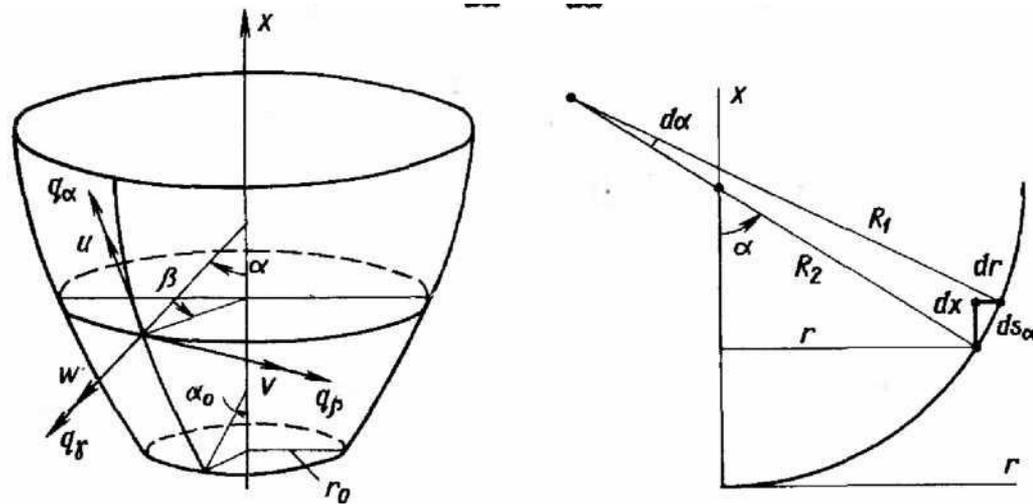


Оболочки

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Геометрические соотношения

Срединная поверхность оболочки вращения получается в результате вращения плоской кривой относительно оси, лежащей в плоскости этой кривой. Такая кривая называется меридианом. Меридианы являются линиями главной кривизны и их принимают в качестве координатных линий.



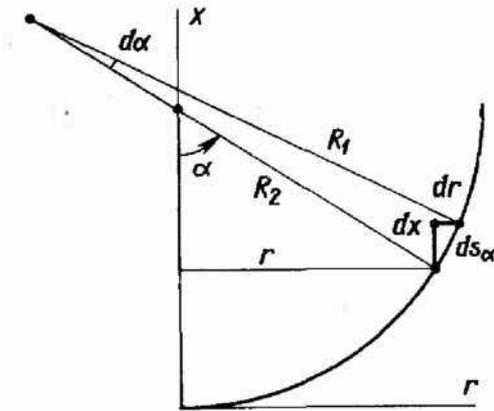
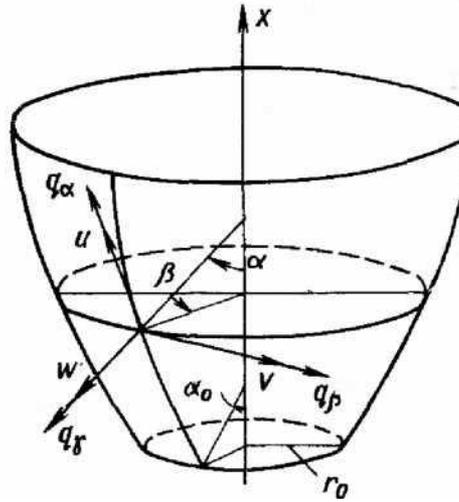
Параллели — окружности, образованные пересечением срединной поверхности оболочки с плоскостями, перпендикулярными ее оси, — представляют семейство других координатных линий. В качестве криволинейных координат, отсчитываемых вдоль меридианов и параллелей, возьмем углы α и β : α — угол, который нормаль образует с осью оболочки, β — угол, отсчитываемый вдоль параллели от некоторой заданной меридиональной плоскости

Первый главный радиус кривизны поверхности вращения R_1 равен радиусу кривизны меридиана. Второй главный радиус R_2 равен отрезку нормали к поверхности до оси вращения, т. е. согласно рисунку

$$R_2 = \frac{r}{\sin \alpha} \quad \text{где } r \text{ — радиус параллели.}$$

Радиусы R_1 и R_2 не являются независимыми. Действительно, из рисунка следует, что, с одной стороны, $ds_\alpha = R_1 \cdot d\alpha$, а с другой — $ds_\alpha = dr / \cos \alpha$, т.е. $R_1 \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = dr$. Подставляя сюда dr , получим:

$$R_1 \cdot \cos \alpha = \frac{dr}{d\alpha} = \frac{d(R_2 \cdot \sin \alpha)}{d\alpha}$$



Формула для линейного элемента поверхности вращения имеет вид:

$$ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 = R_1^2 \cdot d\alpha^2 + r^2 \cdot d\beta^2 \quad \text{т.е.} \quad A = R_1, \quad B = r$$

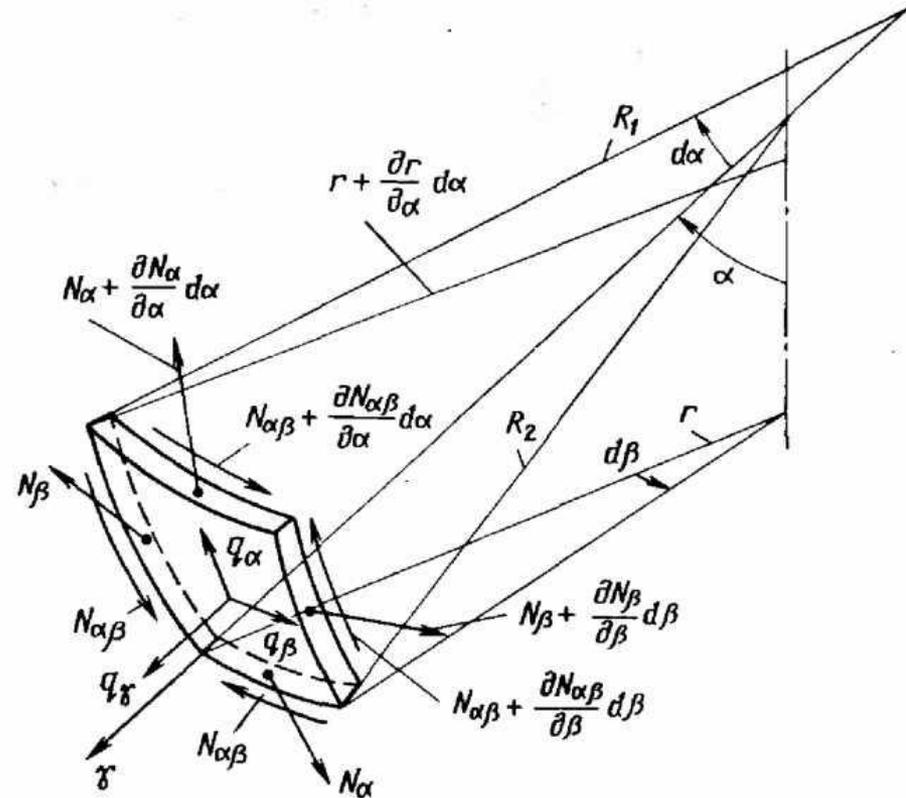
Осевая координата x связана с углом α следующим соотношением

$$dx = ds_\alpha \cdot \sin \alpha = R_1 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Основные соотношения безмоментной теории оболочки

