

ЭТИ и экономика:

**I. Принципы оптимальности
и модели динамики
поведения**

профессор А.А. Васин

Введение.

Классическая теория игр.

Теория игр широко используется для описания и анализа поведения экономических агентов в микроэкономике, экономике общественного сектора, политэкономии и других разделах экономической теории.

Важнейшие понятия классического теоретико-игрового анализа:

- **игра в нормальной форме** (как модель взаимодействия агентов)
 - множество участников (игроков)
 - множество возможных стратегий поведения каждого игрока
 - функция выигрыша
- **принцип равновесия Нэша** (как способ определения стратегий агентов во взаимодействии).
 - *РН* - такой набор стратегий, что никакой отдельный игрок не может увеличить свой выигрыш за счет изменения своей стратегии при фиксированных стратегиях остальных игроков.
- **принцип исключения доминируемых стратегий**
 - стратегия игрока называется *доминируемой*, если существует альтернативная стратегия, обеспечивающая ему больший выигрыш при любых стратегиях остальных игроков.
 - принцип доминирования означает, что рациональные игроки не будут использовать доминируемые стратегии
 - исключение по доминированию можно проводить итеративно

Эволюционная теория игр (ЭТИ): рассматриваемые проблемы.

- Проблема обоснования соответствия реального поведения экономических агентов принципам равновесия Нэша и исключения доминируемых стратегий.
 - В типичном случае поиск равновесий Нэша и множеств недоминируемых стратегий представляет нетривиальные математические задачи, для решения которых необходимо довольно точное знание всех множеств стратегий и функций выигрыша (модели экономической конкуренции по Курно и Бертрану).
 - Обычный участник такого взаимодействия располагает точной информацией лишь о своих стратегиях и функции выигрыша и зачастую не имеет понятия об упомянутых принципах принятия решений.
 - Почему же можно ожидать, что его поведение будет им соответствовать?
 - Обоснование принципов равновесия Нэша и исключения доминируемых стратегий с помощью моделей адаптивно-подражательного поведения (МАПП).
 - Эти модели показывают, что сходимость к равновесию по Нэшу и исключение доминируемых стратегий в определенных условиях вытекают из общих свойств эволюционных и адаптивно-подражательных механизмов формирования поведения.
 - При этом не требуется ни полной информированности, ни особой рациональности в выборе стратегий: достаточно знать величины выигрышей для текущей стратегии поведения и выбранной альтернативы.
 - Обсуждается понятие эволюционно-устойчивой стратегии (ЭУС) и его связь с равновесием Нэша.

- Как определить функции полезности участников для конкретных взаимодействий?
 - В экономике концепция “homo economicus” – “человек экономический”
 - В роли производителя – максимизация прибыли.
 - В роли потребителя – максимизация объема потребления.
 - Несоответствие реальному поведению: российский рынок труда.
 - Модель естественного отбора эволюционных механизмов.
 - В ней рассматривается сообщество взаимодействующих популяций, различающихся этими механизмами.
 - Анализ модели показывает, что если репликация входит в множество конкурирующих механизмов, то динамика поведения сообщества согласована с индивидуальной приспособленностью стратегий в указанном смысле.

- Индивидуумы максимизируют свой выигрыш или активно влияют на функции выигрыша других участников? (агрессивная реклама, распространение наркотиков).

Популяционная игра.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

Это понятие подобно игре в нормальной форме в классической теории, и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности:

- RH
- *решение по доминированию,*
- а также вводится понятие *эволюционно устойчивой стратегии*

Формально **популяционная игра** G задается совокупностью параметров

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- где J - множество стратегий участников этой игры
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям
- $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j , в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды).
Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

Пример популяционной игры (M. Smith).

