

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) - основной метод современной строительной механики, лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов строительных конструкций на ЭВМ.

Метод конечных элементов впервые был применен в инженерной практике в начале 50-х гг. XX в. Первоначально он развивался по двум независимым один от другого направлениям – инженерному и математическому. На раннем этапе формулировки МКЭ основывались на принципах строительной механики, что ограничивало сферу его применения. И только когда были сформулированы основы метода в вариационной форме, стало возможным распространение его на многие другие задачи. Быстрое развитие МКЭ шло параллельно с прогрессом современной компьютерной техники и ее применением в различных областях науки и инженерной практики.

Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, основан на представлении реальной *континуальной* конструкции ее *дискретной моделью* и замене дифференциальных уравнений, описывающих НДС сплошных тел, системой алгебраических уравнений. Вместе с тем МКЭ допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию.

Суть метода заключается в том, что область (одно-, двух- или трехмерная), занимаемая конструкцией, разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам подобластей. Последние носят название *конечных элементов* (КЭ), а сам процесс разбивки – *дискретизацией*.

В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации КЭ могут иметь различную форму. Так, при расчете стержневых систем (фермы, балки, рамы) КЭ представляют собой участки стержней; для двумерных континуальных конструкций (пластины, плиты, оболочки) чаще всего применяют треугольные и прямоугольные (плоские или изогнутые) КЭ; а для трехмерных областей (толстые плиты, массивы) – КЭ в форме тетраэдра или параллелепипеда. В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в отдельных точках (*узлах*) определенным конечным числом *узловых параметров*.

Виды МКЭ

По способу получения основных, т. е. разрешающих, уравнений различают четыре основных вида метода конечных элементов: прямой, вариационный, взвешенных невязок и энергетического баланса.

Прямой метод аналогичен матричному методу перемещений для стержневых систем, в основе его лежат положения, которые использовались на ранней стадии развития МКЭ. Этот метод удобен своей простотой и очевидным геометрическо-физическим значением отдельных шагов аппроксимации. Соотношения для КЭ здесь строятся непосредственно на основе трех групп уравнений (*трех сторон задачи*): *статической, геометрической и физической.*

Однако область применения прямого метода весьма ограничена: его можно использовать лишь для конечных элементов простой геометрии с малым числом степеней свободы в узле.

Вариационный метод основан на принципах стационарности некоторой переменной, зависящей от одной или нескольких функций (такая переменная носит название *функционала*). Применительно к механике деформируемого твердого тела эта переменная представляет собой потенциальную (*функционал Лагранжа*) или дополнительную (*функционал Кастилиано*) энергию системы или формируется на основе этих двух энергий (*функционалы Хеллингера-Рейсснера, Ху-Вашицу*). Если в функционал подставить аппроксимирующие выражения искомых функций и применить к нему экстремальные принципы (соответственно *принцип Лагранжа, принцип Кастилиано* и т. д.), получим систему алгебраических уравнений, решением которой будут значения узловых неизвестных. В отличие от прямого вариационный метод может одинаково успешно применяться как к простым, так и сложным задачам.

Метод невязок представляет собой наиболее общий подход к построению основных соотношений МКЭ. Этот метод целесообразно применять при решении задач, у которых трудно или невозможно сформулировать вариационное уравнение, т.е. функционал. Суть метода взвешенных невязок заключается во введении некоторой *невязки* – отклонении приближенного аппроксимативного решения от точного решения дифференциальных уравнений для данной задачи. Чтобы получить "наилучшее" решение, необходимо минимизировать некоторый интеграл от невязок по расчетной области. Для повышения эффективности в подынтегральное выражение наряду с самой невязкой обычно вводится так называемая *весовая функция*, в этом случае метод называется *методом взвешенных невязок*. Выбор схемы минимизации и весовых функций определяет различные варианты метода невязок. Наиболее часто применяемые из них – это *метод Галеркина*, который приводит к тем же уравнениям, что и вариационный подход, а также *метод наименьших квадратов*.

Метод энергетического баланса (метод Одена) основан на балансе различных видов энергии, записанном в интегральной форме. Этот метод успешно применяется при решении нелинейных и динамических задач. Из приведенных видов МКЭ в строительной механике особенно актуальны вариационный метод и метод взвешенных невязок Галеркина, которые для рассматриваемой задачи представляют собой два взаимно дополняющих метода одинаковой точности. Широкое применение этих методов обусловлено тем, что выражения в функционале или во взвешенном интеграле, как правило, имеют низший порядок производных по сравнению с производными в соответствующем дифференциальном уравнении для данной задачи. Это позволяет выбирать аппроксимирующие функции из более широкого семейства простых функций. Можно сказать, что вариационный вид МКЭ вышел из классического метода Ритца, а метод Галеркина – из обобщенного метода Бубнова-Галеркина. В принципе, из других методов также выводятся соответствующие виды МКЭ, однако их применяют значительно реже.

Формы МКЭ

В МКЭ, аналогично классическим методам строительной механики, за основные неизвестные могут приниматься величины разного типа: кинематические (перемещения, деформации), статические (внутренние силы, напряжения и др.) или смешанные кинематические и статические параметры. В зависимости от выбора узловых неизвестных различают три формы МКЭ: метод перемещений, метод сил и смешанный метод. С этой точки зрения МКЭ можно рассматривать как обобщение традиционных методов строительной механики стержневых систем применительно к расчету континуальных систем.

Метод перемещений – в настоящее время наиболее распространенная форма МКЭ. Это объясняется тем, что для заданной конструкции легче получить кинематически определимую основную систему метода перемещений, нежели статически определимую основную систему метода сил. Кроме того, матрица жесткости метода перемещений составляется без особых затруднений и, как правило, имеет разряженную или ленточную структуру.

В основе математической формулировки МКЭ в форме метода перемещений лежит *вариационный принцип Лагранжа*, т. е. *принцип минимума потенциальной энергии системы*. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек дискретной схемы, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений.