Уравнения безмоментной теории могут быть получены из общих уравнений теории оболочек, если принять, что изгибная жесткость оболочки $D=0$. Однако, учитывая практическую важность безмоментной теории, эти уравнения выводятся традиционным путем в результате непосредственного анализа равновесия и геометрии деформирования оболочки.

Итак, рассмотрим тонкую оболочку вращения, считая, что она находится в безмоментном напряженном состоянии.



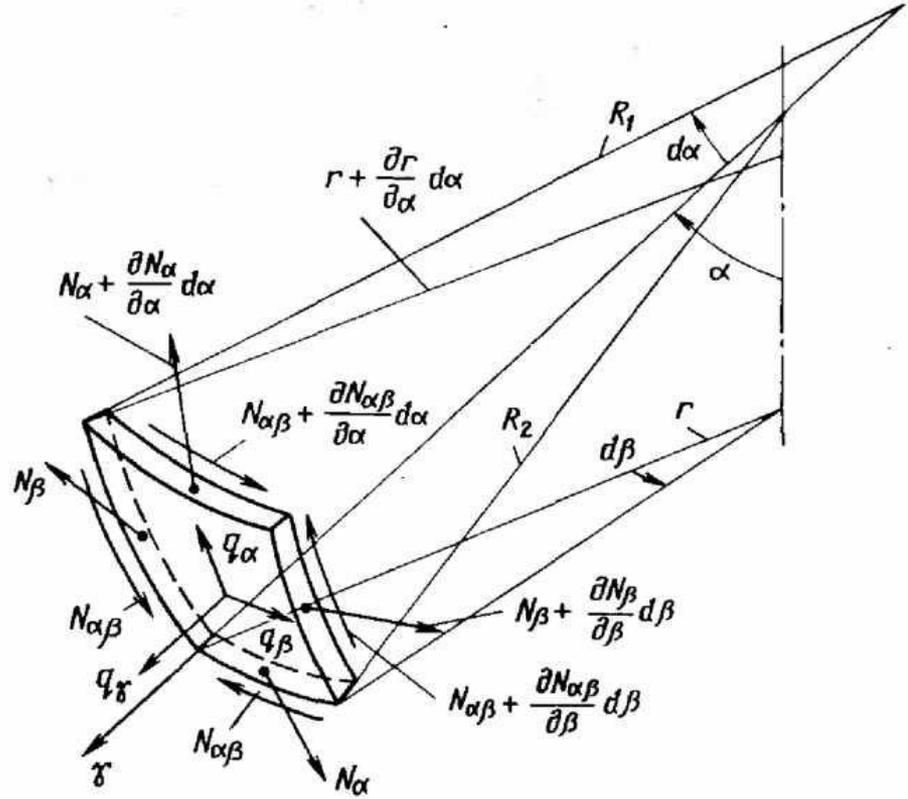
Выделим бесконечно малый элемент оболочки, находящийся под действием безмоментных усилий N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$ и заданной поверхностной нагрузки с компонентами q_α , q_β , q_γ , направленными вдоль координатных линий α , β и нормали. Составим уравнения равновесия, т. е. приравняем нулю суммы проекций сил, действующих на элемент. В направлении касательной к меридиану получим:

$$- N_\alpha \cdot r \cdot d\beta + \left(N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) \cdot \left(r + \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha \right) \cdot d\beta - N_{\alpha\beta} \cdot R_1 \cdot d\alpha + \left(N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \cdot d\beta \right) \cdot R_1 \cdot d\alpha -$$

$$- N_\beta \cdot R_1 \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\beta + q_\alpha \cdot R_1 \cdot r \cdot d\alpha \cdot d\beta = 0;$$

в направлении касательной к параллели:

$$\begin{aligned}
 & - N_{\alpha\beta} \cdot r \cdot d\beta + \left(N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha \right) \cdot \left(r + \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha \right) \cdot d\beta - \\
 & - N_{\beta} \cdot R_1 \cdot d\alpha + \left(N_{\beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} \cdot d\beta \right) \cdot R_1 \cdot d\alpha - \\
 & - N_{\alpha\beta} \cdot R_1 \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\beta + q_{\beta} \cdot R_1 \cdot r \cdot d\alpha \cdot d\beta = 0;
 \end{aligned}$$



В обоих этих уравнениях появление предпоследних членов обусловлено наличием малого угла $\cos \alpha \cdot d\beta$ между боковыми гранями элементов.

Сумма проекций действующих сил на нормаль к поверхности:

$$- N_{\alpha} \cdot r \cdot d\beta \cdot d\alpha - N_{\beta} \cdot R_1 \cdot d\alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\beta + q_{\gamma} \cdot R_1 \cdot r \cdot d\alpha \cdot d\beta = 0$$

где учитывается угол между усилиями N_{α} на нижней и верхней гранях, равный $\pi - d\alpha$, и угол между усилиями N_{β} на боковых гранях, равный $\pi - \sin \alpha \cdot d\beta$.