Рассматриваются парные конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли α хозяина объекта конкуренции, а другие – в роли β захватчика;

- J^α, J^β – множества вариантов поведения (альтернатив) в соответствующих ролях
- $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\alpha$ и $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\beta$ – выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j^\alpha \in J^\alpha$, а β – $j^\beta \in J^\beta$.
- $\lambda(N)$ – вероятность столкновения. Не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N .
- ϕ^0 – выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения.
- Стратегия индивидуума – пара $j = (j^\alpha, j^\beta)$, где $j^\alpha \in J^\alpha$, а $j^\beta \in J^\beta$ – правило выбора варианта поведения в зависимости от роли.
- Функция $f_j(\pi, N)$ указывает средний выигрыш индивидуумов, использующих стратегию j .

Обозначим через $p_\alpha(\pi)$ и $p_\beta(\pi)$ распределения по вариантам поведения индивидуумов в ролях α и β , соответствующие распределению по стратегиям π . Тогда

$$p_{j^\alpha}(\pi) = \sum_{j^\beta \in J^\beta} \pi_{j^\alpha j^\beta}, \quad p_{j^\beta}(\pi) = \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \pi_{j^\alpha j^\beta},$$

а для стратегии $i = (i^\alpha, i^\beta)$

$$f_{i^\alpha i^\beta}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \frac{1}{2}\lambda(N)\left(\sum_{j^\beta \in J^\beta} \phi_{i^\alpha j^\beta}^\alpha p_{j^\beta}(\pi) + \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \phi_{j^\alpha i^\beta}^\beta p_{j^\alpha}(\pi)\right).$$

Рассмотрим также случай, когда **участники не различают состояния**. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив: $J = J^\alpha = J^\beta$, $\pi = (\pi_j, j \in J)$, $\phi_{ij}^\alpha = \phi_{ij}$, $\phi_{ij}^\beta = \phi_{ji}$,

$$\bar{f}_i(\pi) = \sum_{j \in J} \pi_j \phi_{ij}, \quad f_i(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \lambda(N)\bar{f}_i(\pi).$$

В этом случае G эквивалентна игре $\bar{G} = \langle J, \bar{f}_i(\pi), i \in J, \pi \in \Pi \rangle$.

Ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша индивидуума не зависят от его роли, возможна и в предыдущей модели. Однако модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются совершенно различными.

Основные статические принципы оптимальности.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega \text{ и } \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega). \quad (2.1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, то есть имеют вид $f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω . Тогда (2.1) эквивалентно следующему условию, которое уже не содержит параметра ω :

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*).$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако, из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, **более сильные, критерии оптимальности.**

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что $\forall \omega \in \Omega \forall \pi \neq \pi^* \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0,1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega).$$

Здесь $f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ – средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π' .

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^ , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .*

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное **утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала** в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша (Schaffer, 1988, 1989).

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, **где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.**

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{-j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию. *Т.е., "мутант" не получает преимущества перед "основной популяцией" в смысле значения выигрыша.*

Так определенная ЭУС может не являться равновесием Нэша. В частности, для игры, соответствующей симметричной олигополии Курно, в равновесии Нэша игроки используют "рыночную власть" и снижают объемы выпуска по сравнению с конкурентным равновесием, в то время как ЭУС соответствует конкурентному равновесию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственным лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists j \in J : \pi_j^* \neq 1 \quad \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega \quad f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Отметим, что **всякое строгое равновесие является ЭУС**, в том числе для групп с достаточно большой конечной численностью.

Schaffer (1988) показал, что для случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии участников (“хозяин-захватчик” в рассмотренном примере) не существует иных ЭУС, кроме строгих равновесий.

Для функций выигрыша $f_j(\pi, \omega)$ общего вида равновесий по Нэшу может не существовать. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности – **доминирование**, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.

Понятия доминирования

Говорят, что **стратегия j доминирует** стратегию i ($j \underline{\text{D}} i$) на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если при любом распределении по стратегиям $\pi \in \Pi'$ стратегия j **дает больший выигрыш**, чем стратегия i ($\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \omega \in \Omega, \forall \pi \in \Pi' f_j(\pi, \omega) \geq f_i(\pi, \omega) + \varepsilon$).