К достоинствам метода относятся: простота реализации; удовлетворительные точность и устойчивость решения с гарантированной сходимостью к нижней границе. Минусы: точность определения напряжений намного ниже, чем перемещений, хотя именно значения напряжений важны при прочностных расчетах, к тому же поскольку приближенное решение отвечает нижней границе, то значения и перемещений, и напряжений оказываются заниженными.

Принцип минимума дополнительной энергии и связанные с ним схемы МКЭ в форме *метода сил*, а также *вариационный принцип Рейсснера (смешанный метод)* не получили такого широкого распространения. Однако во многих случаях они могут быть эффективны, особенно в отношении вычисления напряжений. К тому же выполнение двойственных расчетов на основе альтернативных форм МКЭ позволяет, как правило, получить двухстороннюю оценку точного решения соответствующей задачи.

Главным плюсом МКЭ в форме *метода сил* является то, что основные неизвестные здесь – напряжения. И если бы в реализации метода сил не было определенных сложностей, значения напряжений можно было получать той же степени точности, что и перемещения в методе перемещений. Кроме того, использование принципа Кастилиано дает верхнюю границу приближенного решения (т. е. напряжения завышены), что в принципе лучше при расчетах на прочность, нежели заниженная оценка. Тем не менее, пока нет алгоритмов, в той же степени простых и устойчивых, имеющих гарантированную сходимость в обширном классе задач, подобно МКЭ в форме метода перемещений.

Аппроксимация

МКЭ относится к методам дискретного анализа. Однако в отличие от численных методов, основывающихся на математической дискретизации дифференциальных уравнений, МКЭ базируется на физической дискретизации рассматриваемого объекта. Реальная конструкция как сплошная среда с бесконечно многим числом степеней свободы заменяется дискретной моделью связанных между собой элементов с конечным числом степеней свободы. Так как число возможных дискретных моделей для континуальной области неограниченно велико, то основная задача заключается в том, чтобы выбрать такую модель, которая лучше всего аппроксимирует данную область.

Сущность аппроксимации сплошной среды по МКЭ состоит в следующем:

- 1) рассматриваемая область разбивается на определенное число КЭ, семейство элементов по всей области называется *системой* или *сеткой конечных элементов*;
- 2) предполагается, что КЭ соединяются между собой в конечном числе точек – *узлов*, расположенных по контуру каждого из элементов;
- 3) искомые функции в пределах каждого КЭ (например, распределение перемещений, деформаций, напряжений и т. д.) с помощью *аппроксимирующих функций* выражаются через узловые значения, представляющие собой *основные неизвестные МКЭ*;
- 4) для анализа и расчета полученной системы конечных элементов действительны все принципы и методы, применяемые для любых дискретных систем.

Аппроксимирующие функции

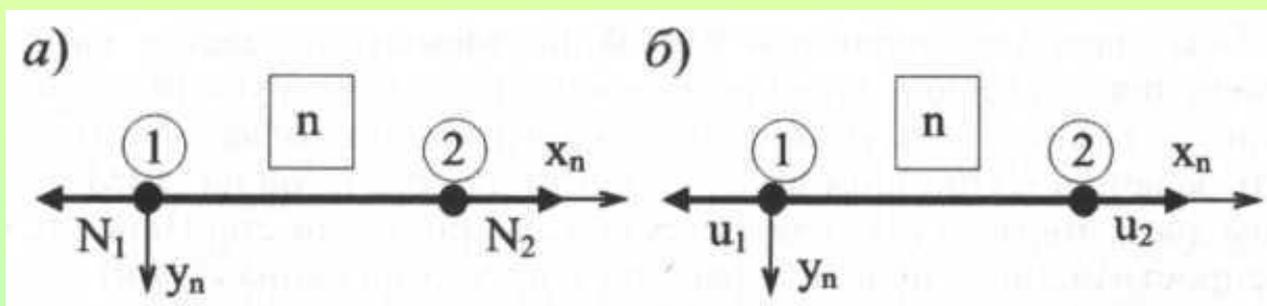
Аппроксимация, как правило, дает приближенное, а не точное, описание действительного распределения искомых величин в элементе. Поэтому результаты расчета конструкции в общем случае также являются приближенными. Закономерно может быть поставлен вопрос о точности, устойчивости и сходимости решений, полученных МКЭ.

Под ***точностью*** понимается отклонение приближенного решения от *точного* или *истинного решения*.

Устойчивость, прежде всего, определяется ростом *ошибок* при выполнении отдельных вычислительных операций. Неустойчивое решение является результатом неудачного выбора аппроксимирующих функций, «плохой» разбивки области на КЭ, некорректного представления граничных условий ит.п.

Под ***сходимостью*** подразумевается постепенное приближение последовательных решений к *предельному*, по мере того как уточняются параметры дискретной модели, такие как размеры элементов, степень аппроксимирующих функций и т. п. В этом смысле понятие сходимости аналогично тому значению, которое оно имеет в обычных итерационных процессах.

Выделенный элемент конструкции имеет те же свойства, что и конструкция в месте расположения элемента. Благодаря такому подходу удастся унифицировать виды конечных элементов (КЭ), которые разделяются на конечное число групп одинаковых по форме и свойствам элементов. Деформированное состояние элементов подбирается так, чтобы на границах элементов выполнялись условия равновесия и совместности деформаций.

