



Лекция 2

- Напряжения** – мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению.

Поскольку внутренние силы, представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то интенсивность этих сил, называемое **полным напряжением**, определяется как указано ранее: Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки (Н/м^2 , $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$).

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Полное напряжение, как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке – **нормальное напряжение** σ_n и касательное к площадке – **касательное напряжение** T_n :

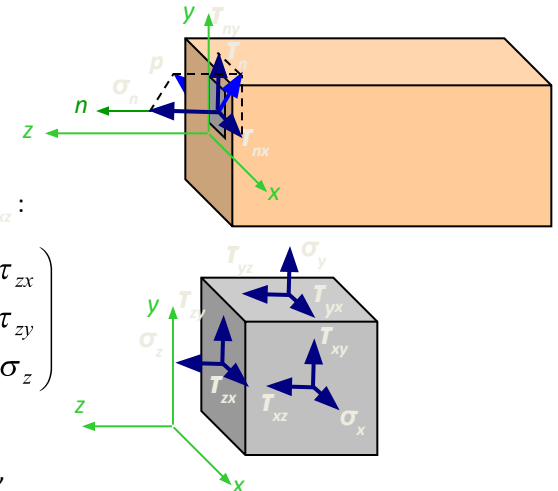
Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, параллельные координатным осям x, y , связанным с поперечным сечением - T_{yx}, T_{xy} :

При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами dx, dy, dz), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси x (площадка x) – σ_x, T_{xy}, T_{xz} :

Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Здесь первый столбец представляет компоненты напряжений на площадках, нормальных к оси x , второй и третий – к оси y и z соответственно. Первый индекс указывает площадку (“место”) действия, второй – направление. Для нормальных напряжений индексы совпадают и один индекс опускается.



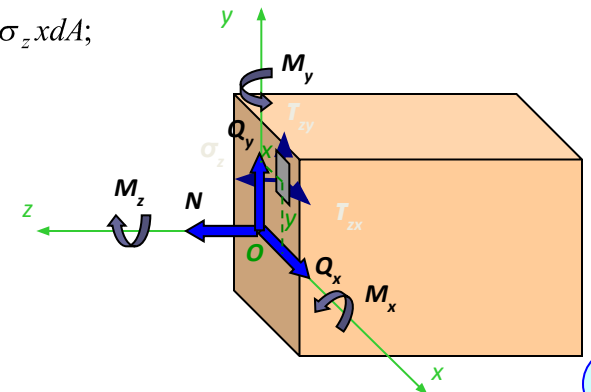
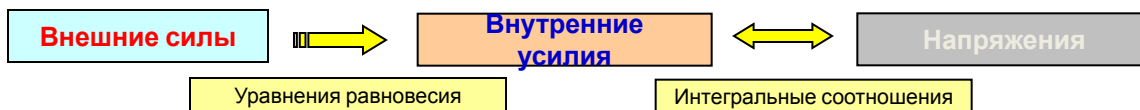
- Связь внутренних усилий и напряжений** – Внутренние усилия в сечении, как было показано выше, связаны уравнениями равновесия с внешними силами, приложенными к оставленной части бруса при его сечении. С другой стороны внутренние усилия есть результат приведения к центру поперечного сечения внутренних сил, приложенных к элементарным площадкам (напряжений), выполняемое сложением, которое для элементарных сил сводится к **интегрированию** по площади поперечного сечения.

Выполнение этой операции для каждого из внутренних усилий приводит к следующим интегральным выражениям:

$$N = \int_A \sigma_z dA; \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA;$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA; \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.$$

Таким образом, в целом связь внешних сил, внутренних усилий и напряжений такова:



Лекция 2

- **Напряжения** – мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению.

Поскольку внутренние силы, представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то интенсивность этих сил, называемое **полным напряжением**, определяется как указано ранее:

Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки (Н/м^2 , $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$).

