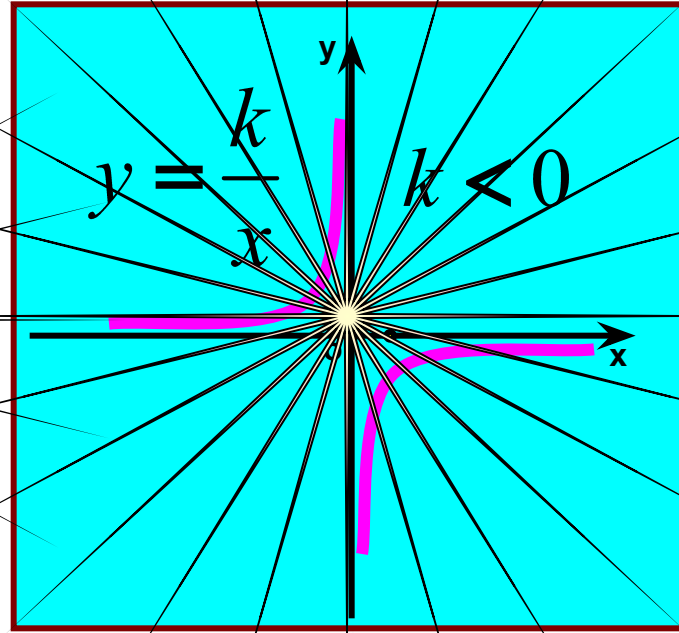
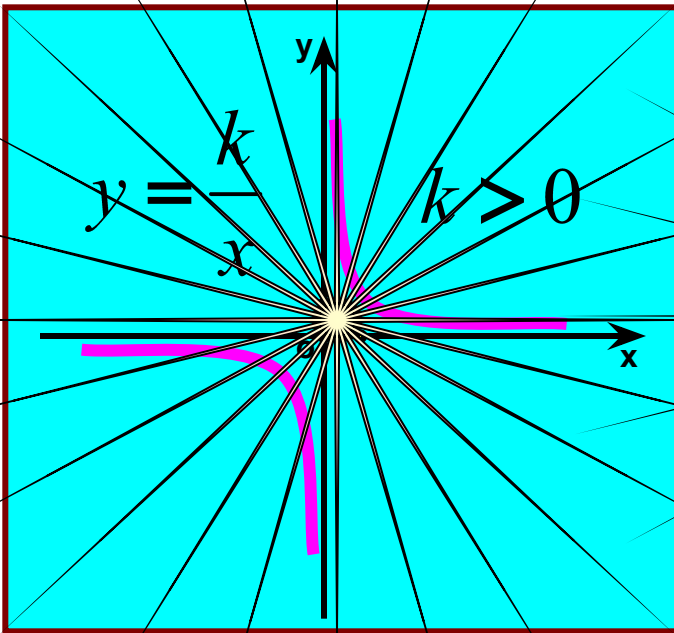


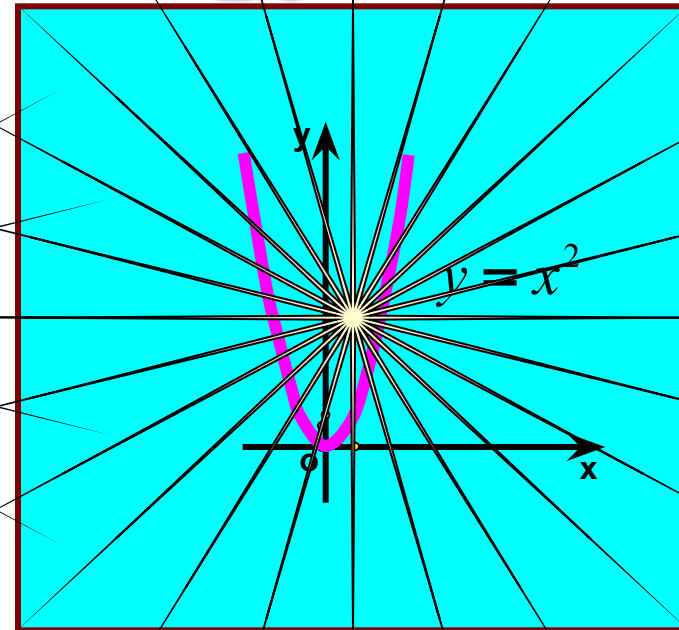
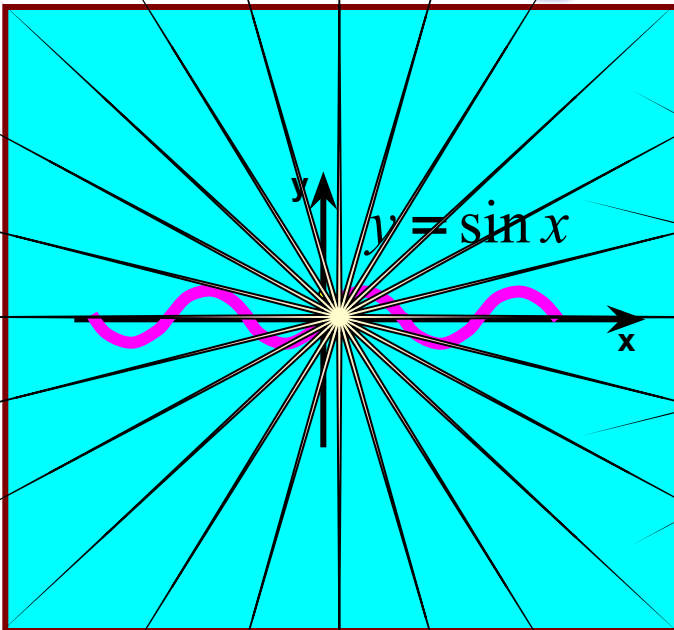