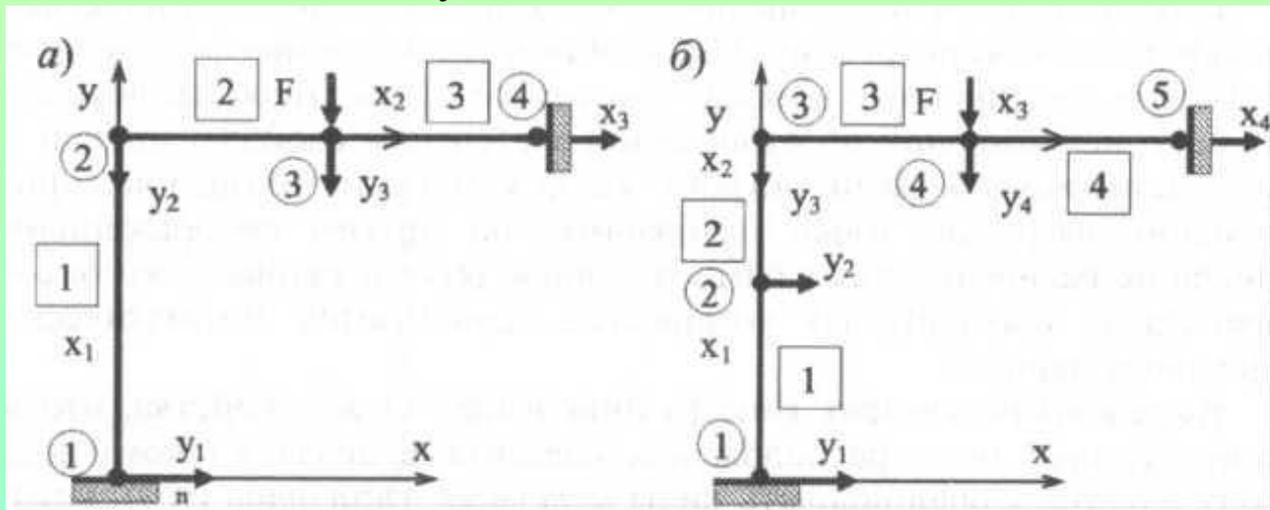


Неизвестные величины перемещений и усилий приводятся к узлам конечно-элементного разбиения. Например, в задачах, где в элементах конструкции реализуется растяжение (сжатие), стержневой элемент имеет две степени свободы при выборе неизвестных в виде узловых усилий (рис. а) или перемещений (рис. б). В зависимости от постановки задачи в каждом узле n -го элемента (1 или 2) имеется неизвестная величина с номером, соответствующим номеру узла.

Для каждого элемента можно выбрать оси, в которых можно записывать геометрические или статические условия. Эти оси называют локальными осями элемента. По умолчанию принимается, что ось x совпадает с осью стержня и направлена от узла с меньшим номером к узлу с большим номером. Остальные две оси должны образовать правостороннюю систему координат с существующей.

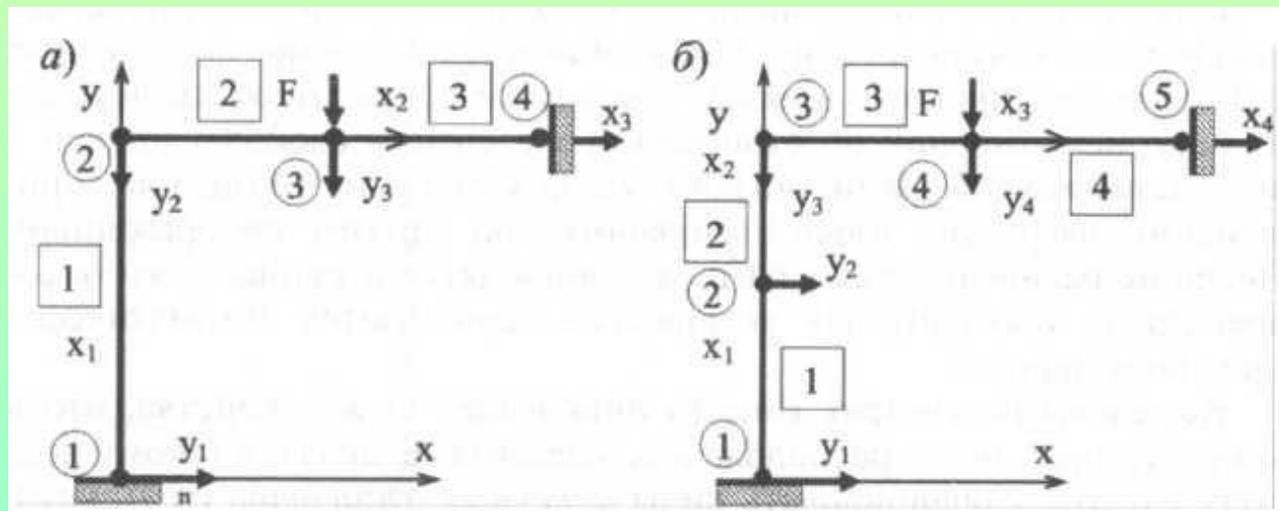
При разбивке системы на конечные элементы необходимо учитывать возможные формы деформирования. Например, в задаче изгиба (рис. а) минимально возможное количество конечных элементов 3. В задаче устойчивости (рис. б) минимально возможное количество элементов составляет 4, так как необходимо описать возможные отклонения стойки вследствие потери устойчивости.

Теоретически, чем чаще разбиение, тем точнее решение. Но в этом случае возникают трудности при решении системы уравнений, когда матрица жесткости системы становится плохо обусловленной.



Для системы в целом задаются произвольно выбранные оси, которые называются глобальными осями. На рисунке это оси x и y , которые так же, как и локальные, должны образовывать правостороннюю систему координат. Они необходимы для обеспечения взаимной ориентации между элементами, локальные оси которых, в общем случае, не совпадают с направлением глобальных.

Благодаря унификации и типизации элементов удается записать уравнения состояния конечного элемента и конструкции единообразно и кратко. Метод конечных элементов позволяет формализовать задачу в матричном виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Большим достоинством МКЭ является его алгоритмичность. Наибольшее распространение в практике расчета и проектирования конструкций получил вариант МКЭ в перемещениях (в качестве искомым неизвестных принимаются перемещения рассчитываемой системы), который будет рассмотрен ниже.



Задачи статики, решаемые с помощью МКЭ, сводятся к следующим основным этапам:

1. Разбиение системы на конечные элементы. Рассчитываемая конструкция разбивается воображаемыми точками на элементы конечных размеров (конечные элементы). Предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на их границах. В некоторых задачах строительной механики в качестве искомым неизвестных помимо узловых перемещений принимаются также их частные производные.