Множество $J' \subseteq J$ называется доминирующим, если оно может быть получено в результате последовательного **исключения доминируемых стратегий**, т.е. найдется такое целое $T > 1$, что

$$J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \dots \subset J_1 = J, \text{ где } \forall k \in \{1, \dots, T-1\}, \forall i \in J_k \setminus J_{k+1} \exists j \in J_{k+1} : \\ j \underline{\text{D}} i \quad \Pi_k = \{ \pi \in \Pi, \pi_j = \emptyset, \forall j \notin J_k \}.$$

Описанная процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.

Если в данном определении доминирования $\varepsilon > 0$, то говорят, что **стратегия j строго доминирует** стратегию i ($j \underline{\text{D}} i$), а J' называется **строго доминирующим множеством**. Понятия доминирования смешанными стратегиями и доминирующего в смешанных стратегиях множества вводятся аналогично.

Поиск РН и доминирующих множеств популяционной игры.

Поиск равновесий по Нэшу и доминирующих множеств популяционной игры в общем случае представляет довольно сложные экстремальные задачи. Для **случайных парных столкновений** их удастся свести к известным задачам вычисления соответствующих **ситуаций равновесия для биматричных игр.**

Утверждение 2.1. Распределение π^* является равновесием по Нэшу игры \bar{G} , в которой $\bar{f}_i(\pi) = \sum \pi_j \phi_{ij}$ и участники столкновений не различают состояния, в том и только в том случае, если (π^*, π^*) – равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях симметричной биматричной игры $\Gamma = \langle (\phi_{ij})_{i,j \in J}, (\phi_{ji})_{i,j \in J} \rangle$, т.е. $\forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi)$.

Утверждение 2.2. Распределение π^* , для которого $\pi_s^* = 1$, является строгим равновесием игры \bar{G} в том и только в том случае, если $\phi_{ss} > \phi_{is}$ для всех $i \neq s$, т.е. (s, s) – строгое симметричное равновесие по Нэшу игры Γ в чистых стратегиях.

Утверждение 2.3. Стратегия s доминирует стратегию r ($s \underline{\text{D}} r$) в игре \bar{G} в том и только в том случае, если $s \underline{\text{D}} r$ в игре Γ , т.е. $\phi_{sj} \geq \phi_{rj}$ для любых $j \in J$.

Утверждение 2.4. Распределение $\pi = (\pi_{j^\alpha j^\beta})$ тогда и только тогда является равновесием по Нэшу игры G для асимметричных парных столкновений, когда $(p^\alpha(\pi), p^\beta(\pi))$ – равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях игры $\Gamma = \langle (\phi_{j^\alpha j^\beta}^\alpha), (\phi_{j^\alpha j^\beta}^\beta) \rangle$.

- Таким образом, для всех случайных парных столкновений равновесия Нэша популяционной игры соответствуют равновесиям Нэша биматричной игры, описывающей парное взаимодействие.
- Аналогичная связь существует для случайных столкновений с бóльшим числом участников, когда отдельное локальное взаимодействие характеризуется игрой n лиц. При этом результаты легко обобщаются на случай межпопуляционных столкновений, когда в определенных ролях выступают индивидуумы из разных популяций или социальных групп ("хищник - жертва", "работодатели - наемные работники" и т.п.)
Главное условие соответствия – *независимость распределения по взаимодействующим группам от стратегий участников.*

Модель адаптивно - подражательного поведения (МАПП)

При каких условиях адаптивно-подражательные механизмы формируют в популяции поведение, соответствующее принципам Нэша и исключения доминируемых стратегий?

Пусть популяционная игра $G = \langle J, f_j(\pi) \rangle$ описывает взаимодействие индивидуумов популяции, которое происходит непрерывно, в каждый момент времени.