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Полное напряжение, как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке – **нормальное напряжение** σ_n и касательное к площадке – **касательное напряжение** τ_n :

Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие,

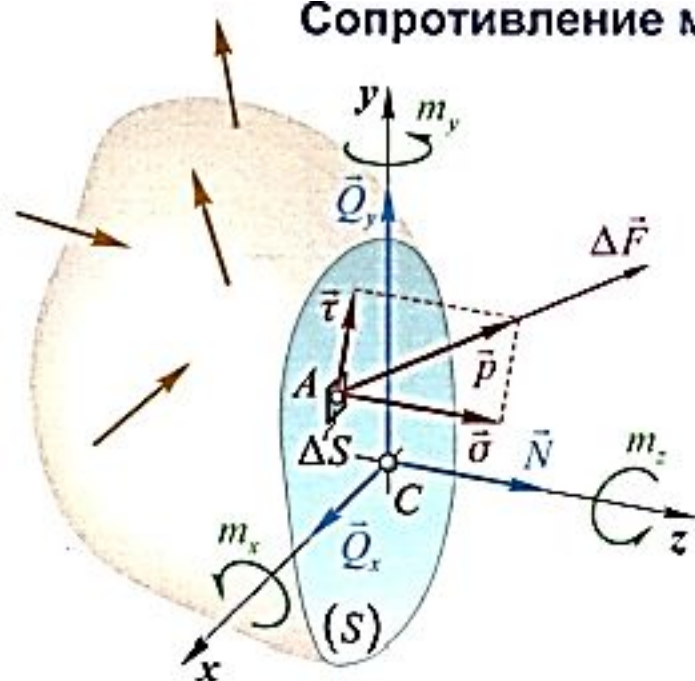
параллельные координатным осям x, y , связанным с поперечным сечением - τ_{nx}, τ_{ny} :

При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами dx, dy, dz), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси x

(площадка x) – $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$:

Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

Сопротивление материалов. Напряжения и деформации



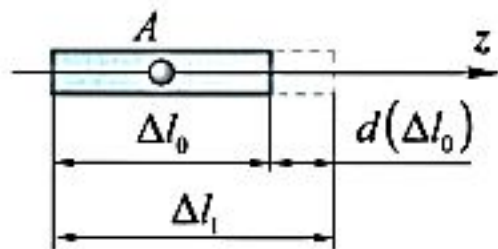
Совокупность внутренних сил состоит из бесконечного множества бесконечно малых сил $\Delta \vec{F}$.

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{\Delta S} \quad \text{— напряжение в точке } A.$$

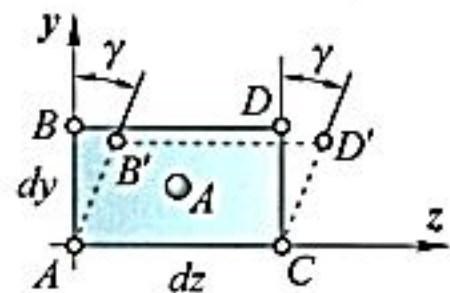
$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}.$$

σ — нормальное напряжение — составляющая напряжения, перпендикулярная плоскости сечения;

τ — касательное напряжение; располагается в плоскости сечения.



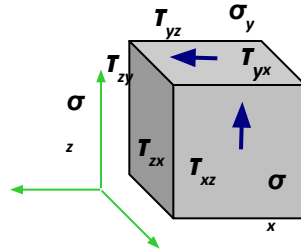
Линейная деформация в точке A по направлению z : $\varepsilon_z = \lim_{\Delta l_0 \rightarrow 0} \frac{d(\Delta l_0)}{\Delta l_0}$.



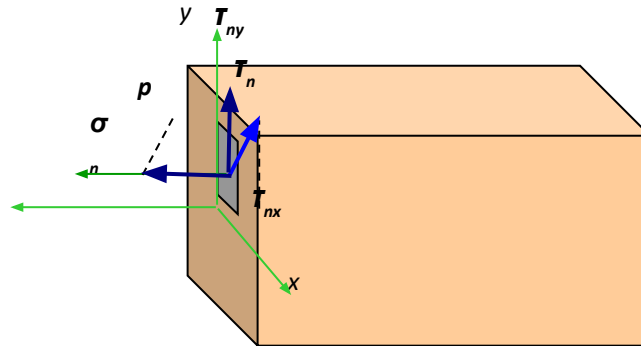
γ — угловая деформация в точке A в плоскости zOy : $\gamma = \lim_{DC \rightarrow 0} \angle DCD'$.