2. Построение интерполирующих функций. Выбирается система функций (чаще всего кусочно-полиномиальная), однозначно определяющая перемещения внутри каждого конечного элемента через перемещения узловых точек. Интерполирующие функции подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность искомым величин (перемещений и их производных) в узлах элементов.

3. Вывод основных геометрических и физических соотношений. На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

4. Построение матрицы жесткости конечного элемента и вектора узловых нагрузок. С помощью принципа Лагранжа на основе полученных геометрических и физических соотношений строится матрица жесткости конечного элемента и вектор узловых нагрузок.

5. Переход от локальных координат к глобальным координатам системы. Перед тем, как включить матрицу жесткости КЭ в глобальную матрицу жесткости всей конструкции, ее необходимо преобразовать из местной системы координат в общую для всей конструкции систему координат.

6. Получение системы уравнений метода конечных элементов. Каждая матрица жесткости отдельного конечного элемента включается в глобальную матрицу жесткости в цикле по элементам. Таким образом, формируется система алгебраических уравнений всей конструкции (уравнения равновесия), которая имеет вид:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{P}$$

где \mathbf{R} - матрица жесткости системы (ансамбля) конечных элементов; \mathbf{z} — вектор неизвестных узловых перемещений, \mathbf{P} - вектор узловых нагрузок.

В матрице жесткости \mathbf{R} системы уравнений необходимо учесть граничные условия, так как в противном случае эта матрица будет вырожденной.

7. Решение системы алгебраических уравнений. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используются как точные, так и итерационные методы (при высоком порядке системы). Численные процедуры решения учитывают симметрию и ленточную структуру матрицы жесткости системы.

8. Определение деформаций и напряжений. Деформации, напряжения и усилия в конструкции определяются с помощью найденных узловых перемещений на основе геометрических и физических соотношений.

РАЗБИЕНИЕ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Данный этап включает в себя разбиение системы на конечные элементы, выбор степеней свободы и видов конечных элементов, задание количества степеней свободы в узлах.

Разбиение стержневой системы на конечные элементы представляет собой первый и весьма важный шаг в процедуре решения задачи по МКЭ, поскольку от него во многом зависит точность получаемого решения. Успех на этом этапе зависит, в первую очередь, от имеющихся инженерных навыков. Неудачно выполненное разбиение конструкции на конечные элементы может привести к ошибочным результатам. При назначении размеров КЭ возникает задача оптимального разбиения конструкции на подобласти. При этом следует иметь в виду, что размеры элементов должны быть достаточно малыми для того, чтобы обеспечить приемлемую точность решения, с другой стороны, использование мелких КЭ приводит к большим системам алгебраических уравнений, решение которых связано со значительным объемом вычислительной работы.

В процессе разбиения конструкции на конечные элементы необходимо учитывать некоторые общие представления об окончательных результатах расчета для того, чтобы уменьшить размеры конечных элементов в зонах концентрации напряжений, где искомые величины быстро меняются, и увеличить размеры КЭ там, где искомые величины меняются медленно.

РАЗБИЕНИЕ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Важным моментом в процессе решения задачи по МКЭ является нумерация узлов КЭ, поскольку от этого зависит ширина ленты матрицы разрешающих уравнений и соответственно время счета и объем используемой памяти ЭВМ.

В настоящее время разработаны сервисные программы автоматизированной разбивки конструкции на конечные элементы и рациональной нумерации узлов.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

МКЭ основан на аппроксимации непрерывной функции, определенной на всей области, дискретной моделью с помощью кусочнонепрерывных функций, определенных на подобластях (конечных элементах).

Перемещения, являющиеся функциями координат произвольной точки конечного элемента, записываются через компоненты вектора узловых перемещений с помощью интерполирующей функции (функции формы или базисной функции):

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nz}$$

где $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_s]$ - матрица функции формы, $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_s)^T$ - вектор узловых перемещений КЭ; s - количество степеней свободы КЭ.

Данные функции должны удовлетворять критериям полноты и совместности:

Критерий полноты. Интерполирующая функция должна обеспечивать постоянные значения рассматриваемых величин при уменьшении размеров элемента.

Для выполнения этого условия интерполирующая функция должна представлять собой полный полином как минимум степени p , где p - наивысший порядок производной в подынтегральном выражении функционала энергии.

Условие полноты удовлетворяется в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^s N_i = 1$$

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Критерий совместности. Интерполирующая функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до $(p-1)$ -го порядка включительно на границе между элементами.

Критерии полноты и совместности представляют собой достаточные условия сходимости метода конечных элементов. При их выполнении с уменьшением размеров конечного элемента приближенные решения МКЭ монотонно сходятся к точному решению. Сказанное отнюдь не означает, что нарушение данных критериев приводит к невозможности получения достоверного решения. Существуют несовместные, и даже неполные элементы, которые дают высокую точность и быструю сходимость.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

В общем виде зависимость между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения) записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{z},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ - вектор, содержащий компоненты тензора деформаций; \mathbf{z} - вектор узловых перемещений; \mathbf{B} - матрица, связывающая вектор узловых перемещений с вектором, содержащим компоненты тензора деформаций.

Таким образом, полагается, что зависимость между деформациями и узловыми перемещениями носит линейный характер. Линейной зависимости отвечают такие условия работы конструкции, когда деформации и углы поворота малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота малы по сравнению с соответствующими компонентами деформации.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Физические соотношения, определяющие зависимость между напряжениями и деформациями, имеют вид

$$\sigma = D\varepsilon,$$

где σ - вектор, содержащий компоненты тензора напряжений; D - матрица упругости.

Уравнения физических соотношений (уравнения состояния) представляют собой обобщенный закон Гука, устанавливающий прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями и справедливый для определенного класса материалов на определенном участке графика σ - ε .