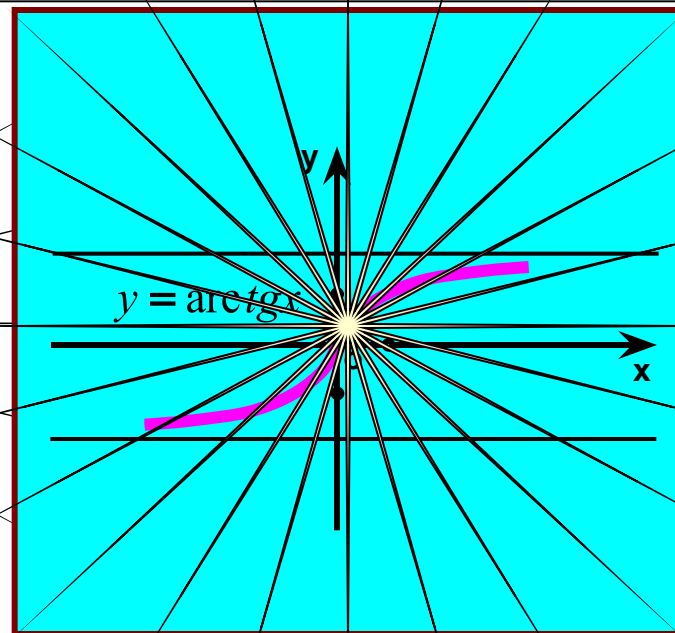
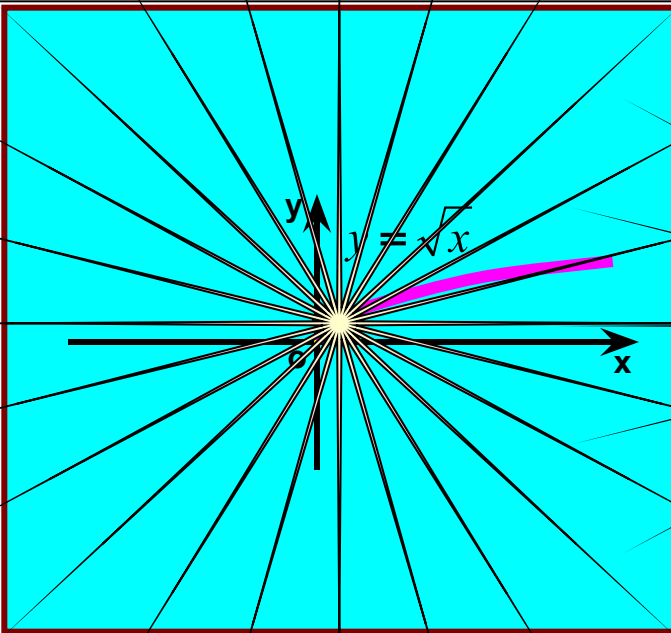
Построение графиков сложных функций