- Численность популяции и внешние факторы постоянны (f_j не зависят от ω).
- С некоторой интенсивностью $r_j = r_j(f(\pi), \pi)$, зависящей от текущего распределения игроков по стратегиям π и текущего вектора выигрышей $f(\pi) = (f_j(\pi), j \in J)$, игрок, использующий стратегию j , переходит в «адаптивное» состояние, в котором он пересматривает свое поведение.
- В адаптивном состоянии, игрок, использующий стратегию j , выбирает стратегию i в качестве альтернативной с вероятностью $q_{ji} = q_{ji}(f(\pi), \pi)$.
- Сравнивается текущая и альтернативная стратегии и, если выбранная для сравнения стратегия i оказывается лучше исходной стратегии j (т.е. дает индивидууму больший выигрыш при данном распределении по стратегиям), то с вероятностью $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(f(\pi), \pi)$ игрок изменяет свою стратегию с j на i .

Тогда $r_j \pi_j \sum_{i: f_i > f_j} q_{ji} \gamma_{ji}$ – средняя доля игроков, меняющих за единицу времени свою стратегию j на стратегию из множества $\{i \mid f_i > f_j\}$, а $\sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i q_{ij} \gamma_{ij}$ – аналогичная доля игроков, меняющих за единицу времени стратегию из множества $\{i \mid f_i < f_j\}$ на стратегию j . Таким образом, уравнения динамики для распределения $\pi(t)$ имеют вид

$$\dot{\pi}_j = -r_j \pi_j \sum_{i: f_i > f_j} q_{ji} \gamma_{ji} + \sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i q_{ij} \gamma_{ij}, \quad j \in J. \quad (2.2)$$

Функции r_j, γ_{ji}, q_{ji} удовлетворяют условиям $\forall j \in J r_j \geq 0; \quad \forall i, j \in J \gamma_{ji} \geq 0, q_{ji} \geq 0; \quad \forall j \in J \sum_{i \in J} q_{ji} = 1$.

Указанные условия гарантируют, что траектория $\{\pi(t, \pi^0)\}$ не выходит из множества Π в каждый момент времени t и при любом начальном распределении π^0 .

МАПП. Примеры.

Пример 1. Пусть интенсивность перехода в адаптивное состояние постоянна, альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания, а вероятность смены текущей стратегии на альтернативную пропорциональна разности соответствующих функций выигрыша. Таким образом,

$$r_j(f(\pi), \pi) \equiv r, q_{ji}(f(\pi), \pi) = \pi_i, \gamma_{ji}(f(\pi), \pi) = \gamma \cdot (f_i(\pi) - f_j(\pi)),$$

и система (2.2) принимает вид:

$$\dot{\pi}_j = r\gamma\pi_j(f_j(\pi) - \sum_{i \in J} \pi_i f_i(\pi)), \quad j \in J.$$

Полученная система является аналогом автономной непрерывной модели динамики репликаторов, рассматриваемой в разделе 3.

Пример 2. Альтернативная стратегия выбирается с равными вероятностями из множества допустимых стратегий, т.е. $q_{ji}(f(\pi), \pi) = 1/|J|$.

Этот пример иллюстрирует механизм индивидуальной адаптации, когда каждому игроку известно все множество доступных стратегий и адаптация происходит, исходя из текущих значений выигрыша и независимо от поведения остальных членов популяции.

Очевидно, что существует множество различных МАПП. Следующие теоремы в общих предположениях устанавливают **связь между устойчивыми состояниями МАПП и решениями соответствующей популяционной игры.** Отметим, что любое равновесие по Нэшу популяционной игры G является стационарной точкой МАПП.

Связь между устойчивыми состояниями МАПП и решениями популяционной игры.

Обозначим $J(\pi) = \text{Arg max}_{k \in J} f_k(\pi)$ – множество оптимальных ответов на распределение π .