В результате уравнения равновесия оболочки вращения при безмоментном напряженном состоянии записываются в виде:

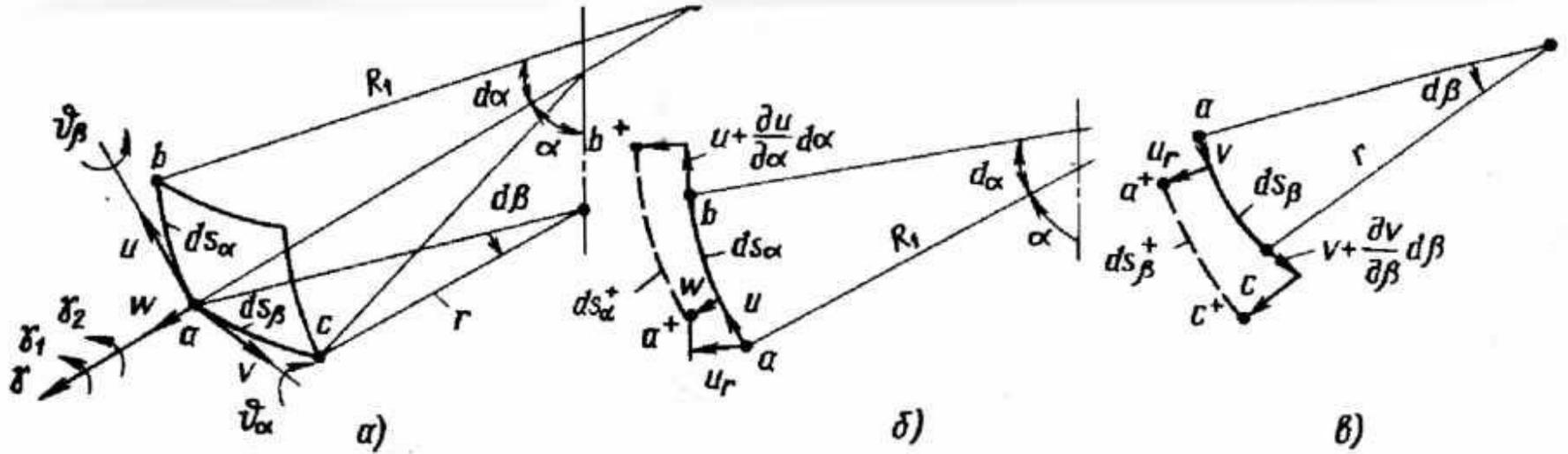
$$\frac{\partial(r \cdot N_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \cdot R_1 - N_\beta \cdot R_1 \cdot \cos \alpha + q_\alpha \cdot R_1 \cdot r = 0,$$

$$\frac{\partial(r \cdot N_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} \cdot R_1 - N_{\alpha\beta} \cdot R_1 \cdot \cos \alpha + q_\beta \cdot R_1 \cdot r = 0,$$

$$\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} = q_\gamma$$

Примечательно, что безмоментное напряженное состояние оболочки является локально статически определимым. Однако в целом для оболочки задача может оказаться статически неопределимой, если для определения произвольных функций интегрирования или произвольных констант потребуется использовать геометрические граничные условия.

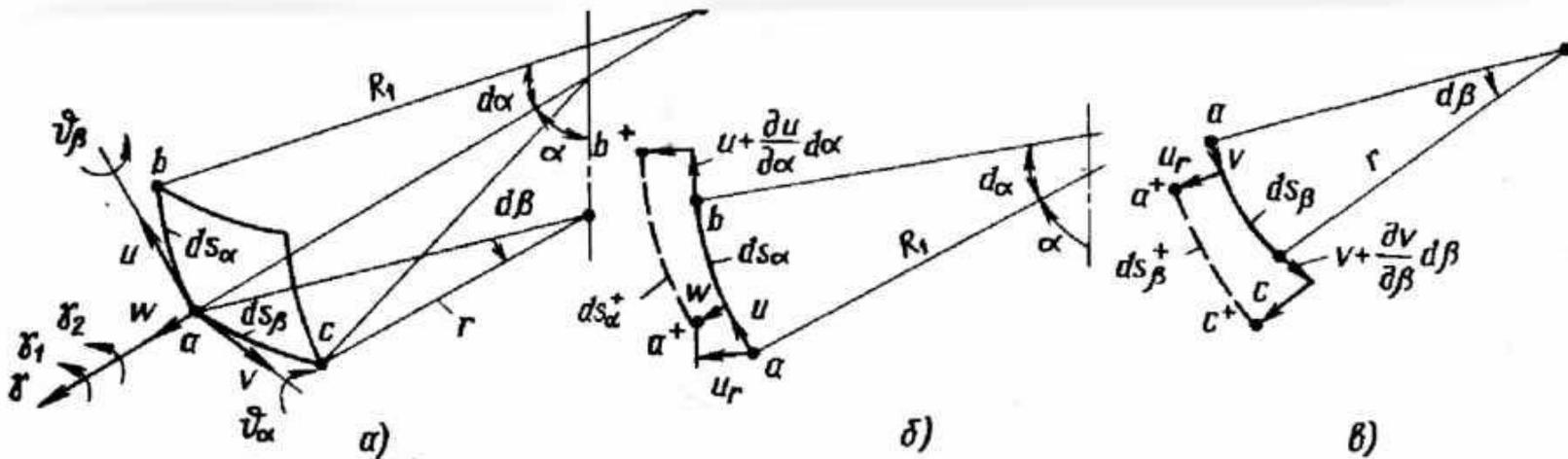
Деформации и перемещения



Получим геометрические соотношения, связывающие относительные деформации с перемещениями. Рассмотрим элементы меридиана и параллели (рис. а). До деформации их длины равны $ds_\alpha = R_1 \cdot d\alpha$ и $ds_\beta = r \cdot d\beta$. После деформации, которая характеризуется перемещениями u, v, w , длины этих элементов будут (см. рис. б, в):

$$ds_\alpha^+ = (R_1 + w) \cdot d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha, \quad ds_\beta^+ = (r + u_r) \cdot d\beta + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta$$

где $u_r = u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha$ — радиальное перемещение точек оболочки



Углы поворота относительно нормали элементов меридиана и параллели (рис. а) соответственно имеют вид:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial s_\alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial s_\beta} - \frac{v}{r} \cdot \cos \alpha$$