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА И ВЕКТОРА УЗЛОВЫХ НАГРУЗОК

Полная потенциальная энергия упругой системы определяется по формуле:

$$\Pi(\mathbf{z}) = W(\mathbf{z}) - A(\mathbf{z})$$

где W - потенциальная энергия деформации; A - потенциал внешних сил.

Потенциальная энергия деформации упругой системы определяется соотношением:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV,$$

где V — объем, занимаемый телом, а потенциал внешних распределенных нагрузок определяется по формуле:

$$A = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS,$$

где \mathbf{p} - вектор внешних распределенных нагрузок; S - площадь, на которой приложена нагрузка.

При этом деформации и напряжения, входящие в выражение для потенциальной энергии, так же выражаются через узловые перемещения.

Получение уравнений МКЭ в перемещениях основано на одном из фундаментальных энергетических принципов механики - принципе Лагранжа, согласно которому для системы, находящейся в состоянии равновесия, полная потенциальная энергия принимает стационарное значение.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА И ВЕКТОРА УЗЛОВЫХ НАГРУЗОК

Это условие записывается в виде: $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = 0$

Значение полной потенциальной энергии для всей области V равно сумме энергий отдельных конечных элементов:

$$\Pi = \sum_{k=1}^m \Pi_k = \sum_{k=1}^m (W_k - A_k),$$

где m - количество конечных элементов.

Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial W_k}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial A_k}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0.$$

Рассмотрим отдельный конечный элемент, индекс k при этом опускаем. Полная потенциальная энергия КЭ с учетом полученных формул запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = W - A &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{z})^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{z} dV - \int_S (\mathbf{N}\mathbf{z})^T \mathbf{p} dS = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV \right) \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R}\mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{P}, \end{aligned}$$

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА И ВЕКТОРА УЗЛОВЫХ НАГРУЗОК

где матрица

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

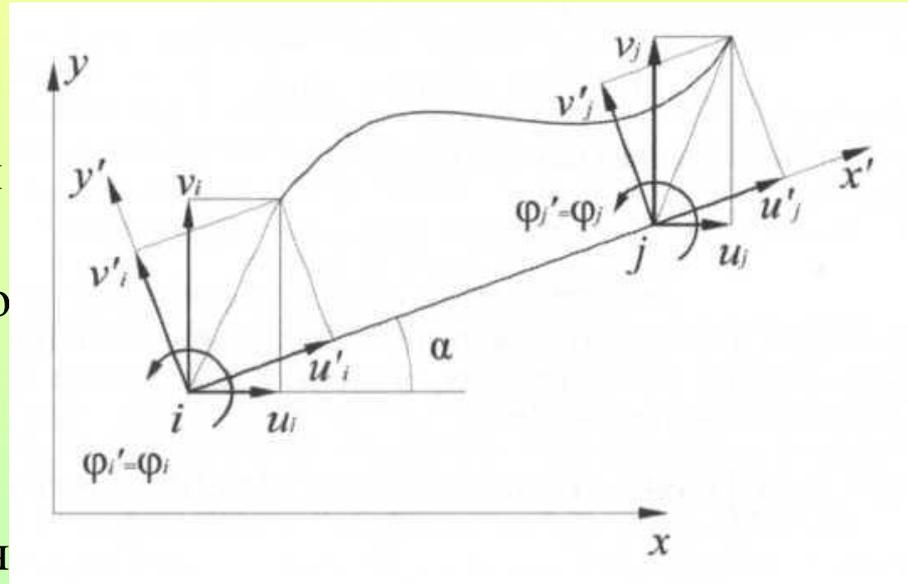
представляет собой матрицу жесткости конечного элемента, а

$$\mathbf{P} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS$$

есть вектор узловых нагрузок.

ПЕРЕХОД ОТ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЛОБАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ СИСТЕМЫ

В процессе решения задачи по МКЭ в большинстве случаев возникает необходимость введения местной и общей систем координат. Плоская стержневая система состоит, как правило, из большого количества элементов, которые могут иметь различную ориентацию. Поэтому каждый стержень, входящий в состав стержневой конструкции, рассматривается



в двух системах координат - местной (локальной), связанной с осью стержня, и общей (глобальной). Рассмотрим стержень, входящий в состав плоской стержневой системы, который имеет три перемещения (три степени свободы) в каждом узле: u , v , φ . На рис. показан конечный элемент до и после деформации и отмечены компоненты вектора перемещений. Начальный узел конечного элемента обозначен через « i », конечный узел - через « j ».

Учитывая, что углы поворота в начальной и конечной точках стержня φ'_i и φ'_j при преобразовании координат не меняются, получим:

ПЕРЕХОД ОТ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЛОБАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ СИСТЕМЫ

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \varphi_i; & u_i' &= u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha; & v_i' &= -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha; \\ \varphi_j' &= \varphi_j; & u_j' &= u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha; & v_j' &= -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha. \end{aligned}$$

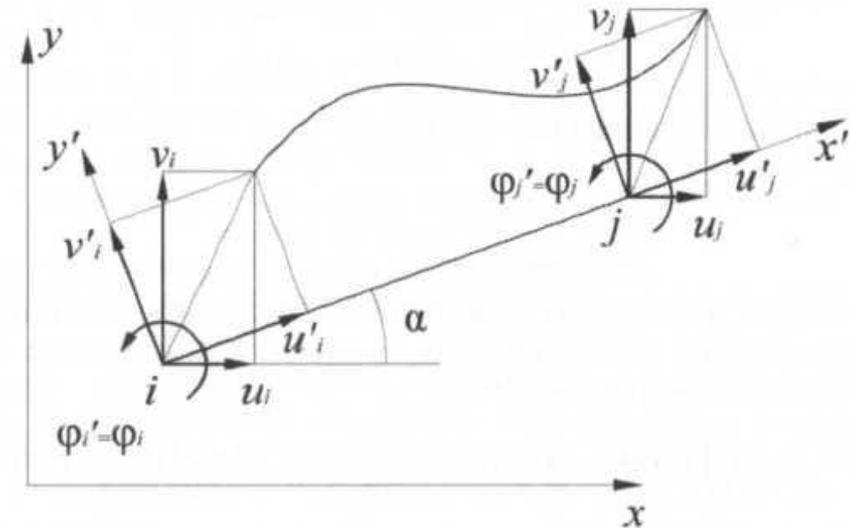
В матричной форме зависимость между перемещениями узлов отдельного стержня в местной и общей системе координат имеет вид:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{V} \mathbf{z},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (u_i' \quad v_i' \quad \phi_i' \quad u_j' \quad v_j' \quad \phi_j')^T, \\ \mathbf{z} &= (u_i \quad v_i \quad \phi_i \quad u_j \quad v_j \quad \phi_j)^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