Теорема 2.1. Пусть для МАПП выполняются следующие условия 1), 2) и либо условие 3), либо 3'):

- 1) Для любого $j \in J$ и любого значения аргумента $r_j > 0$
(интенсивности перехода в адаптивное состояние положительны для всех стратегий);
- 2) Для любых $i, j \in J$ функции γ_{ji} имеют вид $\gamma(f_i(\pi) - f_j(\pi))$, где для любого $x > 0$ $\gamma(x) > 0$
(вероятность смены текущей стратегии на альтернативную является функцией от разности соответствующих значений выигрыша и положительна при положительности аргумента);
- 3) Для любых $j \in J$ и $i \in J(\pi)$ выполнено $q_{ji} > 0$
(вероятность выбора стратегии в качестве альтернативной положительна для любой стратегии, дающей наибольший выигрыш при текущем распределении членов популяции по стратегиям);
- 3') Для любых $j \in J$ и $i \in J(\pi)$ выполнено $q_{ji} \geq q\pi_i$, где константа $q > 0$
(для любой чистой стратегии, дающей максимальный выигрыш, вероятность выбора этой стратегии в качестве альтернативной не меньше, чем доля в популяции индивидуумов, использующих данную стратегию, умноженная на некоторую положительную константу).

Тогда:

- а) любое устойчивое (по Ляпунову) состояние π^* системы (2.2) является равновесием по Нэшу популяционной игры $G = \langle J, f_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \rangle$;
- б) если начальное распределение $\pi^0 > 0$ и для траектории $\{\pi(t, \pi^0)\}$ существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \pi^0) = \pi^*$, то π^* является равновесием по Нэшу игры G ;
- в) если π^* – точка строгого равновесия для популяционной игры G , то π^* – асимптотически устойчивое состояние системы (2.2).

Теорема 2.2. Пусть для МАПП, заданной системой (2.2), выполняются условия 1, 2 теоремы и, кроме того,

1. для любых $i, j \in J$ выполнено $q_j = \pi_i$

(выбор альтернативной стратегии происходит путем случайного подражания);

2. если $f_j \geq f_i$, то $r_j \leq r_i$

(интенсивность перехода в адаптивное состояние не возрастает при увеличении функции выигрыша);

3. $\gamma(x)$ монотонно возрастает по x

(вероятность смены текущей стратегии на альтернативную монотонно возрастает по разности выигрышей).

Если при этом \bar{J} – строго доминирующее множество стратегий в популяционной игре $G = \langle J, f_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \rangle$, то для любого $j \notin \bar{J}$ и любого начального состояния системы $\pi^0 > 0$ на соответствующей траектории МАПП $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t, \pi^0) = 0$.

Замечание.

- Другие варианты таких условий согласованности динамики МАПП с решениями по Нэшу и по доминированию (см. Samuelson L., Zhang J. (1992) и Weibull (1995)) связаны с понятием монотонной динамики вида $\dot{\pi}_j = \pi_j g_j(\pi)$, $j \in J$, удовлетворяющей условию $g_j(\pi) > g_i(\pi) \Leftrightarrow f_i(\pi) > f_j(\pi)$, $\forall i, j \in J, \pi \in \Pi$.

В то же время существуют модели адаптации, не удовлетворяющие утверждениям теорем 2.1 и 2.2. Рассматриваемые в следующем разделе модели естественного отбора эволюционных механизмов объясняют, почему следует ожидать согласованности реальной динамики поведения с указанными принципами оптимальности. Более того, в рамках этих моделей эндогенно определяются целевые функции участников.

Модель динамики репликаторов (МДР)

- Популяция характеризуется множеством S возможных стратегий.
- Распределение индивидуумов по стратегиям в данный момент времени задается вектором $\pi = (\pi_s, s \in S)$.
- Индивидуумы различаются только стратегиями поведения, не меняют стратегию в течение жизни, а потомки наследуют стратегию родителей.
- Если говорить о двуполовых популяциях, то в данной модели индивидуумов одного пола следует рассматривать как отдельную популяцию.
- Известны соответствующие механизмы наследования – генетические, когда стратегия поведения задается генами, сцепленными с половым геном, а также механизмы подражания, когда стратегия определяется путем подражания поведению родителя соответствующего пола.
- Итог взаимодействия в популяции за данный период времени характеризуется для участников со стратегией s функцией рождаемости $fer_s(\pi, N)$, определяющей среднее число потомков, и функцией выживаемости $v_s(\pi, N)$, определяющей долю выживших в зависимости от распределения π и общей численности популяции N .