на основе свойства **МОНОТОННОСТИ**

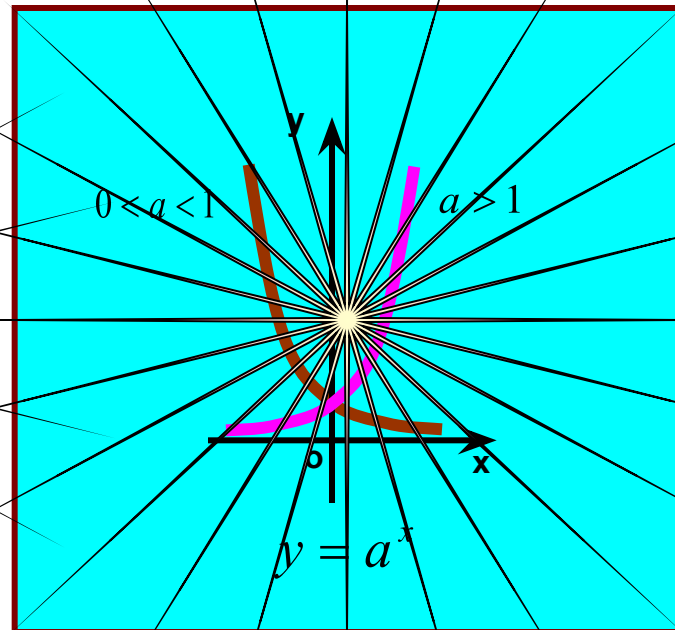
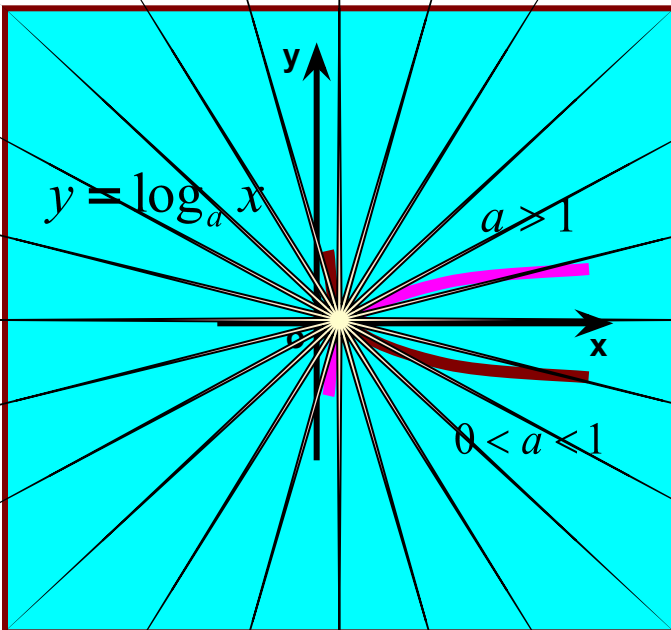


элементарные функции





элементарные функции



Итак, рассмотрим функцию : $y = \operatorname{arctg} 2^x$

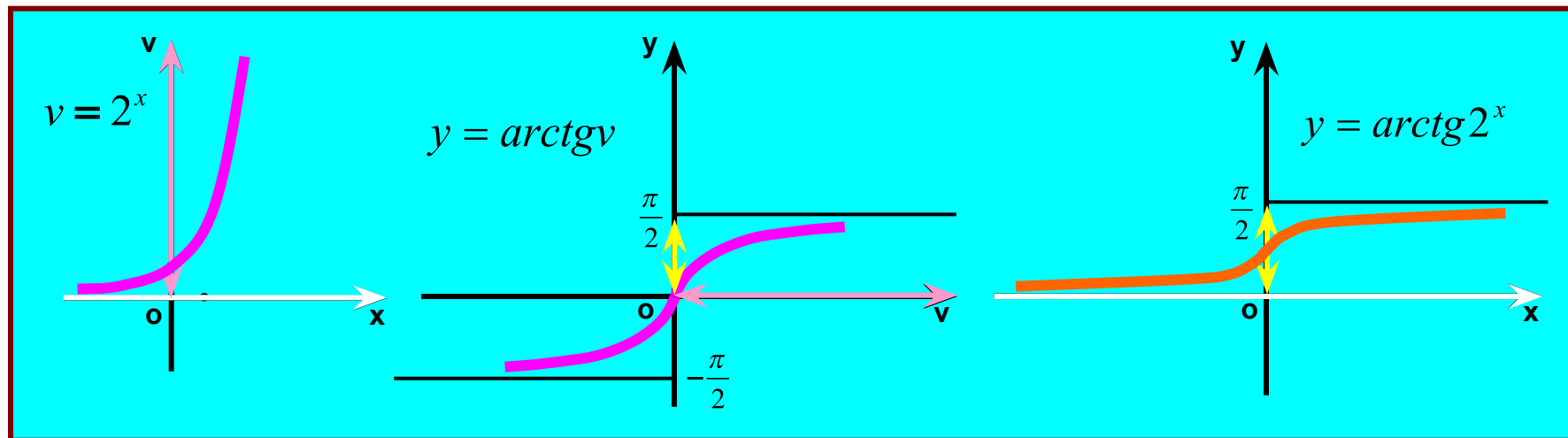
Это сложная функция. Она является композицией двух функций:

$v = 2^x$ (назовём её внутренней функцией)

$y = \operatorname{arctg} v$ (назовём её внешней функцией).

Каждая из них является элементарной.

Построим графики этих функций в системе координат.



Внутренняя функция является строго возрастающей: x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$;
 v возрастает от 0 до $+\infty$.

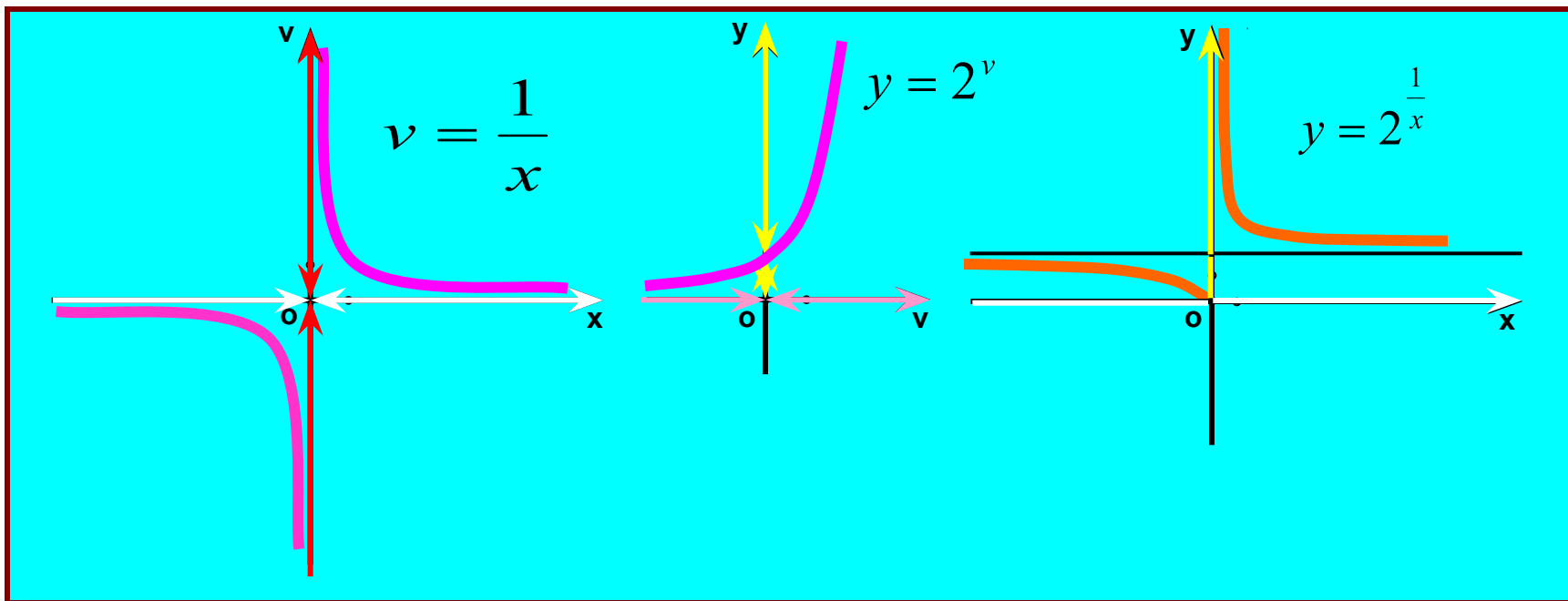
По графику внешней функции определяем: v возрастает от 0 до $+\infty$;
 y возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Итак, при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$, y возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Контрольная точка: $x = 0$; $y = \frac{\pi}{4}$

Построить график функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Внутренняя функция $v = 1/x$. Внешняя функция $y = 2^v$.
Строим графики внутренней и внешней функций.



