + b = 0; \; x = -\frac{b}{a}.$$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

$ax^2+bx+c = 0$

Если $a+c=b$, то $$x_1 = -1; x_2 = \frac{-c}{a}$$

Если $a+c+b=0$, то $$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$$

2. Разложение левой части уравнения на множители.

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$

$(x + 12)(x - 2) = 0$

$x = 2, x = - 12.$

3. Метод выделения полного квадрата.

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + 9 - 9 - 7 = (x^2 + 6x + 9) - 16 = (x+3)^2 - 16$

$(x+3)^2 - 16 = 0$

$(x+3)^2 = 16$

$x+3=4$ или $x+3=-4$

$x = 1$, или $x = -7$.

Решение уравнений с использованием теоремы Виета

- $x^2 + px + q = 0$
- $x1 + x2 = - p$
- $x1 . x2 = q$

Решение уравнений способом переброски

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + ax + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни $y1$и $y2$ найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

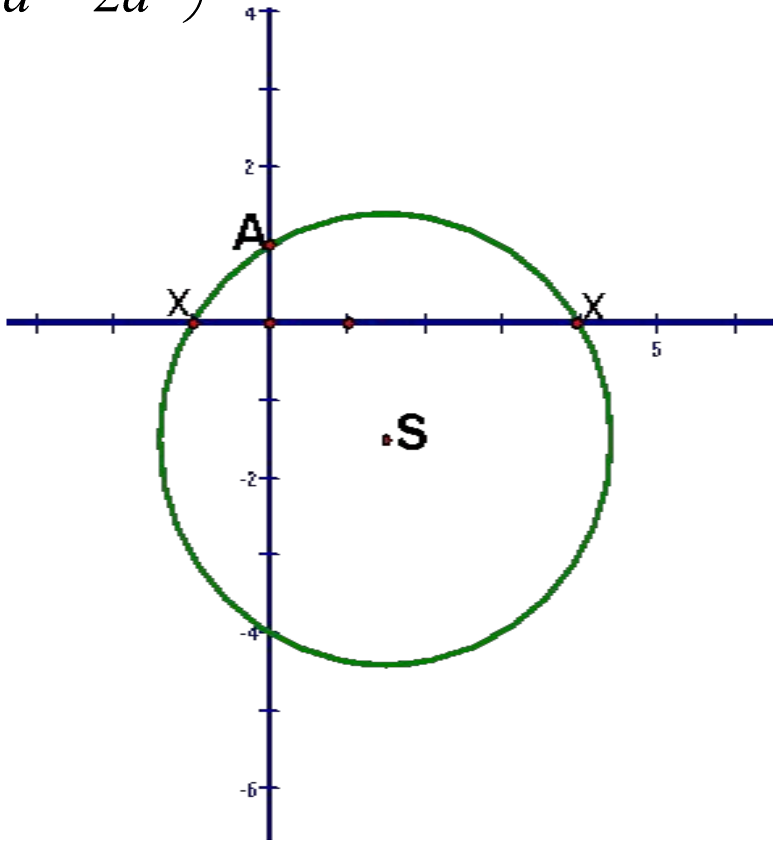
$x1 = y1/a$ и $x1 = y2/a$.

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

1) построим точки (центр $S\left(-\frac{b}{2a};\frac{a+c}{2a}\right)$ окружности) и *A(0; 1)*;