Соотношения между напряжениями и деформациями однозначны и характеризуют механические свойства материала.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



Здесь первый столбец представляет компоненты напряжений на площадках, нормальных к оси x , второй и третий – к оси y и z соответственно. Первый индекс указывает площадку (“место”) действия, второй – направление. Для нормальных напряжений индексы совпадают и один индекс опускается.



Напомним, что **опорные реакции конструкции** включаются в число **внешних сил**.

Для определения этих реакций в статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно и следует дополнительно рассматривать **перемещения**, связанные с внутренними усилиями и напряжениями, а также физические соотношения упругости.

Задача определения напряжений в силу интегральности соотношений с внутренними усилиями всегда статически неопределима и необходимо дополнительно рассматривать **деформации** тела с целью определения закона распределения напряжений по сечению.

Связь внутренних усилий и напряжений

– Внутренние усилия в сечении, как было показано выше, связаны уравнениями равновесия с внешними силами, приложенными к оставленной части бруса при его сечении. С другой стороны внутренние усилия есть результат приведения к центру поперечного сечения внутренних сил, приложенных к элементарным площадкам (напряжений), выполняемое сложением, которое для элементарных сил сводится к **интегрированию** по площади поперечного сечения.

Выполнение этой операции для каждого из внутренних усилий приводит к следующим интегральным выражениям:

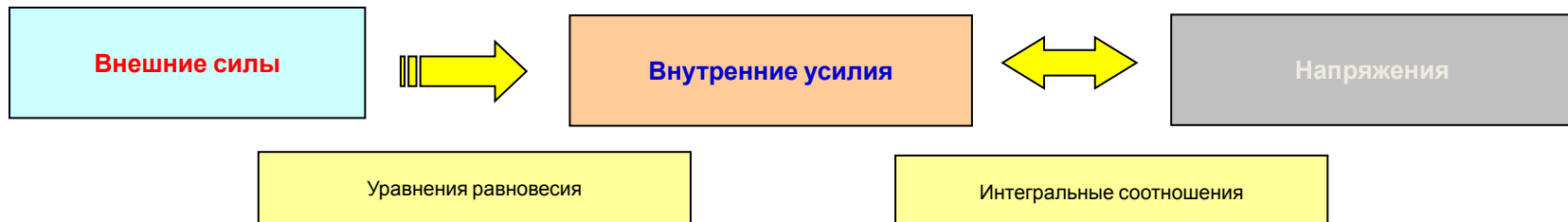
$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = - \int_A \sigma_z x dA;$$

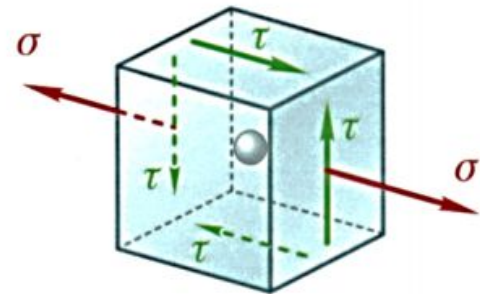
$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.$$

Таким образом, в целом связь внешних сил, внутренних усилий и напряжений такова:



Напряженное состояние в точке

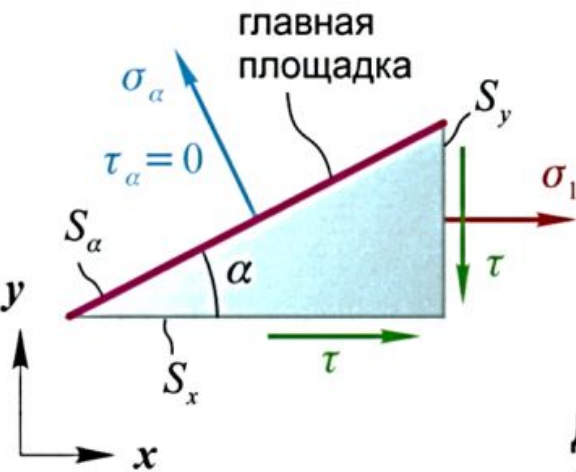
Напряженное состояние в точке для бруса (вала, балки стержня)



Напряженное состояние в точке моделируется напряжениями на гранях параллелипипеда, проведенных бесконечно близко к самой точке.