Промежутки монотонности внутренней функции:

x возрастает от $-\infty$ до 0 ; v убывает от 0 до $-\infty$

x возрастает от 0 до $+\infty$; v убывает от $+\infty$ до 0

Такому изменению v соответствует убывание y от 1 до 0 и от $+\infty$ до 1

Для более точного построения следует использовать контрольные точки, выбирая те значения x , при которых легко вычислять точные значения y .

$$y(1) = 2; y(1/2) = 4; y(-1) = 1/2.$$

Итак, построение графика сложной функции $y = f(v(x))$ в некоторых случаях можно осуществить по следующему плану:

1

Начертить графики:

внутренней $v = v(x)$ функции

внешней $y = f(v)$ функции

И построить систему координат $ХОУ$.

2

Определить промежутки монотонности внутренней функции

и отметить их на оси $ОХ$ плоскости $ХОУ$.

3

На каждом промежутке определить границы изменения внутренней функции, выбирая те значения $y = v(x)$, которые попадают в область определения функции $y = f(v)$.

4

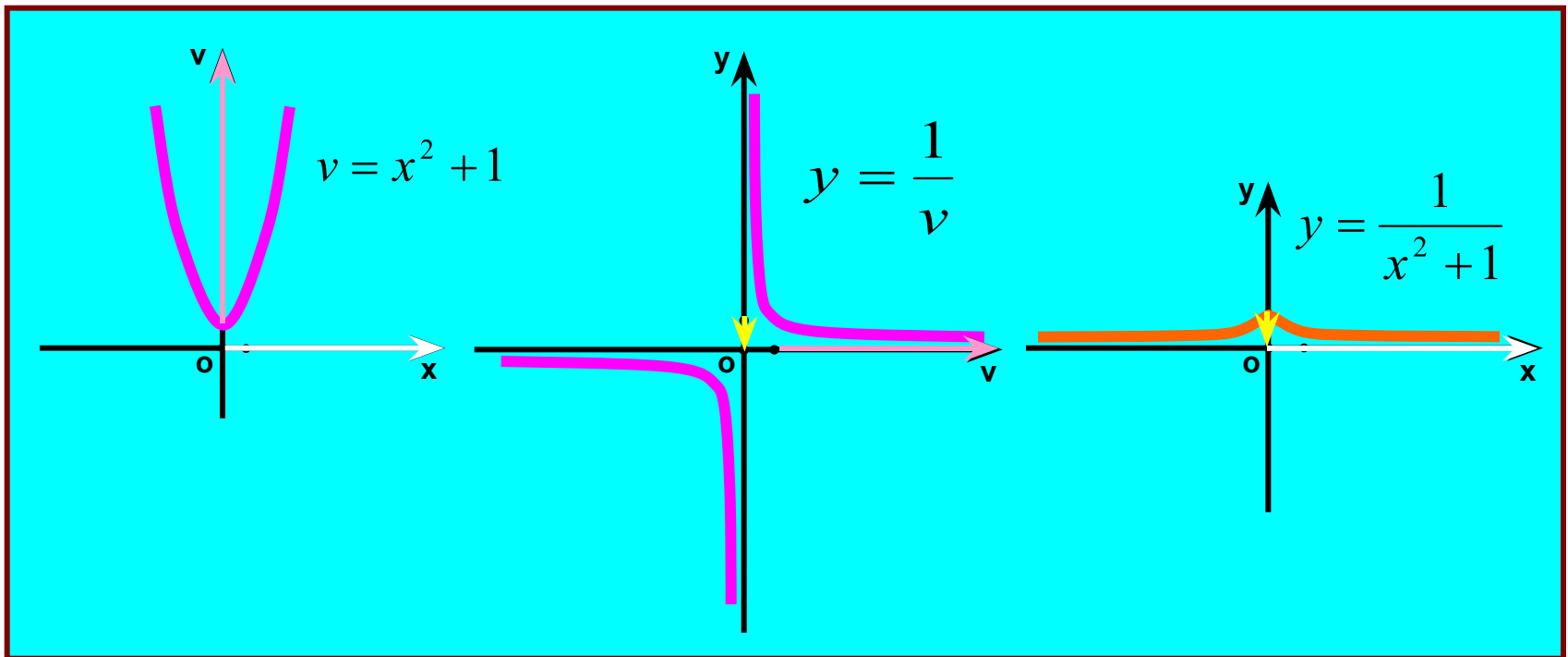
По графику внешней функции $y = f(v)$ найти характер изменения функции y .

5

В системе координат $ХОУ$ начертить график $y = y(x)$.