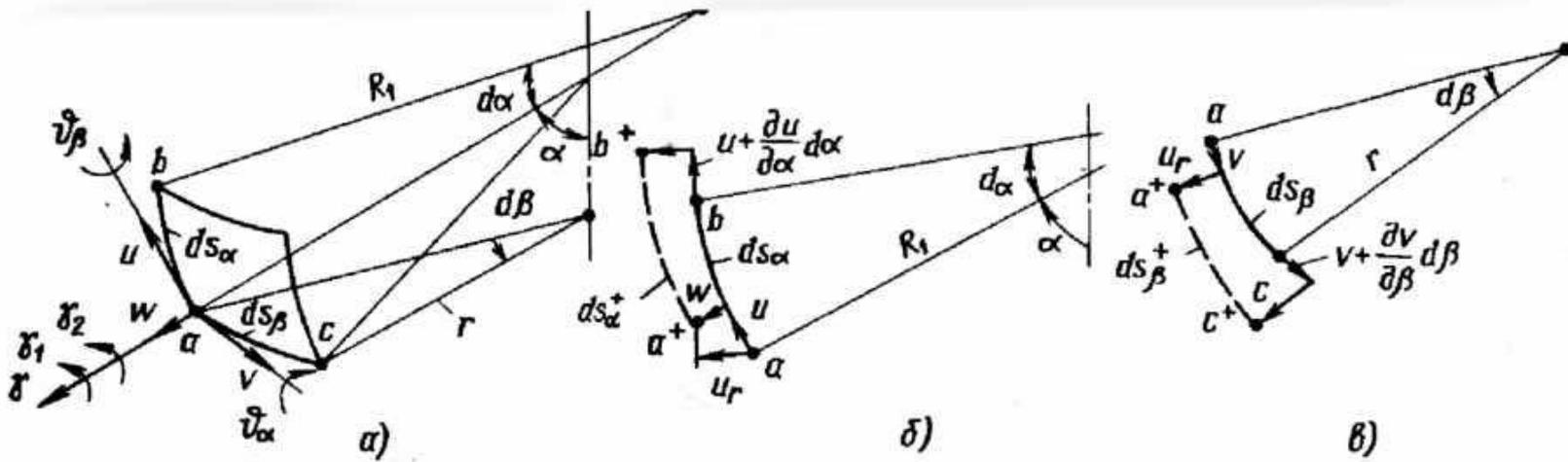
В выражении для γ_2 первое слагаемое представляет собой угол поворота элемента параллели за счет разности перемещений его концов; второе слагаемое обусловлено поворотом этого элемента относительно оси оболочки на угол v/r .

Деформации вводятся следующим образом:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ds_\alpha^+ - ds_\alpha}{ds_\alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{ds_\beta^+ - ds_\beta}{ds_\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_2 - \gamma_1$$

После подстановки: $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha \right),$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - v \cdot \cos \alpha \right) + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$



Углы поворота нормали к срединной поверхности имеют вид (см. рис. а)

$$\vartheta_{\alpha} = \frac{1}{R_1} \cdot \left(u - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \quad \vartheta_{\beta} = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta}$$

Перемещение точек оболочек в осевом направлении определяется соотношением

$$u_x = u \cdot \sin \alpha - w \cdot \cos \alpha$$

Усилия связаны с деформациями законом Гука, т. е.

$$N_{\alpha} = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_{\alpha} + \mu \cdot \varepsilon_{\beta}), \quad N_{\beta} = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_{\beta} + \mu \cdot \varepsilon_{\alpha}), \quad N_{\alpha\beta} = \frac{1-\mu}{2} \cdot \bar{E} \cdot h \cdot \gamma_{\alpha\beta}$$

Поскольку моменты в рассматриваемой оболочке отсутствуют, напряжения распределены равномерно по толщине оболочки и связаны с усилиями следующим образом:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{h}, \quad \sigma_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{h}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h}$$

Полученные соотношения являются основными уравнениями безмоментной теории оболочек вращения. Девять уравнений включают столько же неизвестных — три усилия N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, три деформации ε_α , ε_β , $\gamma_{\alpha\beta}$ и три перемещения u , v и w . Уравнения равновесия могут быть проинтегрированы независимо от остальных, по найденным из них усилиям с могут быть определены деформации и в результате интегрирования геометрических соотношений — перемещения. На практике вместо перемещений u и w часто используются радиальное и осевое перемещения u_r и u_x которые выражаются через u и v .

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Одним из наиболее распространенных случаев нагружения оболочек вращения является осесимметричное нагружение, при котором поверхностные и краевые силы не зависят от окружной координаты β и $q_\beta = 0$. При этом в оболочке вращения отсутствует окружное перемещение v , а u и w так же, как и ненулевые силовые факторы N_α , N_β , Q_α , M_α , M_β , зависят только от переменной α . В условиях осесимметричного нагружения работают баки, баллоны давления, резервуары и т. д. Метод расчета таких оболочек строится по аналогии с решением для цилиндрической оболочки, т. е. напряженное состояние разделяется на безмоментное и изгибный краевой эффект, локализующийся вблизи краев. Такое разделение для оболочки вращения произвольной формы является приближенным, однако для удлиненных в осевом направлении оболочек оно позволяет построить решение, обладающее приемлемой для практических расчетов точностью.

Безмоментное напряженное состояние

Основная система уравнений безмоментной теории оболочек для случая осесимметричной деформации принимает следующий вид:

$$(r \cdot N_\alpha)' - N_\beta \cdot R_1 \cdot \cos \alpha + q \cdot R_1 \cdot r = 0,$$

$$\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} = p,$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_1} \cdot (u' + w), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{r} (u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha),$$

$$N_\alpha = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_\alpha + \mu \cdot \varepsilon_\beta), \quad N_\beta = \bar{E} \cdot h \cdot (\varepsilon_\beta + \mu \cdot \varepsilon_\alpha)$$

Радиальное и осевое перемещения определяются

$$u_r = u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha, \quad u_x = u \cdot \sin \alpha - w \cdot \cos \alpha$$

угол поворота нормали к срединной поверхности

$$\vartheta_\alpha = \frac{1}{R_1} \cdot (u - w')$$

В уравнениях принято $q_\alpha = q$, $q_\gamma = p$, ()' обозначает производную по α .

Найдем усилия N_α и N_β . Из уравнения Лапласа:

$$N_\beta = p \cdot R_2 - N_\alpha \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Подставим полученное выражение для N_β в первое уравнение системы. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что уравнение после подстановки может быть записано в следующей форме:

$$(r \cdot N_\alpha \cdot \sin \alpha)' = (p \cdot \cos \alpha - q \cdot \sin \alpha) \cdot r \cdot R_1$$