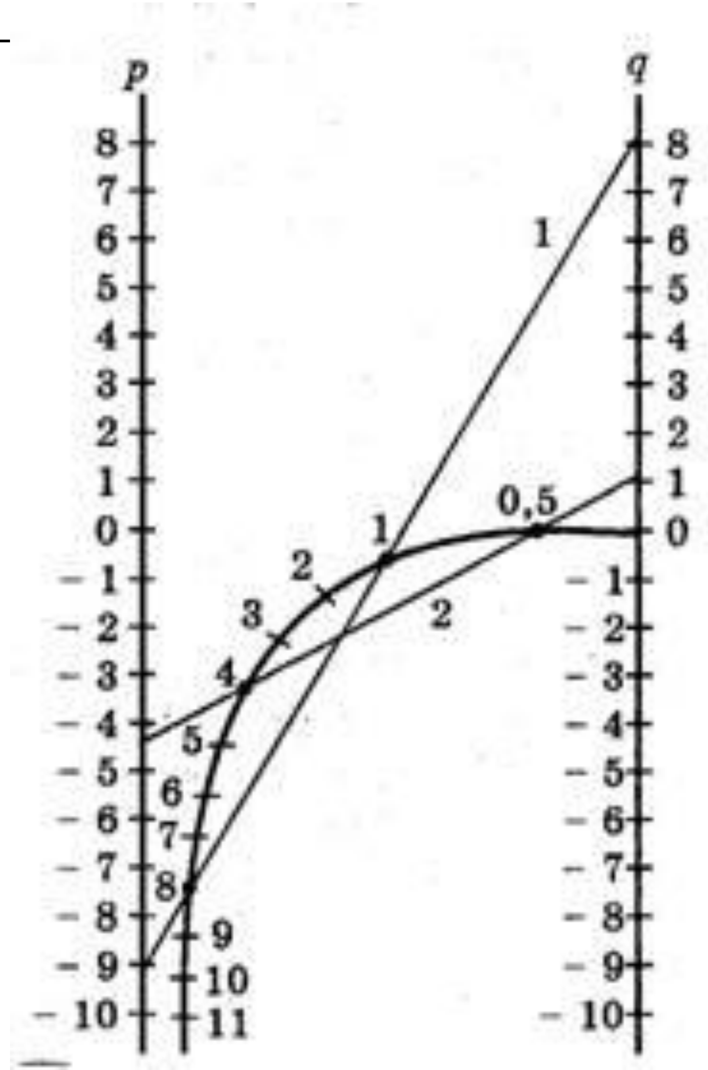
2) проведем окружность с радиусом *SA*;

3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью *Ox* являются корнями исходного квадратного уравнения.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

