Уравнения высших степеней

Урок алгебры в 10 классе (занятие элективного курса) по теме «Методы решения уравнений высших степеней». Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области

Лодина Виолетта Сергеевна.

История исследования уравнений высших степеней

- **КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Брахмагупта (VIIв) , М. Штифель(1487-1567)

А.Жирар (1595-1632)

Декарт , Ньютон , Ф. Виетт (1591)

- **КУБИЧЕСКИЕ $x^3+px+q=0$**

Сципион Даль Ферро (1465-1526)

Фиори (1535)

Н. Тарталья (1499-1557)

Д. Кардано (1501-1576)

Формула Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p3}{27}}}$$

- **УРАВНЕНИЯ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ**

Л.Феррари (1522-1565)

Р.Бомбелли (1530-1572)

Ф.Виет (1540-1603г.)

- **УРАВНЕНИЯ 5-й СТЕПЕНИ**

Н. Абель (1802-1829) доказал, что в общем случае корни уравнений $5^{й}$ степени и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы.

Э. Галуа (1811-1832) выделил класс алгебраических уравнений, которые разрешены в радикалах.

Разложение на множители и замена переменной.

На занятии изучается методика решения уравнений высших степеней. Рассматриваются два метода: разложение на множители и замена переменной. Понижение степени уравнений с помощью деления многочленов по схеме Горнера и приведение различных уравнений к замене переменной.

Этот метод основан на применении теоремы Безу. Если число *a* является корнем многочлена $P(x)$ степени n, то его можно представить в виде

$P(x)=(x-a)Q(x)$, где $Q(x)$-многочлен степени $(n-1)$.

Теорема Безу: *“ Остаток от деления многочлена P (x) на двучлен (x-a) равен P(a) , т.е. значению многочлена при x=a”.*

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения P(x)=0 степени n, то с помощью теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени (n-1), т.е. понизить степень уравнения.

Метод разложения на множители

Целые корни уравнения являются делителями свободного члена

Теорема. *Пусть несократимая дробь p/q является корнем уравнения с целыми коэффициентами, тогда число p – является делителем свободного члена , а q делителем старшего коэффициента* .Таким образом, зная корень многочлена, его легко разложить на множители, т.е. разделить P(x) на $(x-\alpha)$ “уголком” или по **схеме Горнера.**

$$(x-x_1)(x-x_2).......(a_0x^2+bx+c)=0$$

α						

Найдем делители свободного члена

- $p = \pm 1; \pm 2; \pm 3: \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$
  $R(2) = 0,\ x_1 = 2.$
- $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 | \frac{x-2}{x^2-7x+12}$
- $\underline{x^3 - 2x^2}$
- $-7x^2 + 26x$
- $\underline{-7x^2 + 14x}$
- $12x - 24$
- $\underline{12x - 24}$
- Разложим на множители
  $(x-2)(x^2 - 7x + 12) = 0$
- $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$
- Ответ $\{2; 3; 4\}$

Пример №1.

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

Понизим степень уравнения делением многочленов

№ 2 $x^3 + 7x^2 - 56x + 48 = 0$

Ответ $\{1; 4; -12\}$

№ 3 $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = 0$

Ответ $\left\{2; \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}$

Понижение степени по схеме Горнера

- **Пример №4** $x^4 + 3x^3 - 24x^2 + 17x + 3 = 0$
- **Решение**. Выпишем делители свободного члена
- $p = \pm 1; \pm 3$ $R(1) = 0, \; x_1 = 1$

	1	3	-24	17	3	
1	1	4	-20	-3	0	
3	1	7	1	0		

- Разложим на множители $(x-1)(x-3)(x^2 + 7x + 1) = 0$

Ответ $\left\{1; 3; \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}\right\}$

№7 $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0$ Ответ $\left\{\frac{1}{2}; 1; -5 \pm \sqrt{19}\right\}$

№8 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = 0$ Ответ $\{2; -3; -1 \pm \sqrt{2}\}$

Пример №5

$$x^6 - x^5 - 8x^4 + 14x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$

Решение. $p = \pm 1; \pm 2; \pm 3: \pm 6$

	1	**-1**	**-8**	**14**	**1**	**-13**	**6**	
1	1	0	-8	6	7	-6	0	
-1	1	-1	-7	13	-6	0		
2	1	1	-5	3	0			
-3	1	-2	1	0				

Разложим на множители

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$$

$(x+1)(x-2)(x+3)(x-1)^3 = 0$ **Ответ** $\{\pm 1; 2; -3\}$

Пример№6 $2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$

Решение. $p = \pm 1$, $q = 1;2$ $\frac{p}{q} = \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{2}$

	2	-7	-3	5	-1	
1	2	-5	-8	-3	-4	не корень
-1	2	-9	6	-1	0	
0,5	2	-8	2	0		

$(x + 1)(x - 0,5)(2x^2 - 8x + 2) = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ $D/4 = 4 - 1 = 3$ $x = 2 \pm\sqrt{3}$

Ответ $\{1; 0,5; 2 \pm \sqrt{3}\}$

Пример №9 $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} + x\right) = \frac{142}{9}$

Введём замену $\frac{1}{x} + x = t,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$9t^2 + 18t - 160 = 0 \qquad t_1 = \frac{10}{3}\ ,\quad t_2 = \frac{-16}{3}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + x = \frac{-16}{3} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 3x^2 + 16x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Ответ $\left\{\frac{1}{3}; 3; (-8 \pm \sqrt{55})/3\right\}$