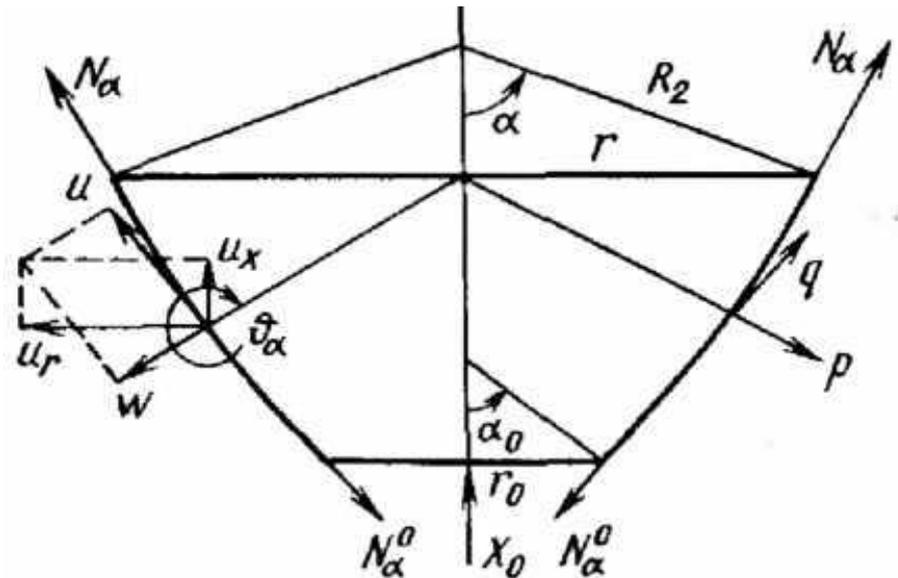
Интегрируя, получим:

$$N_\alpha = \frac{1}{r \cdot \sin \alpha} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} (p \cdot \cos \alpha - q \cdot \sin \alpha) \cdot r \cdot R_1 \cdot d\alpha - \frac{X_0}{2\pi} \right]$$

Постоянная интегрирования найдена из статического условия при $\alpha = \alpha_0$, согласно которому

$$2\pi \cdot r_0 \cdot N_\alpha^0 \cdot \sin \alpha_0 = -X_0$$

где X_0 — осевая сила, приложенная в сечении $\alpha = \alpha_0$.



Наиболее распространенным случаем осесимметричного нагружения является воздействие равномерного внутреннего давления. Полагая в полученных зависимостях $q=0$, $p=\text{const}$ и учитывая, что $R_1 \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = dr$ получим:

$$N_\alpha = \frac{1}{r \cdot \sin \alpha} \cdot \left(p \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{2} - \frac{X_0}{2\pi} \right)$$

Для замкнутой в вершине оболочки $r_0=0$. При отсутствии осевой силы ($X_0=0$) из равенств окончательно будем иметь

$$N_\alpha = \frac{p \cdot R_2}{2}, \quad N_\beta = \frac{p \cdot R_2}{2} \cdot \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Формулы определяют усилия в замкнутых баллонах давления. В частности, для цилиндрической части баллона $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$ и $N_\alpha = p \cdot R/2$; для сферического баллона $R_1 = R_2 = R$ и $N_\alpha = N_\beta = p \cdot R/2$.

Деформации безмоментной оболочки вращения определяются из закона Гука

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_\alpha - \mu \cdot N_\beta), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_\beta - \mu \cdot N_\alpha)$$

Для определения перемещений воспользуемся геометрическими соотношениями системы уравнений. Из второго соотношения с учетом $R_2 = r/\sin \alpha$ имеем

$$w = R_2 \cdot \varepsilon_\beta - u \cdot \text{ctg} \alpha$$

Подставляя выражение для w в третье выражение системы, получим

$$u' - u \cdot \operatorname{ctg} \alpha = f(\alpha) \cdot R_1 \quad \text{где} \quad f(\alpha) = \varepsilon_\alpha - \frac{R_2}{R_1} \cdot \varepsilon_\beta$$

Решение этого уравнения имеет вид: $u = [F(\alpha) + C_0] \cdot \sin \alpha$

где $F(\alpha) = \int \frac{f(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot R_1 \cdot d\alpha$ C_0 — произвольная постоянная.

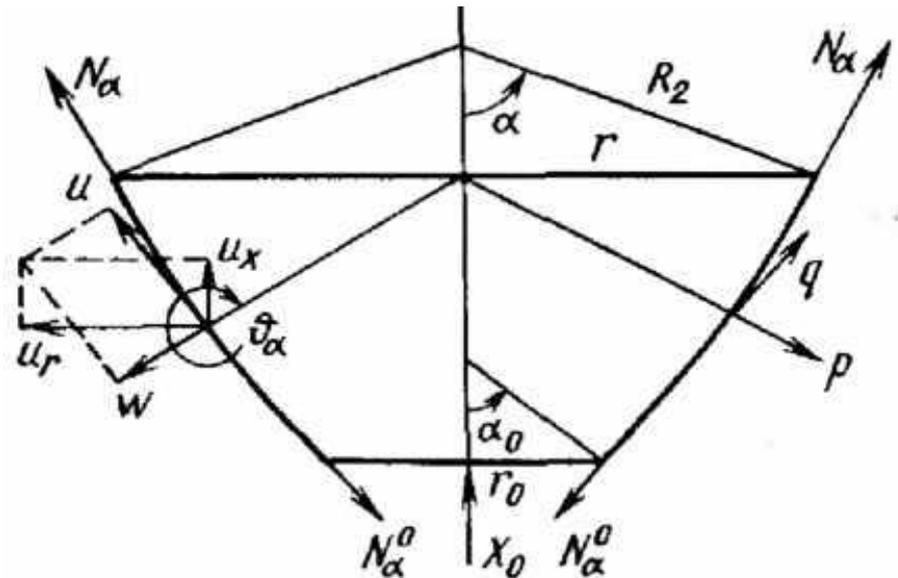
Из выражений для u и w получим: $w = -\cos \alpha \cdot [F(\alpha) + C_0] + \varepsilon_\beta \cdot R_2$

Радиальное и осевое перемещения, а также угол поворота согласно имеют вид:

$$u_r = \varepsilon_\beta \cdot r,$$

$$u_x = C_0 + F(\alpha) - u_r \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

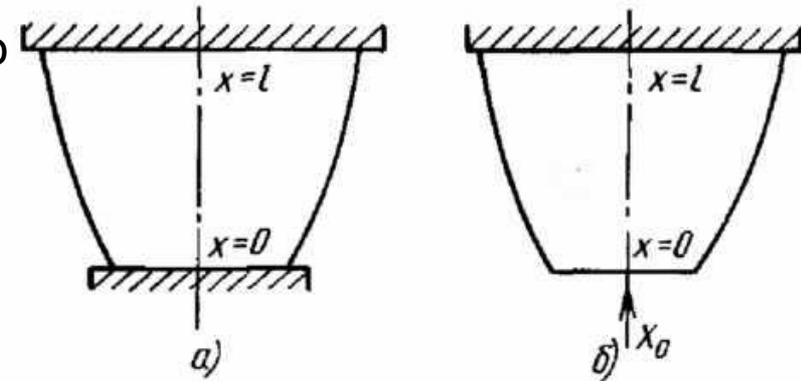
$$\vartheta_\alpha = \frac{1}{R_1} \cdot \left[f(\alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha - (\varepsilon_\beta \cdot R_2)' \right]$$



Для оболочки постоянной толщины выражение для угла поворота преобразуется к виду:

$$g_\alpha = -\frac{R_2}{E \cdot h} \left\{ \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dp}{d\alpha} + 2p \cdot \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu \right) \cdot q - \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 2 \cdot \frac{R_2}{R_1^2} \right) + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right] \cdot N_\alpha \right\}$$

Постоянная C_0 определяется из геометрического граничного условия на закрепленном крае оболочки, которое в соответствии с безмоментной теорией может быть задано только для тангенциального перемещения u .