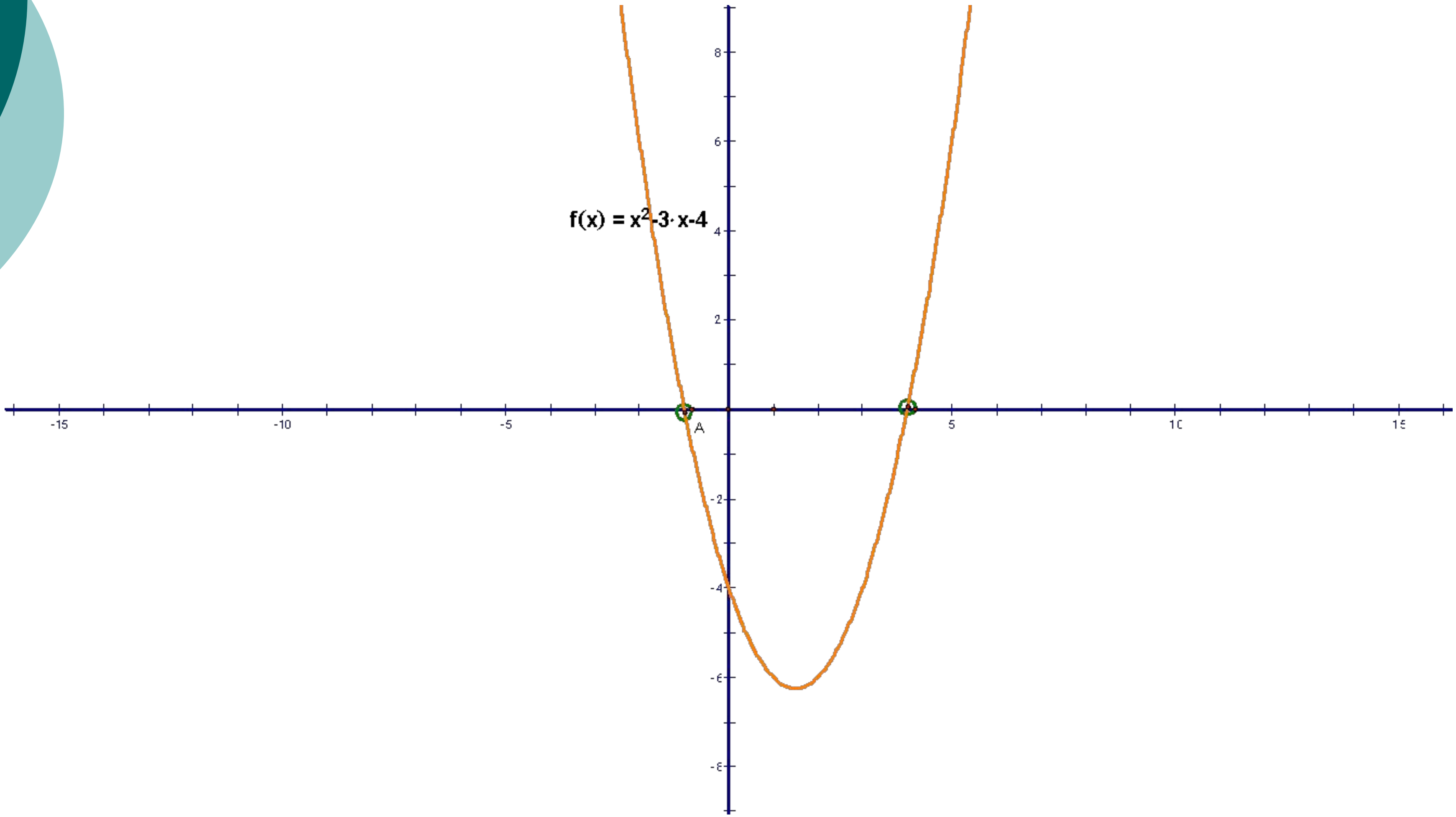


Геометрический способ решения квадратных уравнений

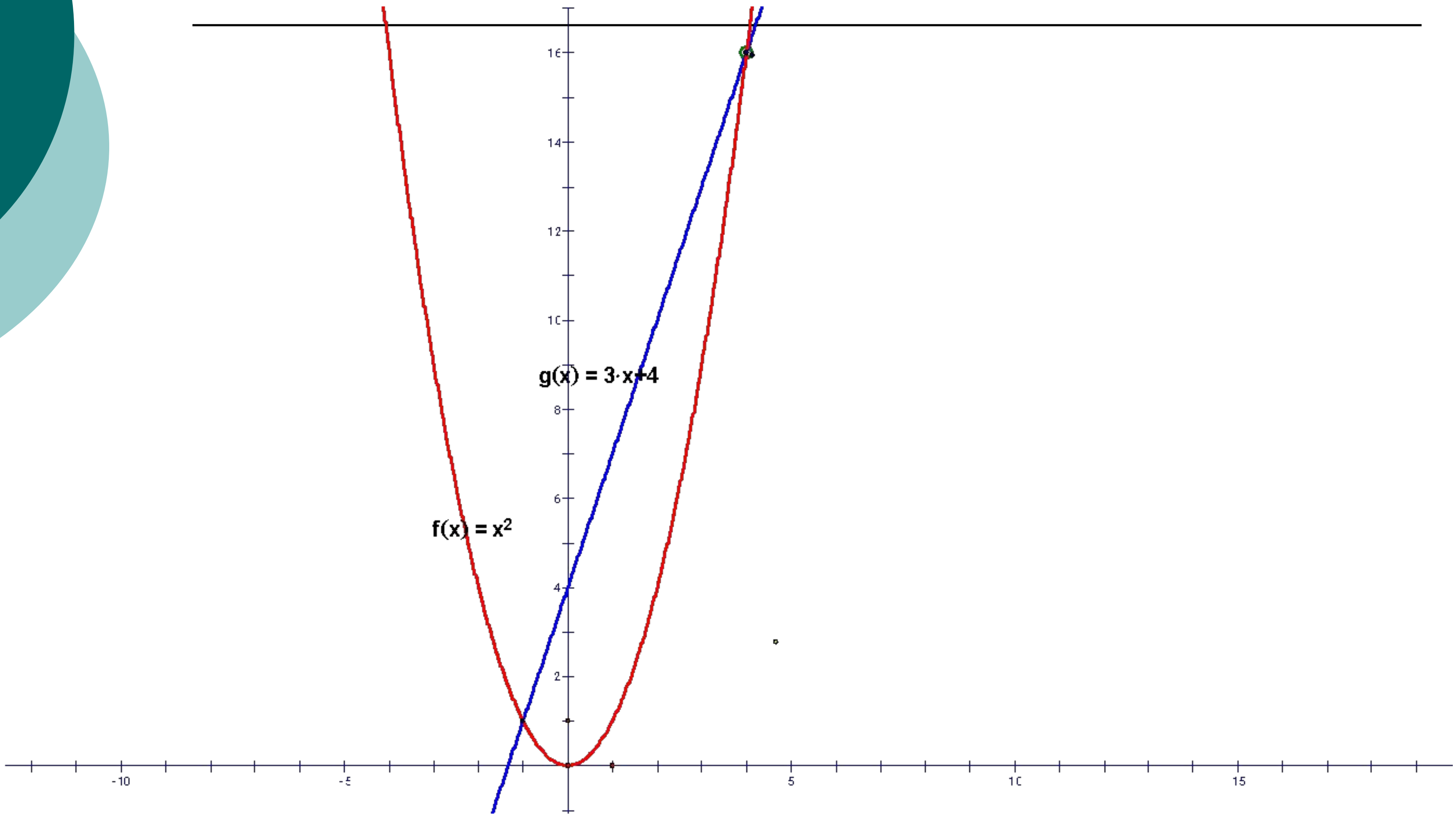
В древности геометрия была более развита, чем алгебра.