Напряжения τ — парные, равны по величине и направлены либо к общему ребру, либо от него.

Всегда существуют **главные площадки** — площадки, касательные напряжения в которых равны нулю. Напряжения, действующие в этих площадках, называются **главными**. Найдем их:



$$S_x = S_\alpha \cos \alpha; \quad S_y = S_\alpha \sin \alpha.$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_\alpha S_\alpha \sin \alpha + \sigma S_\alpha \sin \alpha + \tau S_\alpha \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha S_\alpha \cos \alpha - \tau S_\alpha \sin \alpha = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma - \sigma_\alpha) \sin \alpha + \tau \cos \alpha &= 0; \\ -\tau \sin \alpha + \sigma_\alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ Система однородных (правые части равны нулю) уравнений относительно } \cos \alpha \text{ и } \sin \alpha \text{ совместно не равных нулю.}$$

Для существования ненулевых решений определитель системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma - \sigma_\alpha & \tau \\ -\tau & \sigma_\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha^2 - \sigma \cdot \sigma_\alpha - \tau^2 = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_{1,3}.$$



Лекция 2 (продолжен – 2.2)

■ **Перемещения – переход точек тела в новое положение вследствие изменения формы и размеров тела под действием нагрузки.** Полное перемещение точки в пространстве раскладывается на компоненты u , v и w , параллельные осям x , y и z , соответственно. Перемещения рассматриваемой точки зависят от деформации всех нагруженных областей тела и включают в себя перемещения как жесткого целого ненагруженных областей. Таким образом, перемещения не могут характеризовать степень деформирования в окрестности рассматриваемой точки.

■ **Деформация в точке – мера деформирования материала в ее окрестности.** Выделим в рассматриваемой точке тела элементарный объем (параллелепипед со сторонами dx , dy , dz) и рассмотрим его возможные изменения размеров и формы.

Пусть за счет деформации длины его ребер получат **абсолютные удлинения** Δdx , Δdy и Δdz :

Относительные линейные деформации в точке:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Кроме линейных деформаций, связанных с изменением размеров линейных элементов возникают **угловые деформации** или **углы сдвига**, связанные с изменением формы.

Например, в плоскости xy могут возникать малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда:

$$\frac{\Delta x}{dy} = \operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}.$$

Такие угловые деформации в общем случае могут иметь место во всех трех плоскостях. Все относительные деформации весьма малы и имеют для реальных материалов порядок $\approx 10^{-4} - 10^{-3}$.

Таким образом, совокупность относительных линейных и угловых деформаций определяют деформированное состояние в точке и образуют **тензор деформаций**, подобный тензору напряжений:

Примечание: Половинные углы сдвига используются в целях получения аналогичных формул преобразования с тензором напряжений.

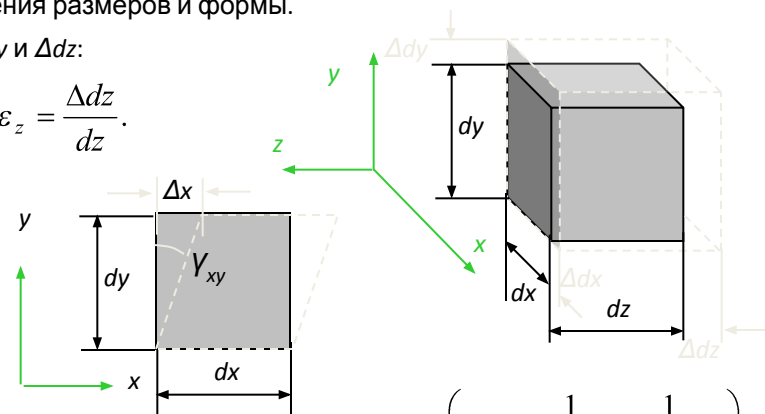
В зависимости от того, какие из компонент относительных деформаций имеют нулевое значение

в рассматриваемой области или для всего тела различают следующие **простые виды деформаций**:

1. **Линейная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, углы сдвига равны нулю, остальными линейными относительными деформациями пренебрегается (характеризуется абсолютным и относительным удлинением).
2. **Плоская деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$ или $\varepsilon_y \neq 0$, остальные относительные деформации равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным сужением площади поперечного сечения). Эти виды деформаций обычно реализуются при растяжении-сжатии.
3. **Объемная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, углы сдвига равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным изменением объема).
4. **Чистый сдвиг** – линейные относительные деформации равны нулю, углы сдвига не равны нулю (характеризуется изменением формы, изменение объема не происходит). Это вид деформации также возникает при кручении.