Если безмоментная оболочка вращения в виде пояса закреплена по тангенциальным смещениям на обоих торцах (рис. а), то в этом случае продольная реакция на одном из торцов, например на нижнем X_0 , является статически неопределимой и определяется совместно с константой C_0 из заданных геометрических граничных условий

$$u_x \Big|_{x=0} = u_x \Big|_{x=l} = 0$$

Если сила X_0 задана (см. рис. б), постоянная C_0 определяется из условия $u_x \Big|_{x=l} = 0$. В случае, когда оболочка является незакрепленной, например баллон под действием внутреннего давления, константа C_0 является неопределенной — она представляет перемещение оболочки вдоль оси как недеформируемого твердого тела.

Безмоментное решение является точным только в определенных случаях. Обычно же оно используется как приближенное решение на большей части поверхности оболочки вращения при осесимметричном нагружении, если радиус $r(\alpha)$ и нагрузки $q(\alpha)$, $p(\alpha)$ являются достаточно плавными функциями.

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ

На краях оболочки, где она сопрягается с другими оболочками вращения, круговыми шпангоутами или нагружается осесимметричными нагрузками, граничные условия на практике редко соответствуют безмоментным условиям. Поэтому вблизи таких краев оболочка обычно подвергается изгибу.

Дифференциальные уравнения изгиба произвольной оболочки вращения при осесимметричном нагружении имеют переменные коэффициенты и их точные решения могут быть получены только в некоторых частных случаях в специальных функциях (например, для сферы и конуса).

В случае тонких непологих оболочек при плавном изменении радиуса и нагрузок q , p изгиб в основном происходит вблизи края и по мере удаления от края напряженное состояние приближается к безмоментному. Поэтому безмоментное решение приближенно используется в качестве частного решения неоднородной задач, и по аналогии с w^0 в решении для цилиндрической оболочки. При этом однородное решение, описывающее изгиб оболочки, имеет характер затухающего краевого эффекта типа w^K .

Для простоты и краткости изложения краевой эффект для тонкой непологой оболочки вращения рассмотрим на основе упрощающих допущений, которые примем, опираясь на аналогию с краевым эффектом для рассмотренной ранее цилиндрической оболочки.

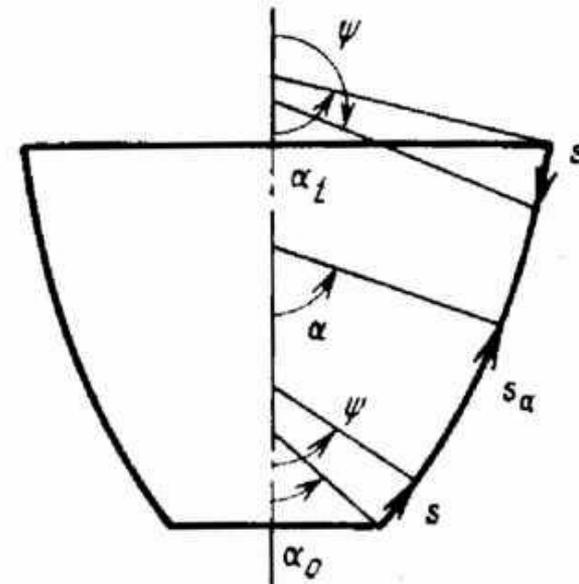
Общее решение вблизи края оболочки представляется в виде суммы безмоментного решения (обозначаем его верхним индексом «0») и однородного решения в виде краевого эффекта (с индексом «к»):

$$u = u^0 + u^K, \quad w = w^0 + w^K, \quad N_\alpha = N_\alpha^0 + N_\alpha^K, \quad N_\beta = N_\beta^0 + N_\beta^K, \\ M_\alpha = M_\alpha^K, \quad M_\beta = M_\beta^K, \quad Q_\alpha = Q_\alpha^K$$

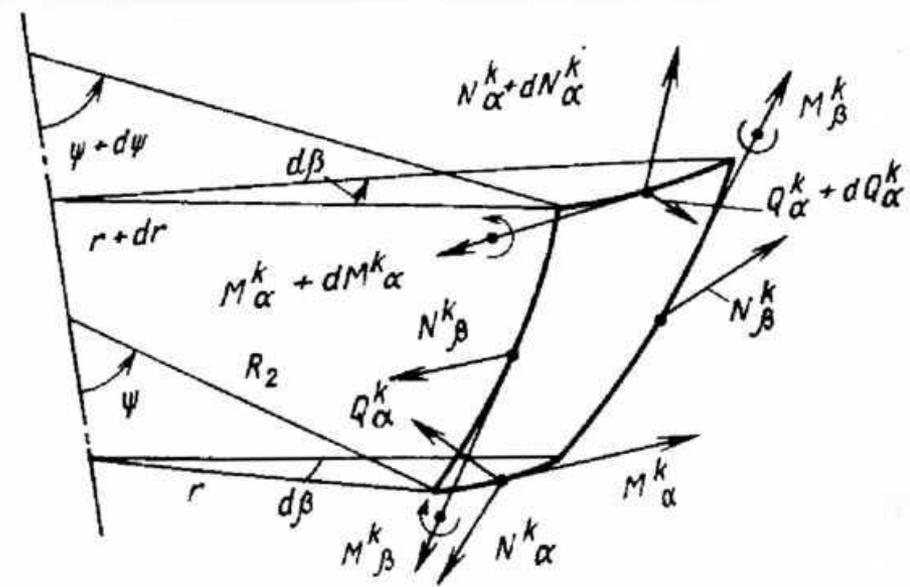
В изгибных силовых факторах $M_\alpha, M_\beta, Q_\alpha$ естественно, фигурируют только составляющие краевого эффекта.