ПЕРЕХОД ОТ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЛОБАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ СИСТЕМЫ

Значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ вычисляются через координаты узлов конечного элемента по формулам:

$$\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}.$$

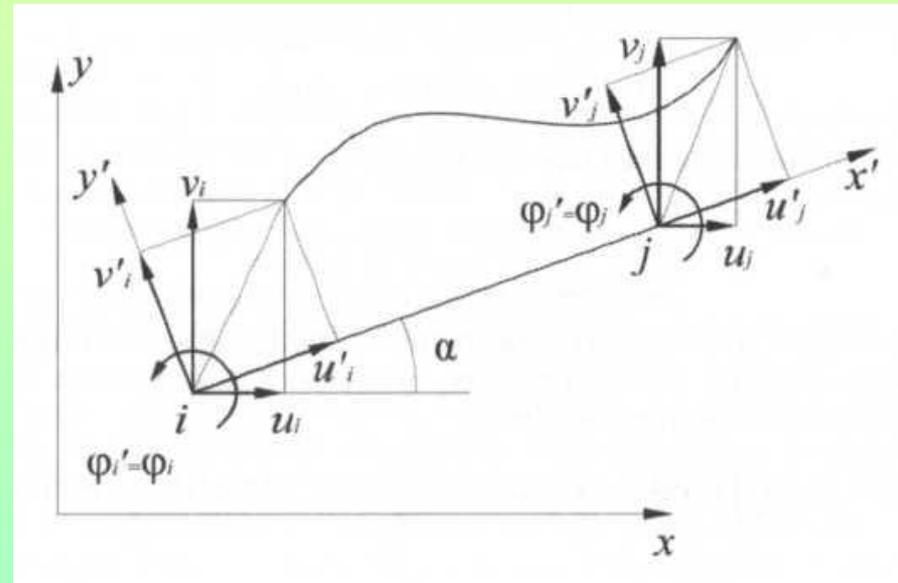
Матрица преобразования координат \mathbf{V} является ортогональной матрицей и для нее $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$. Тогда

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{z}'.$$

Первоначально матрица жесткости для стержня строится в местной системе координат $x'y'$, связанной с осью стержня.

Перед тем, как включить эту матрицу в единую матрицу жесткости всей конструкции, ее необходимо преобразовать из местной системы

координат в общую для всей конструкции систему координат xu



ПЕРЕХОД ОТ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЛОБАЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ СИСТЕМЫ

Для получения зависимости между матрицами жесткости в системах координат $x'u'$ и xu используется свойство инвариантности потенциальной энергии деформации конечного элемента, состоящее в том, что значение потенциальной энергии деформации не зависит от выбранной системы координат. Приравняем выражения энергии конечных элементов в местной и общей системах координат:

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}'^T \mathbf{R}' \mathbf{z}' = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}.$$

Учитывая $\mathbf{z}' = \mathbf{V} \mathbf{z}$, получим

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{V}^T \mathbf{R}' \mathbf{V} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}.$$

Сравнивая левую и правую части данного соотношения, находим :

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^T \mathbf{R}' \mathbf{V}.$$

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для выполнения операции суммирования необходимо преобразовать векторы узловых перемещений \mathbf{z}_k и узловой нагрузки \mathbf{P}_k для отдельного k -го конечного элемента в соответствующие векторы \mathbf{z} и \mathbf{P} для всей системы, что может быть сделано с помощью некоторой матрицы \mathbf{H}_k , содержащей в качестве элементов только нули и единицы:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{z}, \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Подстановка данных формул в выражение для полной потенциальной энергии конечного элемента дает:

$$\begin{aligned}\Pi_k(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{H}_k \mathbf{z})^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - (\mathbf{H}_k \mathbf{z})^T \mathbf{H}_k \mathbf{P} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Дифференцирование данного выражения по \mathbf{z} , в соответствии с условием приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = 0$$

$$\sum_{k=1}^m (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}) = 0$$

$$\mathbf{Rz} = \mathbf{P},$$

где использовано правило дифференцирования матричных соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}^T \mathbf{Rz}) = 2\mathbf{Rz}.$$

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Полученная система представляет собой систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, являющихся уравнениями равновесия в перемещениях. Как правило, решение системы выполняется методом Гаусса или итерационными методами.

Матрица жесткости отдельного элемента $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k$, фигурирующая в полученном уравнении, представляет собой расширенную матрицу, размерность которой равна размерности глобальной матрицы. Поэтому использование процедуры суммирования в форме

$$\sum_{k=1}^m (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k \mathbf{z} - \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}) = 0$$

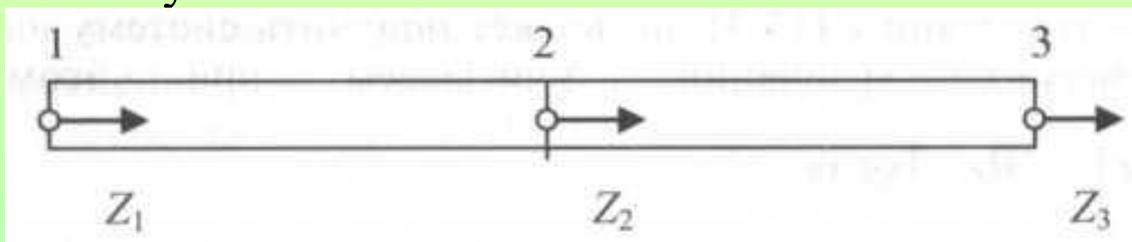
при численной реализации МКЭ неэффективно. В практических расчетах выполняется прямое построение глобальной матрицы жесткости. В этом случае строится матрица \mathbf{R} для отдельного конечного элемента по формуле

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

имеющая размерность $s^x s$. Затем строкам и столбцам этой матрицы приписываются номера глобальных степеней свободы, что позволяет определить местоположение элементов матрицы жесткости КЭ в глобальной матрице жесткости.