Построить график функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Строим графики $v = x^2 + 1$ и $y = \frac{1}{v}$



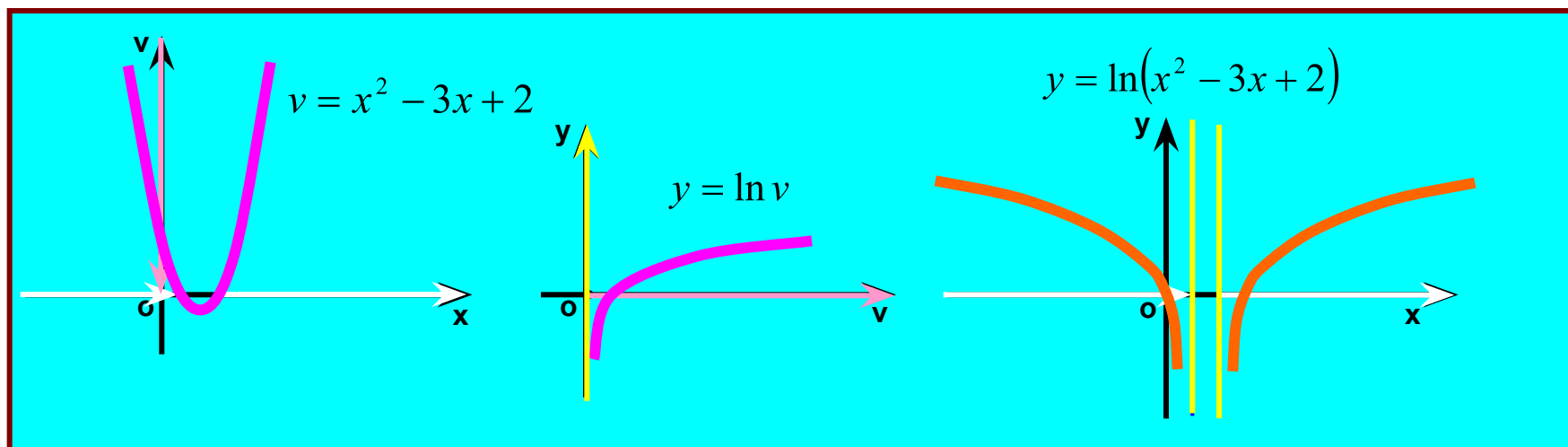
x возрастает от 0 до $+\infty$; v возрастает от 1 до $+\infty$
 v возрастает от 1 до $+\infty$; y убывает от 1 до 0 .

Воспользовавшись чётностью функции, получаем такой график

При построении графиков следует иметь в виду, что область определения сложной функции $Y = f(v(x))$ может быть уже области определения внутренней функции !

Построить график функции $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Строим графики элементарных функций $v = x^2 - 3x + 2$ и $y = \ln v$.



x возрастает от $-\infty$ до 1; v убывает от $+\infty$ до 0.

x возрастает от 2 до $+\infty$; v возрастает от 0 до $+\infty$

На отрезке $[1;2]$ функция $v(x) = 0$ либо $v(x) < 0$.

Следовательно, при этих значениях функция $y = f(v(x))$ не определена

И $x = 1$, $x = 2$ - вертикальные асимптоты.

v убывает от $+\infty$ до 0; y убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