При описании краевого эффекта в качестве координаты будем рассматривать расстояние s , отсчитываемое от края оболочки вдоль меридиана. Вместо угла α введем угол ψ , отсчитываемый от края, при этом $ds = R_1 \cdot d\psi$.

Введение координаты s и угла ψ вместо s_α и α позволяет одинаковым образом описать краевой эффект как на нижнем, так и на верхнем краях, причем на нижнем крае $ds = ds_\alpha, \psi = \alpha$, а на верхнем крае $ds = -ds_\alpha, \psi = \pi - \alpha$. Оболочку в районе рассматриваемого края будем считать непологой, если $|\operatorname{ctg} \psi| < 3$.



У тонкой непологий оболочки зона краевого эффекта является достаточно узкой, и поэтому изменением радиусов кривизны оболочки и угла ψ в пределах этой зоны можно пренебрегать, принимая их значения равными значениям на крае. В случае оболочки типа пояса, имеющей два края, краевые эффекты на этих краях будем рассматривать независимо как затухающие, считая, что ширина зоны каждого из них меньше расстояния между краями вдоль меридиана.



Получим уравнения равновесия. Выделим элемент оболочки, показанный на рисунке. Составим уравнения проекций сил в направлении нормали и моментов относительно касательной к верхней грани элемента, выделенного из оболочки в зоне краевого эффекта:

$$\left(Q_{\alpha}^K + \frac{dQ_{\alpha}^K}{ds} \cdot ds \right) \cdot \left(r + \frac{dr}{ds} \cdot ds \right) \cdot d\beta - Q_{\alpha}^K \cdot r \cdot d\beta - N_{\alpha}^K \cdot r \cdot d\beta \cdot d\psi - N_{\beta}^K \cdot ds \cdot \sin \psi \cdot d\beta = 0,$$

$$\left(M_{\alpha}^K + \frac{dM_{\alpha}^K}{ds} \cdot ds \right) \cdot \left(r + \frac{dr}{ds} \cdot ds \right) \cdot d\beta - M_{\alpha}^K \cdot r \cdot d\beta - M_{\beta}^K \cdot ds \cdot \cos \psi \cdot d\beta - Q_{\alpha}^K \cdot r \cdot ds \cdot d\beta = 0$$

Здесь внешние нагрузки q, p и безмоментные усилия $N_{\alpha}^0, N_{\beta}^0$, не учитываются, так как они находятся в равновесии.

Разделив уравнения на $r \cdot d\beta \cdot ds$ и учитывая, что $ds = R_1 \cdot d\psi$ получим $r = R_2 \cdot \sin \psi$

$$dr/ds = \cos \psi$$

$$\frac{dQ_\alpha^K}{ds} + Q_\alpha^K \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2} - \frac{N_\alpha^K}{R_1} - \frac{N_\beta^K}{R_2} = 0$$

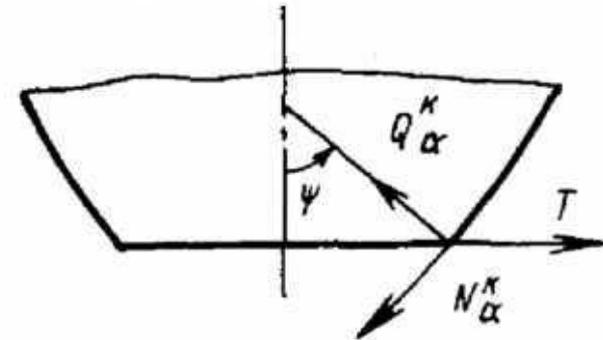
$$\frac{dM_\alpha^K}{ds} + (M_\alpha^K - M_\beta^K) \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2} - Q_\alpha^K = 0$$

Из уравнения равновесия отсеченной части оболочки, учитывая, что внешняя нагрузка уравновешивается усилиями N_α^K , найдем

$$Q_\alpha^K \cdot \sin \psi - N_\alpha^K \cdot \cos \psi = 0$$

откуда

$$N_\alpha^K = Q_\alpha^K \cdot \text{ctg} \psi$$



В случае непологий оболочки ($|\text{ctg} \psi| < 3$) из полученной зависимости следует, что N_α^K и Q_α^K являются величинами одного порядка. Поперечная сила на основании второго уравнения равновесия выражается через изгибающие моменты, в результате чего она зависит от изгибной жесткости оболочки D , пропорциональной h^3 . Напомним, что толщина h считается малой. Поэтому для тонких оболочек усилия N_α^K , так же как и Q_α^K , можно считать пренебрежимо малым по сравнению с N_β^K , которое пропорционально h .

Кроме того, при изгибе края достаточно гладкой, тонкой, неполюгой оболочки можно предположить, что тангенциальное перемещение u^K является пренебрежимо малым по сравнению с нормальным перемещением w^K . На основании этого примем следующие допущения: $N_\alpha^K \ll N_\beta^K$, $w^K \gg u^K \approx 0$. Определим угол поворота в плоскости меридиана и изменения главных кривизн при изгибной деформации оболочки:

$$\vartheta_\alpha^K = -\frac{dw^K}{ds},$$

$$\kappa_\alpha^K = \frac{1}{R_1^+} - \frac{1}{R_1} = \frac{d(\psi + \vartheta^K)}{ds} - \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\vartheta_\alpha^K}{ds} = -\frac{d^2 w^K}{ds^2},$$

$$\kappa_\beta^K = \frac{1}{R_2^+} - \frac{1}{R_2} = \frac{\sin(\psi + \vartheta^K)}{r + u_r} - \frac{\sin \psi}{r} \approx \frac{\sin \psi + \vartheta^K \cdot \cos \psi}{r} - \frac{\sin \psi}{r} = \vartheta^K \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2} = -\frac{dw^K}{ds} \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2}$$

где R_1^+ , R_2^+ — радиусы кривизн деформированной срединной поверхности оболочки с учетом поворота нормали на малый угол ϑ_α^K . Изменением этих радиусов за счет деформаций удлинения срединной поверхности пренебрегаем.