Есть всего пять основных способов графического решения квадратных уравнений.

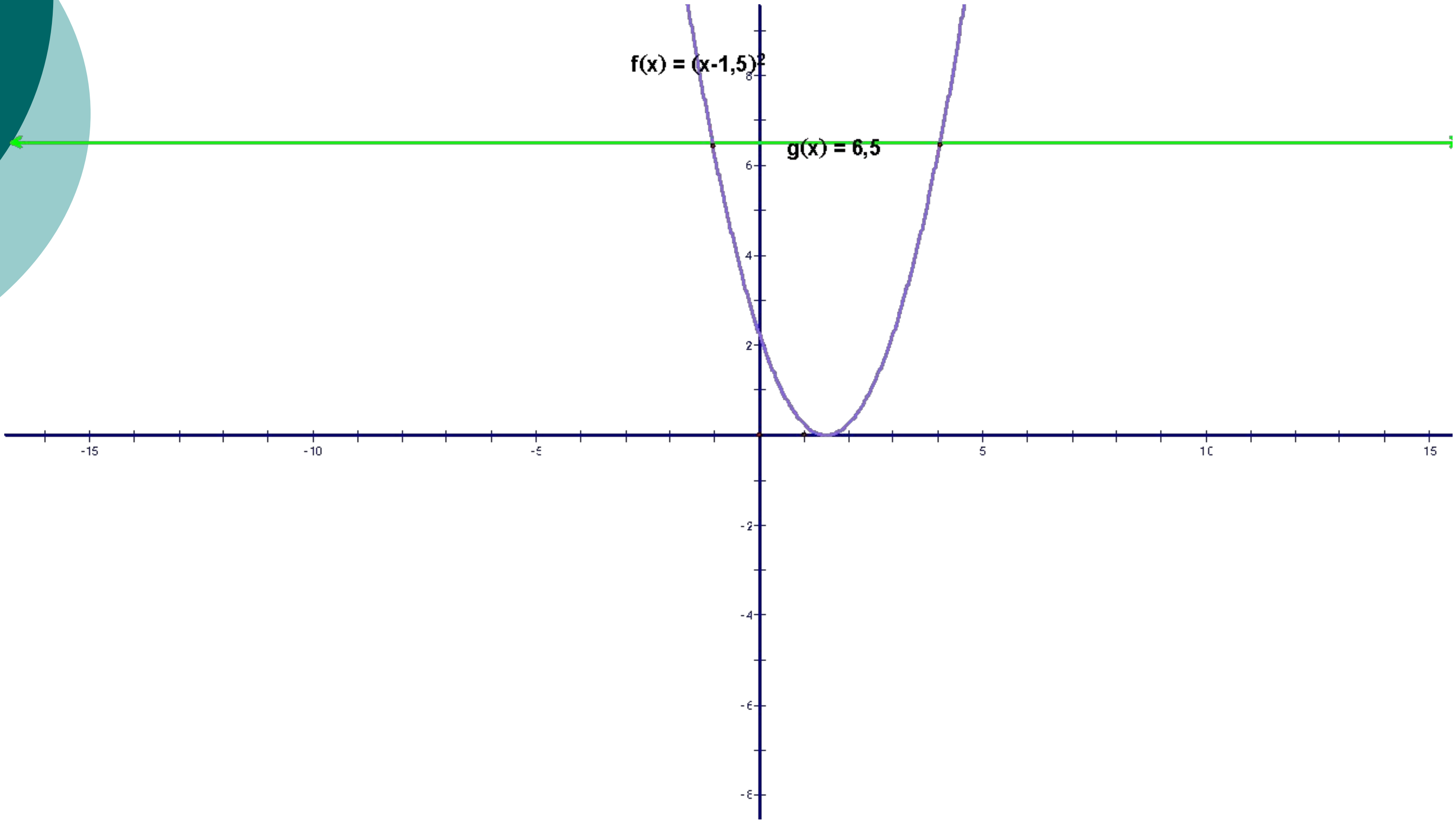