В соответствии с видом деформации вначале последовательно изучают такие простейшие напряженно-деформированные состояния как

растяжение-сжатие, чистый сдвиг и кручение, чистый изгиб. Далее изучаются более сложные – поперечный изгиб, сложное



$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

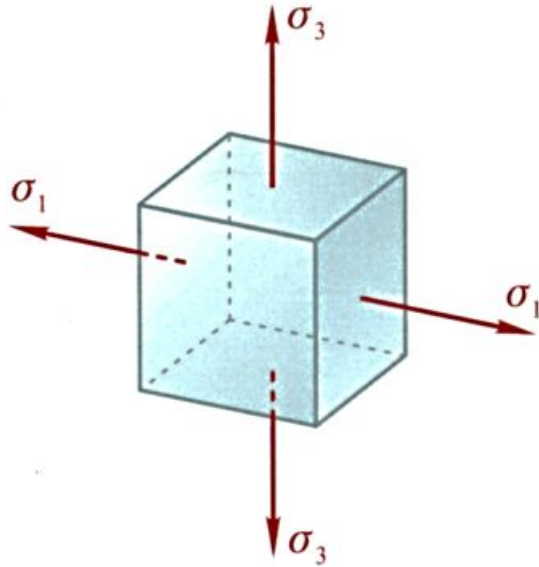
Максимальные касательные напряжения

Установим порядок обозначения главных напряжений:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Для бруса (вала, балки, стержня):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_p - \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}).$$



$$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow -\tau_{nl} \cdot S + \sigma_1 \cdot S_y \cos \beta + \sigma_3 \cdot S_x \sin \beta = 0;$$

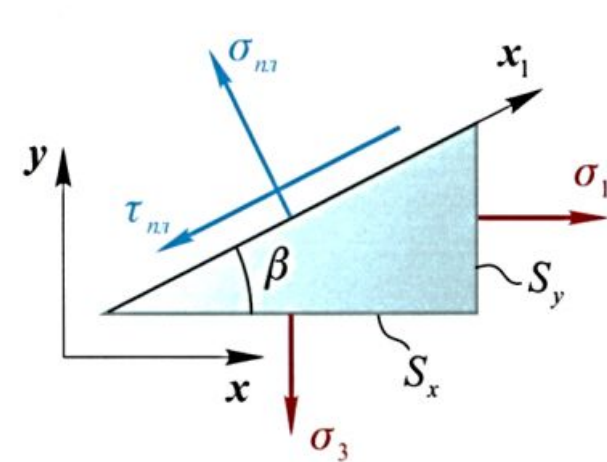
$$-\tau_{nl} \cdot \xi + \sigma_1 \cdot \xi \sin \beta \cos \beta + \sigma_3 \cdot \xi \cos \beta \sin \beta = 0;$$

$$\tau_{nl} = \frac{1}{2} \sin 2\beta (\sigma_1 - \sigma_3).$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \Rightarrow \tau_{max} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}.$$

$\beta_{max} = 45^\circ$ — угол наклона площадки с максимальным касательным напряжением к площадке 1 или 3.

При одноосном растяжении $\tau_p = 0$; $\tau_{max} = \sigma_p$.