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Перед началом формирования глобальной матрицы всем ее элементам присваиваются нулевые значения. После этого в глобальную матрицу заносятся элементы матрицы жесткости КЭ на то место, которое определено их адресом. Пусть, например, система состоит из двух КЭ, содержащих по два узла, в каждом из которых имеется одно неизвестное (одна степень свободы). Общее количество узлов системы - 3, размерность глобальной матрицы 3x3, элементы соединены между собой во 2-м узле.



Матрицы жесткости 1-го и 2-го КЭ с соответствующей нумерацией элементов и глобальная матрица имеют вид:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix}; \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & 0 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 \\ 0 & \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{bmatrix}$$

где верхний индекс указывает номер КЭ, нижние индексы соответствуют номерам строки и столбца в глобальной матрице.

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Система уравнений МКЭ для конструкции может быть получена непосредственно из условия минимума квадратичной функции

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial W_k}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial A_k}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} \Pi = W - A &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{Bz})^T \mathbf{DBz} dV - \int_S (\mathbf{Nz})^T \mathbf{p} dS = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dV \right) \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Rz} - \mathbf{z}^T \mathbf{P}, \end{aligned}$$

запишем выражение для полной потенциальной энергии в виде:

$$\Pi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \mathbf{z}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}.$$

Пусть, как и в предыдущем примере, система состоит из двух КЭ, содержащих по два узла, в каждом из которых имеется одно неизвестное (одна степень свободы). Общее количество узлов - 3, общее количество узловых неизвестных - 3, размерность глобальной матрицы 3x3, элементы соединены между собой во 2-м узле.

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Выражение для полной потенциальной энергии может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (\mathbf{z}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{z}_k - 2\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}) = \frac{1}{2} (\mathbf{z}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T \mathbf{R}_2 \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1^T \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{z}_2^T \mathbf{P}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2) \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3) \begin{bmatrix} r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - 2(\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2) \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3) \begin{pmatrix} P_2^2 \\ P_3^2 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Дифференцирование представленной выше квадратичной функции, позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений. Учитываем при этом, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}) = 2\mathbf{R} \mathbf{z}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} (2r_{11}^1 z_1 + r_{12}^1 z_2 + r_{21}^1 z_2 - 2P_1^1) = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} &= \frac{1}{2} (r_{12}^1 z_1 + r_{21}^1 z_1 + 2r_{22}^1 z_2 + 2r_{22}^2 z_2 + r_{23}^2 z_3 + r_{32}^2 z_3 - 2P_2^1 - 2P_2^2) = 0 \\ &, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z_3} &= \frac{1}{2} (2r_{23}^2 z_2 + r_{32}^2 z_2 + 2r_{33}^2 z_3 - 2P_3^2) = 0,\end{aligned}$$

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_{11}^1 & (r_{12}^1 + r_{21}^1)/2 & 0 \\ (r_{12}^1 + r_{21}^1)/2 & r_{22}^1 + r_{22}^2 & (r_{23}^2 + r_{32}^2)/2 \\ 0 & (r_{23}^2 + r_{32}^2)/2 & r_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица жесткости конечного элемента симметрична, то есть

$$r_{ij}^k = r_{ji}^k, (k = 1, 2, 3, \dots, m; i, j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

то система уравнений (без учета граничных условий) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & 0 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 + r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ 0 & r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \end{pmatrix}.$$

В матрице жесткости \mathbf{R} системы уравнений необходимо учесть граничные условия, в противном случае она будет вырожденной, т. е. ее определитель будет равен нулю.

ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Учет граничных условий может быть осуществлен различными способами:

1. Из матрицы \mathbf{R} удаляются i -я строка и i -й столбец, соответствующие перемещению $z_i=0$. После этого строки и столбцы матрицы перенумеровываются. Соответственно уменьшается размерность вектора узловых перемещений.
2. Уравнение $z_i=0$, соответствующее граничному условию, формируется в составе матрицы \mathbf{R} . Для получения $z_i=0$ в матрице \mathbf{R} i -я строка и i -й столбец, а также соответствующий элемент в векторе внешних нагрузок \mathbf{P} заполняются нулями. На место диагонального элемента r_{ii} в матрице \mathbf{R} ставится единица. В результате порядок матрицы не изменяется, а заданные перемещения получают нулевые значения.
3. Для получения уравнения $z_i=0$ диагональный элемент r_{ii} умножается на большое число. Порядок матрицы при этом не меняется.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы - точные (прямые) и итерационные. Точные методы позволяют получить решение системы линейных уравнений за конечное число арифметических операций (метод Гаусса, метод квадратного корня, правило Крамера и т. д.).

Использование итерационных методов дает возможность найти приближенное решение системы с заданной степенью точности (метод простой итерации, метод Зейделя, метод последовательной релаксации).