Введем весьма существенное для теории краевого эффекта допущение, вытекающее из быстрой изменяемости решения по переменной s . Из выражения

$$w = w^0 + w^K = w^0 + e^{-k\alpha} \cdot (C_1 \cdot \cos k\alpha + C_2 \cdot \sin k\alpha)$$

следует, что для цилиндрической оболочки составляющая w^K пропорциональна $e^{-k\alpha}$, т. е. при дифференцировании по α она умножается на $-k$. Если k велико, то можно утверждать, что функции, описывающие краевой эффект, при дифференцировании существенно возрастают по абсолютной величине, т. е. в уравнениях краевого эффекта можно пренебречь низшими производными по сравнению с высшими. Из этого, в частности, следует, что согласно полученным зависимостям $\kappa_\alpha^K \gg \kappa_\beta^K$ и общие соотношения между моментами и изменениями кривизн

$$M_\alpha = D \cdot (\kappa_\alpha + \mu \cdot \kappa_\beta), \quad M_\beta = D \cdot (\kappa_\beta + \mu \cdot \kappa_\alpha)$$

можно приближенно записать с учетом полученных выше зависимостей в виде

$$M_\alpha^K = D \cdot \kappa_\alpha^K = -D \frac{d^2 w^K}{ds^2}, \quad M_\beta^K = \mu \cdot M_\alpha^K = D \cdot \mu \cdot \kappa_\alpha^K = -D \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w^K}{ds^2}$$

Выведем теперь уравнение краевого эффекта. В соответствии с принятыми выше допущениями ($N_\alpha^K \ll N_\beta^K$) в первом уравнении равновесия пренебрегаем членами, содержащими Q_α^K и N_α^K при этом считаем, что у непологой оболочки $\operatorname{ctg} \psi$ не является большой величиной, а радиус R_1 не является малым по сравнению с радиусом R_2 .

Во втором уравнении равновесия
$$\frac{dM_\alpha^K}{ds} + (M_\alpha^K - M_\beta^K) \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2} - Q_\alpha^K = 0$$

пренебрегаем вторым членом, содержащим M_α^K и $M_\beta^K = \mu \cdot M_\alpha^K$ по сравнению с первым членом, представляющим производную от быстроизменяющейся функции. Тогда с учетом полученных выражений для моментов из второго уравнения равновесия будем иметь

$$Q_\alpha^K = \frac{dM_\alpha^K}{ds} = -D \frac{d^3 w^K}{ds^3}$$

а из первого уравнения равновесия
$$\frac{dQ_\alpha^K}{ds} + Q_\alpha^K \cdot \frac{\text{ctg} \psi}{R_2} - \frac{N_\alpha^K}{R_1} - \frac{N_\beta^K}{R_2} = 0$$

с учетом указанных выше допущений получим
$$D \frac{d^4 w^K}{ds^4} + \frac{N_\beta^K}{R_2} = 0$$

Запишем выражения для окружной деформации ε_β^K . Из равенств

имеем
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{R_2} (u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha) \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_\beta^K - \mu \cdot N_\alpha^K)$$

$$R_2 = r / \sin \alpha$$

$$\varepsilon_\beta^K = \frac{1}{R_2} \cdot (u^K \cdot \text{ctg} \alpha + w^K) \approx \frac{w^K}{R_2}, \quad \varepsilon_\beta^K = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_\beta^K - \mu \cdot N_\alpha^K) \approx \frac{N_\beta^K}{E \cdot h}$$

Приравнявая получим
$$N_\beta^K \approx \frac{E \cdot h}{R_2} \cdot w^K$$

Подставляя полученное выражение в $D \frac{d^4 w^K}{ds^4} + \frac{N_\beta^K}{R_2} = 0$

получим $\frac{d^4 w^K}{ds^4} + 4 \cdot k^4 \cdot w^K = 0$ где $k^4 = E \cdot h / (4 \cdot D \cdot R_2^2) = 3 \cdot (1 - \mu^2) / (R_2^2 \cdot h^2)$

Здесь радиус R_2 в пределах зоны краевого эффекта можно считать постоянным и равным его значению на рассматриваемом крае. Отметим, что полученное линейное ДУ аналогично однородному уравнению, соответствующему уравнению для цилиндрической оболочки. Затухающая часть решения аналогична выражению для затухающей части цилиндрической оболочки, т. е.

$$w^K = e^{-k \cdot s} \cdot (C_1 \cdot \cos ks + C_2 \cdot \sin ks)$$

Используя дифференциальные зависимости находим

$$g^K = -\frac{dw^K}{ds} = -k \cdot e^{-k \cdot s} \cdot [C_1 \cdot (\cos ks + \sin ks) - C_2 \cdot (\cos ks - \sin ks)]$$

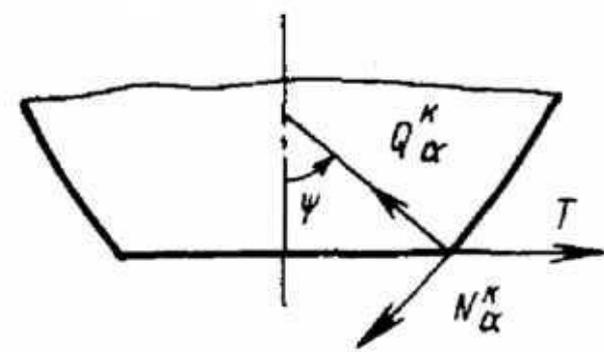
$$M_\alpha^K = -D \cdot \frac{d^2 w^K}{ds^2} = -2 \cdot D \cdot k^2 \cdot e^{-k \cdot s} \cdot (C_1 \cdot \sin ks - C_2 \cdot \cos ks),$$

$$Q_\alpha^K = -D \cdot \frac{d^3 w^K}{ds^3} = -2 \cdot D \cdot k^3 \cdot e^{-k \cdot s} \cdot [C_1 \cdot (\cos ks - \sin ks) + C_2 \cdot (\cos ks + \sin ks)]$$

$$M_\beta^K = \mu \cdot M_\alpha^K, \quad N_\alpha^K = \operatorname{ctg} \psi \cdot Q_\alpha^K, \quad N_\beta^K = \frac{E \cdot h}{R_2} \cdot w^K.$$

На крае оболочки усилия N_α^K и Q_α^K приводятся к радиальной силе T^K см. верхний рисунок

$$T^K = -(N_\alpha^K \cdot \cos \psi + Q_\alpha^K \cdot \sin \psi) = -Q_\alpha^K / \sin \psi$$



Радиальное перемещение за счет краевого изгиба определяется приближенной формулой, следующей из $u_r = u \cdot \cos \alpha + w \cdot \sin \alpha$

$$u_r^K \approx w^K \cdot \sin \psi$$

Положительные направления кинематических и силовых факторов на краях оболочки показаны на нижнем рисунке.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 , входящие в полученные равенства удобно выразить через радиальное перемещение и угол поворота на крае оболочки $s=0$. Полагая в (4.86)... (4.89) $s = 0$, $\psi = \varphi$, получим