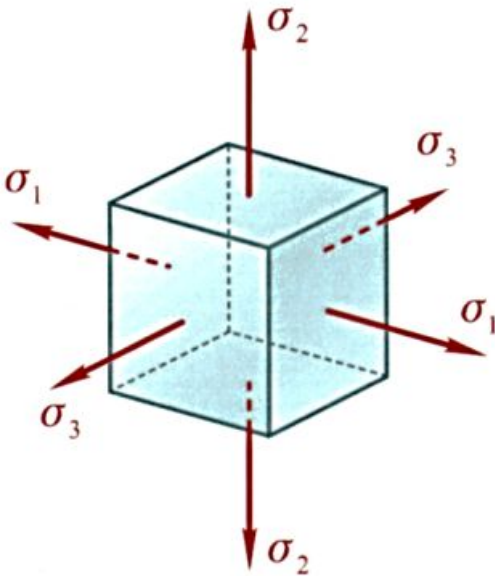


Теории прочности

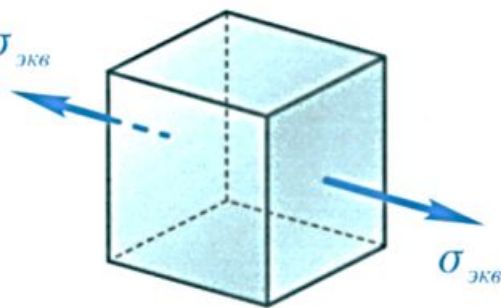
Гипотезы прочности устанавливают количественные критерии **предельного напряженного состояния**, считающегося опасным, неприемлимым. Появляется возможность сведения любых напряженных состояний к эквивалентному, соответствующему растяжению образца материала. Условие прочности всегда одно:

$$\sigma_{\text{эkv}} \leq [\sigma].$$

Универсальных теорий не существует. Наиболее часто применяется **теория наибольших касательных напряжений** — материал переходит в состояние текучести когда максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения, характерного для данного материала.



?



Для бруса (вала):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}.$$

Для растягиваемого образца:

$$\tau_p = 0; \quad \tau_{\text{max}} = \sigma_p = \sigma_{\text{эkv}}.$$

$$\text{Следовательно, } \sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 4\tau_p^2}.$$

По **гипотезе энергии формоизменения** для бруса (вала):

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_p^2}.$$



Лекция 2 (продолжен – 2.3)

■ **Определение внутренних усилий** – Внутренние усилия определяются **методом сечений** в совокупности точек по длине бруса с целью обнаружения их максимальных значений. График изменения внутреннего усилия по оси бруса называется **эпюрой**.

Общий порядок построения эпюр внутренних усилий:

Если необходимо, то **определяются опорные реакции** так, как это делается в курсе теоретической механики (выбрать объект, отбросить связи, заменить отброшенные связи реакциями, составить уравнения равновесия). Реакции можно не находить, если они не входят в число внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения.

1. **Определяется число участков** бруса, на которых действует постоянная нагрузка. Число участков зависит от количества точек приложения внешних сил, от места расположения опоры, точки приложения сосредоточенной нагрузки, от начала или конца распределенной нагрузки.

2. **На каждом из участков проводится сечение**. На каждом сечении указывается текущая координата сечения z . При выборе начала локальных координат z можно выбрать начало или конец распределенной нагрузки.

3. **Для рассматриваемого сечения составляется уравнение равновесия** оставленной части или используя установленную сторону от сечения.

4. **По полученным выражениям** определяются значения внутренних усилий в разрешенных сечениях.

■ **Внутренние усилия при растяжении**

фактор – **продольная сила** N . В соответствии с уравнения равновесия в проекции на ось z , с

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 1: $N^{I-I} = F_1 - F_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_2 \leq b$.

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{II-II} и составим уравнение равновесия в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0; \quad -N^{II-II} - F_2 = 0.$$

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 2: $N^{II-II} = -F_2$.

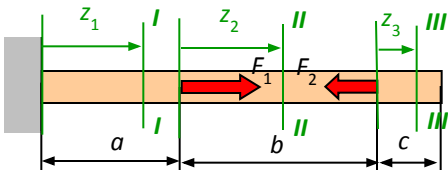
Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $\sum Z_i = 0; \quad -N^{III-III} = 0, \quad N^{III-III} = 0$.

Полученные выражения показывают, что **продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на ось бруса сил, взятых по одну сторону от сечения!**

$$N = \sum F_{xi}^{прав} = \sum F_{xi}^{лев}$$

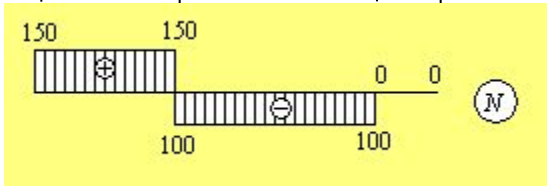
Знак слагаемых **положителен**, если рассматриваемая сила направлена **от сечения**, т.е. будучи приложена к сечению **вызывает растяжение** части бруса по другую сторону от сечения.