Большинство известных алгоритмов прямого решения системы алгебраических уравнений МКЭ основано на методе Гаусса. При этом учитываются симметрия, положительная определенность, ленточная структура глобальной матрицы жесткости системы. В процессе исключения по Гауссу матрица коэффициентов с помощью прямого хода сводится к верхней треугольной форме, из которой обратным ходом находятся неизвестные перемещения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ

В результате решения системы уравнений МКЭ определяется вектор узловых перемещений всей конструкции. Для вычисления усилий в отдельном стержне плоской стержневой системы вначале из вектора узловых перемещений всей конструкции выделяется вектор узловых перемещений конечного элемента \mathbf{z}_k . Затем этот вектор переводится в вектор \mathbf{z}'_k в локальной системе координат по формуле

$$\mathbf{z}' = \mathbf{V}\mathbf{z},$$

Далее, с помощью матрицы жесткости конечного элемента \mathbf{R}'_k , в местной системе координат определяются усилия на концах стержня по формуле:

$$\mathbf{r}'_k = \begin{pmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{pmatrix} = \mathbf{R}'_k \mathbf{z}'_k,$$

где N_i, Q_i, M_i - соответственно продольное и поперечное усилия и изгибающий момент в начальной точке КЭ; N_j, Q_j, M_j - то же в конечной точке КЭ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ

Ранее было принято правило знаков, согласно которому положительные направления усилий совпадают с положительными направлениями перемещений. В то же время в строительной механике принято особое правило знаков. Поэтому для приведения знаков полученного решения в соответствие с правилами строительной механики, достаточно в первом, третьем и пятом элементах вектора \mathbf{r}_k' поменять знаки на противоположные.

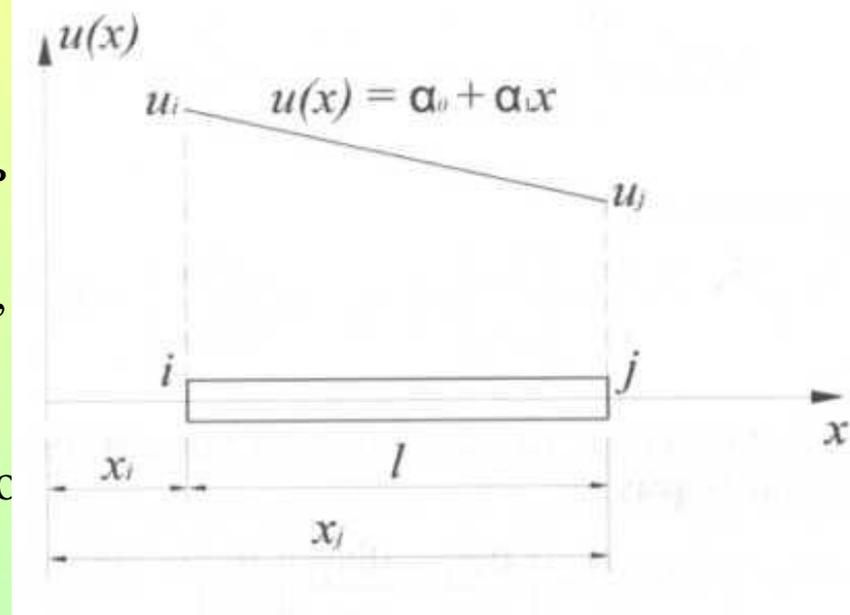
КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ СТЕРЖНЯ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. ПРИМЕР РАСЧЕТА.

Этот конечный элемент представляет собой прямолинейный отрезок длиной l с двумя узлами. В каждом узле имеется одна степень свободы - продольное перемещение u .

Здесь и далее апостроф, указывающий на то, что матрица жесткости построена в местной системе координат опускается.

Интерполирующая функция для продольного перемещения принимается в виде:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x .$$



Линейная функция будет точно описывать продольные перемещения на участках стержня между точками приложения сосредоточенных сил.

Коэффициенты α_0 и α_1 , определяются с помощью граничных условий:

при $x=x_i$ $u=u_i$;

при $x=x_j$ $u=u_j$.

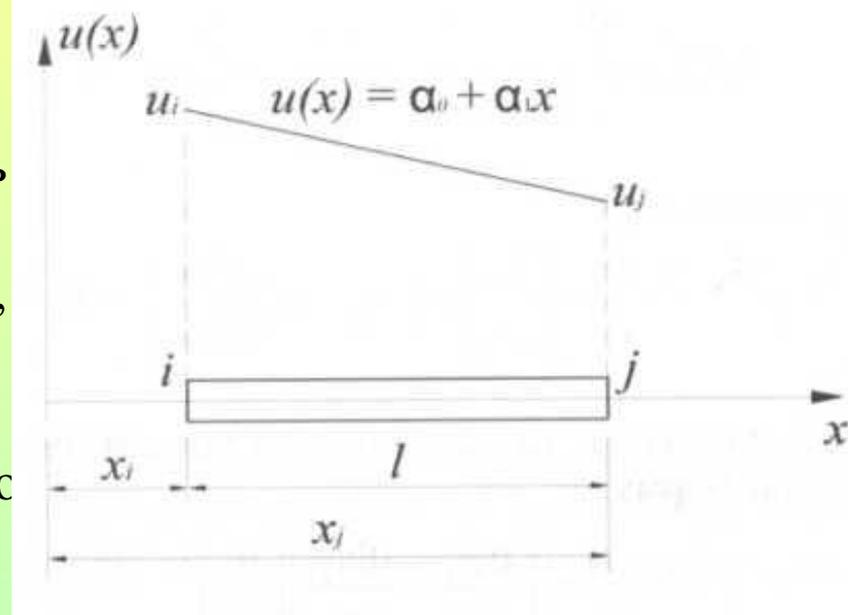
КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ СТЕРЖНЯ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. ПРИМЕР РАСЧЕТА.

Этот конечный элемент представляет собой прямолинейный отрезок длиной l с двумя узлами. В каждом узле имеется одна степень свободы - продольное перемещение u .

Здесь и далее апостроф, указывающий на то, что матрица жесткости построена в местной системе координат опускается.

Интерполирующая функция для продольного перемещения принимается в виде:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x .$$



Линейная функция будет точно описывать продольные перемещения на участках стержня между точками приложения сосредоточенных сил.

Коэффициенты α_0 и α_1 , определяются с помощью граничных условий:

при $x=x_i$ $u=u_i$;

при $x=x_j$ $u=u_j$.