I способ



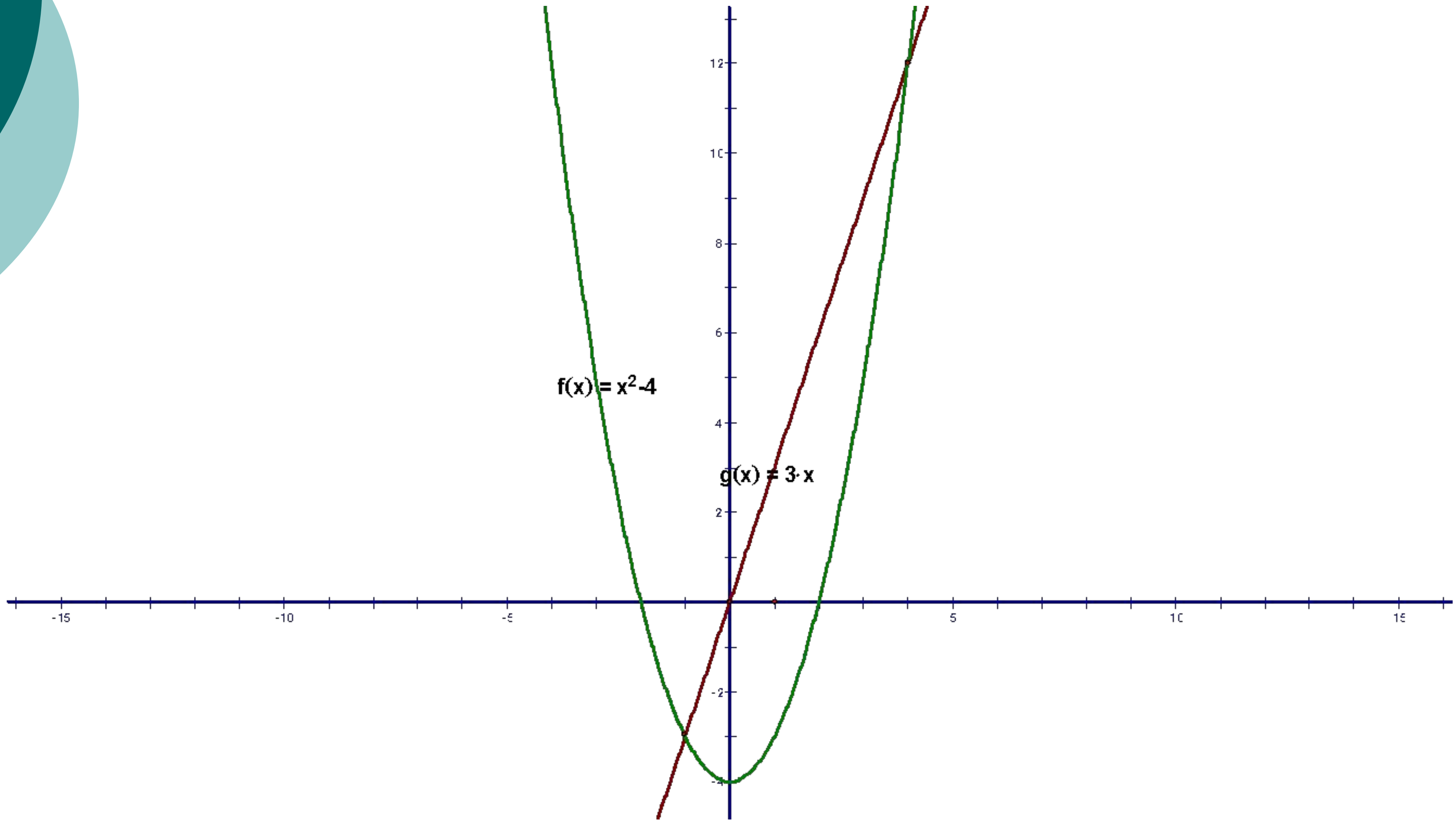
II способ



III способ



IV способ



V способ