Продольная сила считается **положительной**, если она вызывает **растяжение**, т.е. направлена от сечения (в сторону внешней нормали), и **отрицательной**, если она вызывает **сжатие**, т.е. направлено к сечению.



Пусть **прямоугольный брус** нагружен **продольными силами**. Построим эпюру продольных сил:

При построении **эпюры N** , положительные значения обычно откладываются вверх от базисной линии или вправо, если она вертикальна. Реакции **левой опоры** можно не определять, т.к. в этом примере можно ограничиться рассмотрением **лишь сил, приложенных к правым оставленным частям (справа от сечений)**. Пусть $F_1 = 250$ кН, $F_2 = 100$ кН. Откладывая на каждом из участков значения продольной силы в некотором **выбранном масштабе** получаем эпюру N :



Проведем сечение I-I на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_1 \leq a$. Обратите внимание, что скачки на эпюре N располагаются в точках приложения внешних **сосредоточенных сил** и **равны величинам этих сил**. Соответственно скачок на левом конце

отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N . Эпюра дает величину опорной реакции. Составим уравнение равновесия в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0; \quad -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0.$$



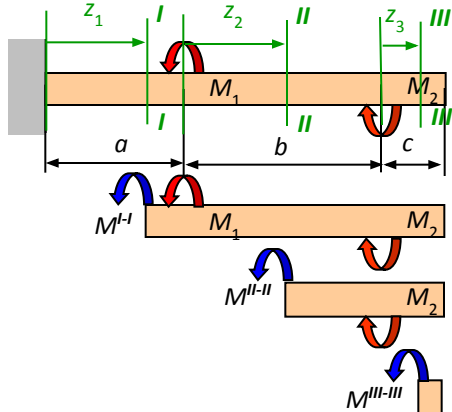
Лекция 2 (продолжен – 2.4)

- Внутренние усилия при кручении** – При кручении в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор – **крутящий момент** M_z . В соответствии с методом сечений величина и направление крутящего момента может быть найдены из уравнения равновесия в моментах относительно оси, совпадающей с осью стержня, составленного для оставленной части:

- Крутящий момент считается **положительным**, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он поворачивает сечение по ходу часовой стрелки.

Внимание! Это правило знаков условное и не совпадает с принятыми правилами знаков моментов, углов поворота в теоретической механике и математике, поскольку связано не с системой координат, а с видом деформации оставленной части, точно также, как правило знаков для продольного усилия связано не с направлением оси z , а с видом деформации рассматриваемой части бруса.

- Построение эпюры крутящих моментов** принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил. Положительные значения откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз.



Пусть прямолинейный брус нагружен внешними сосредоточенными крутящими моментами M_1, M_2 :

Используя полученные выражения для крутящего момента построим эпюру крутящих моментов: Пусть $M_1=250$ Нм, $M_2=100$ Нм. Откладывая на каждом из участков значения крутящего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюру M_z :

Обратите внимание, что скачки на эпюре M_z располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных моментов и равны величинам этих моментов. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорного момента.

в моментах относительно оси z :

$$\sum M_{zi} = 0; \quad -M_z^{I-I} - M_1 + M_2 = 0.$$

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 1: $M_z^{I-I} = -M_1 + M_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее действия: $0 \leq z_2 \leq b$.

бросим левую часть, заменим ее действие крутящим моментом M_z^{II-II}

ставим уравнение равновесия в моментах относительно оси z :

$$\sum M_i = 0; \quad -M_z^{II-II} + M_2 = 0.$$

уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 2:

$$M_z^{II-II} = M_2.$$

Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$):

$$\sum M_{zi} = 0; \quad -M_z^{III-III} = 0. \quad M_z^{III-III} = 0.$$

Полученные выражения показывают, что **крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси бруса, взятых по одну сторону от сечения!**

$$M_z = \sum M_{zi}^{\text{прав}} = \sum M_{zi}^{\text{лев}}$$

Знак слагаемых положителен, если рассматриваемый внешний крутящий момент вращает сечение по часовой стрелке при взгляде на сечение со стороны внешней нормали.