Замена переменной

Возвратные уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Возвратное уравнение симметричное, если $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$ и т.д. Возвратное уравнение 4-й степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, a \neq 0$$

Делим на x^2

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$$

получим замену

$$x - \frac{1}{x} = t$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$x + \frac{1}{x} = t$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Пример №10

$$6x^4 - 35\,x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Решение. Делим на x^2, получим

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(\frac{1}{x} + x\right) + 62 = 0, \qquad \frac{1}{x} + x = t,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$6t^2 - 35t + 50 = 0 \qquad t_1 = \frac{5}{2}\ , \quad t_2 = \frac{10}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} + x = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + x = \frac{5}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Ответ $\left\{\frac{1}{3}; 3; 2; 0{,}5\right\}$

№11 $2x^4 + 3\,x^3 - 24x^2 - 3x + 2 = 0$ Ответ $\left\{\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}; -2 \pm \sqrt{5}\right\}$

№12 $12\,x^4 - 16\,x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$ Ответ $\{2; 0{,}5\}$

Однородные уравнения.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0$$

Делим на y^n $x \neq 0, y \neq 0$

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + ... + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n = 0$$

Получим замену $\frac{x}{y} = t$

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_{n-1}t + a_n = o$$

Пример №13 $2x^4 + x^2(x+2) - 3(x+2)^2 = 0.$

Делим на $(x+2)^2$, получим

$2\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{x^2}{x+2} - 3 = 0, \quad \frac{x^2}{x+2} = t,$

$2t^2 + t - 3 = 0 \qquad t_1 = 1 \;, \quad t_2 = -\frac{3}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+2} = 1 \\ \frac{x^2}{x+2} = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 + 1{,}5x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Ответ $\{-1; 2\}$

Пример №14 $(x-1)^4 + 9(x+1)^4 = 10(x^2-1)^2$

Ответ $\{-2; -0{,}5; 0\}$

Уравнения $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m, m\neq 0$

Если $a+b=c+d, b+c=a+d, a+c=b+d$

то выполняется замена переменной.

- **Пример №15** $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96$,
- 2+1=-3+6
- $(x+2)(x+1)(x-3)(x+6)=-96$
  $(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)=-96$
- $x^2+3x=t,\ (t+2)(t-18)=-96,\ t^2-16t+60=0$
  $t_1=10\ ,\ \ t_2=6$
- $\left[\begin{array}{l} x^2+3x=10 \\ x^2+3x=6 \end{array}\right.$
  $\left[\begin{array}{l} x^2+3x-10=0 \\ x^2+3x-6=0 \end{array}\right.$ Ответ $\left\{-5; 2; \frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$

Пример №16 $(x-2)(x+4)(x+1)(x+7)=63$

В уравнениях числитель и знаменатель делим на x

$$\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c, x\neq 0$$

$$\frac{a}{px+n+\frac{q}{x}}+\frac{b}{px+m+\frac{q}{x}}=c$$

Получим замену

$$px+\frac{q}{x}=t$$

Пример №17 $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^{2+}x+3}=6,$ $\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$

$2x+\frac{3}{x}=t,$ $\frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6,$ $2\,t^2-13t+11=0$ $t_1=1$, $t_2=5{,}5$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3}{x}+2x=1\\ \frac{3}{x}+2x=\frac{11}{2}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x^2-x+3=0\\ 2x^2-5{,}5x+3=0\end{array}\right.$$

Ответ $\{2; 0{,}75\}$

№18 $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

Ответ $\{0{,}5; 3{,}5\}$

Биномиальные уравнения

$$(x+a)^n+(x+b)^n=c$$

замена $x=t-\frac{a+b}{2}$ получим $(t-p)^n+(t+p)^n=c$

Применяем формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^{n-3}b^3+....+nab^{n-1}+b^n$$

- **Пример №19** $(x+6)^4+(x+4)^4=82,$

  $x=t-\frac{6+4}{2}=t-5,$
- $(t-1)^4+(t+1)^4=82$,

  $t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=82,$
- $2t^4+12t^2-80=0,\quad t^4+6t^2-40=0,$

  $\left[\begin{array}{l} t^2=-10 \\ t^2=4 \end{array}\right.\quad t_1=2\ ,\quad t_2=-2$
- $x_1=-3\ ,\quad x_2=-7$ Ответ $\{-3;-7\}$

№20 $(x+3)^4+(x+5)^4=16,$ Ответ $\{3;-5\}$

Домашнее задание

№ 2 $x^3+7x^2-56x+48=0$	Ответ $\{1;4;-12\}$
№ 3 $x^3-5x^2-2x+16=0$	Ответ $\left\{2;\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$
№7 $2x^4+17x^3-17x^2-8x+6=0$	Ответ $\left\{\frac{1}{2};1;-5\pm\sqrt{19}\right\}$
№8 $x^4+3x^3-5x^2-13x+6=0$	Ответ $\{2;-3;-1\pm\sqrt{2}\}$
№11 $2x^4+3x^3-24x^2-3x+2=0$	Ответ $\left\{\frac{5\pm\sqrt{41}}{4};-2\pm\sqrt{5}\right\}$
№12 $12x^4-16x^3-11x^2-16x+12=0$	Ответ $\{2;0{,}5\}$
№14 $(x-1)^4+9(x+1)^4=10(x^2-1)^2$	Ответ $\{-2;-0{,}5;0\}$
№16 $(x-2)(x+4)(x+1)(x+7)=63,$	
№18 $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1,$	Ответ $\{0{,}5;3{,}5\}$
№20 $(x+3)^4+(x+5)^4=16,$	Ответ $\{3;-5\}$