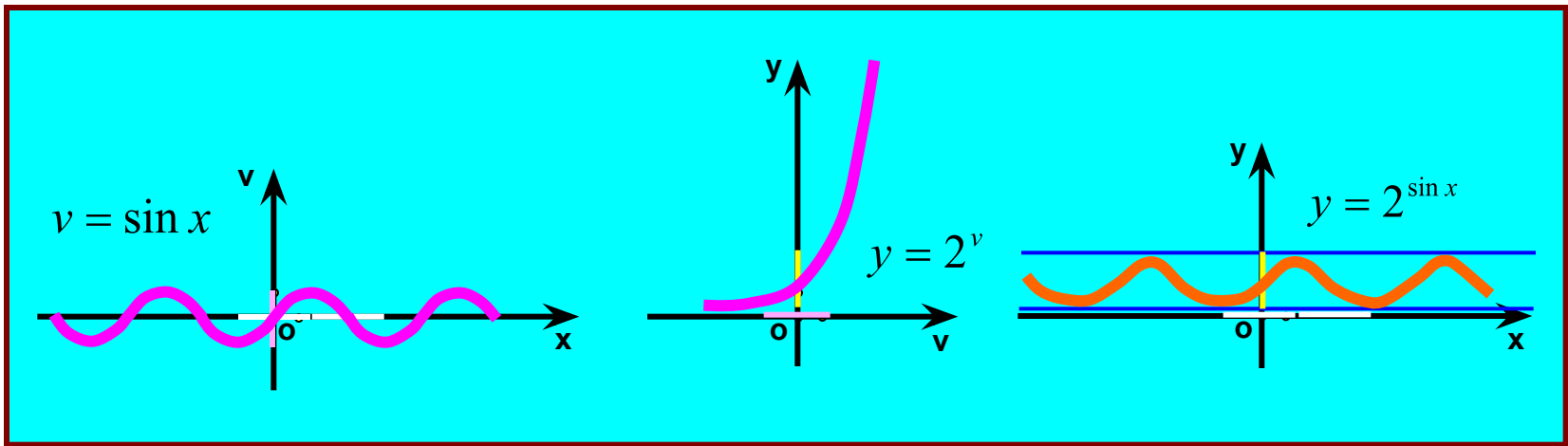
v возрастает от 0 до $+\infty$; y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Построить график функции

$$y = 2^{\sin x}$$

Достаточно построить график на отрезке, длина которого равна периоду функции.

Строим графики $v = \sin x$ и $y = 2^v$.



x возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ v возрастает от -1 до 1
 y возрастает от $\frac{1}{2}$ до 2.

x убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; v убывает от 1 до -1;
 y убывает от 2 до $\frac{1}{2}$.

Контрольные точки: $x = 0, y = 1$; $x = -\pi/2, y = 1/2$; $x = \pi/2, y = 2$; $x = 3\pi/2, y = 1/2$

Построить график функции

$$Y = 2^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}$$

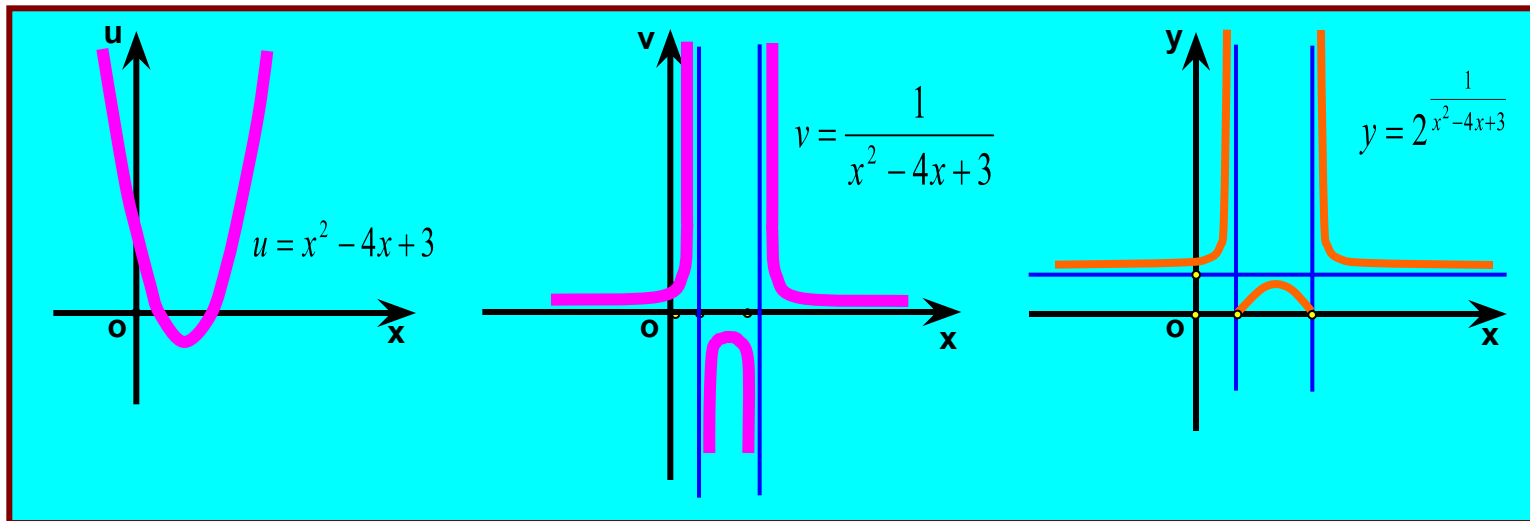
Данная функция является композицией трёх функций:

$$u = x^2 - 4x + 3$$

$$v = \frac{1}{u}$$

$$y = 2^v$$

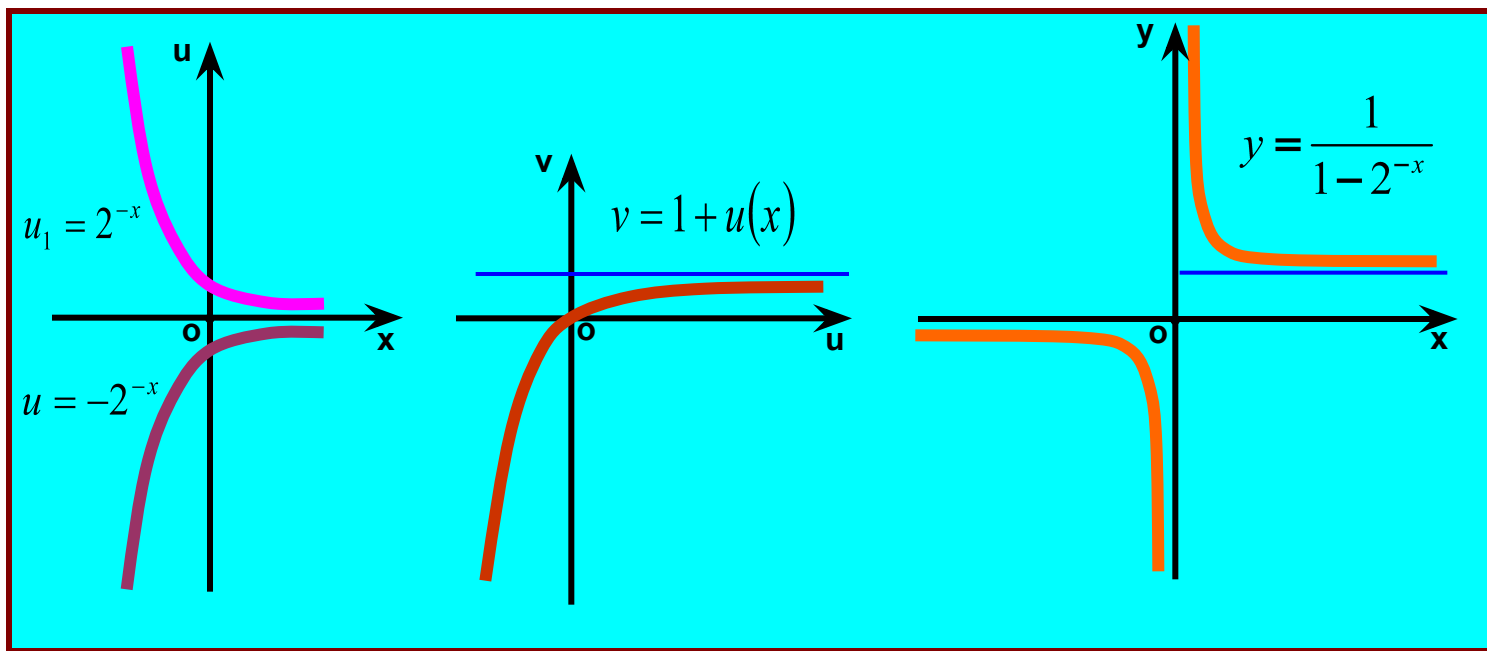
Отсюда последовательно получаем три графика.



Здесь мы обошлись без графиков функций $v = 1/u$ и $y = 2^v$, свойства монотонности которых хорошо известны.

Построить график функции $y = \frac{1}{1-2^{-x}}$.

Конечно, при построении графиков сложных функций надо использовать весь арсенал элементарных средств: переносы, отражения, сложение графиков и т.д. Рассмотрим ещё примеры.



1. Строим график $u_1 = 2^{-x}$
2. Строим график $u = -2^{-x}$, (симметрия относительно оси OX).
3. Строим график $v=1+u(x)$, (смещение на 1 вдоль оси OY вверх).
4. Строим график $y=1/v(x)$, на основании монотонности функций

Итак, на сегодняшнем занятии мы познакомились ещё с одним из способов построения графиков функций.

Для овладения данной методикой необходима практика. Этим мы и займёмся на следующих наших занятиях.

Домашнее задание:

Построить графики функций:

1. $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 4x + 5)$
2. $y = \ln \sin x$
3. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$
4. $y = \arccos(1 - x^3)$

?