Обозначим $N_s = \pi_s N$ - численность использующих стратегию s .

Тогда динамика численностей $N_s(t), s \in S$, описывается следующей системой:

$$N_s(t+1) = N_s(t) f_s(\pi(t), N(t)), t = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + v_s(\pi, N)$ называется *функцией приспособленности стратегии s* и формализует введенное Ч. Дарвином понятие индивидуальной приспособленности.

На первый взгляд, понятие функции выигрыша не применимо к данной модели: стратегии участников фиксированы, они ни к чему не стремятся и ничего не выбирают. Однако, картина меняется, если посмотреть на динамику распределения по стратегиям.

Приводимая далее теорема показывает, что *асимптотика поведения в такой популяции согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума*. В частности, если при $t \rightarrow \infty$ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность (в полном соответствии с дарвиновским принципом естественного отбора выживают наиболее приспособленные). Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то доля худшей стратегии в распределении $\pi(t)$ стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

Связь РН и устойчивых точек МДР.
Асимптотическая устойчивость ЭУС.

Связь доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения.

Теорема 3.1 (о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР). Пусть функция приспособленности f_s разложима: $f_s(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}_s(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$. Тогда:

- 1) любое устойчивое (по Ляпунову) распределение π^* системы (3.1) является равновесием по Нэшу популяционной игры $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$;
- 2) если начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\bar{N}(t)\}$ существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \bar{N}(0)) = \pi^*$ то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры.

Замечание. Система (3.1) не является замкнутой, поскольку правая часть зависит также от $N(t)$. Понятие устойчивого распределения для таких систем формально определено в Богданов, Васин (2002).

Теорема 3.2 (об асимптотической устойчивости ЭУС). Пусть в условиях теоремы 3.1 π^* – эволюционно устойчивая стратегия для популяционной игры \bar{G} . Тогда π^* – асимптотически устойчивое распределение системы (3.1).

Теорема 3.3 (о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения). Пусть S – строго доминирующее множество стратегий в игре $G' = \langle S, \ln \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$. Тогда для любого $s \notin S$ и любого $\bar{N}(0) > 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_s(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соответствующей траектории системы (3.1).

Случайное подражание.

Модель динамики репликаторов предполагает действие эволюционного механизма, обеспечивающего прямое наследование стратегий родителей детьми. В какой степени указанные результаты зависят от *конкретного эволюционного механизма*? Оказывается, что он играет *критически важную роль*. В качестве альтернативного примера рассмотрим **механизм случайного подражания**.

Эта модель отличается от динамики репликаторов только в одном отношении: *новые индивидуумы не наследуют стратегию родителей, а выбирают в качестве объекта подражания случайного взрослого индивидуума и перенимают его стратегию*. При этом динамика описывается уравнениями

$$N_s(t+1) = N_s(t)v_s(t) + \sum_r N_r(t)fer_r(t) \frac{N_s(t)v_s(t)}{\sum_r N_r(t)v_r(t)}, \quad s \in S.$$

Динамика такой системы согласована с функцией выживаемости $v_s(t)$ в смысле теорем 3.1 – 3.3. Т.е. в данном случае эндогенной функцией полезности оказывается *выживаемость, а не приспособленность*.

Исходя из предыдущих примеров, может возникнуть впечатление, что мы зашли в тупик, сменив произвол в выборе целевых функций на произвол в выборе эволюционного механизма. Однако, это не так, если принять во внимание, что эволюционные механизмы тоже подвержены естественному отбору. В природе существует конкуренция эволюционных механизмов, и с течением времени отбираются наиболее эффективные.

Модель конкуренции эволюционных механизмов.

Рассмотрим соответствующую *модель сообщества нескольких популяций*, различающихся только эволюционными механизмами.

- Индивидуумы всех популяций взаимодействуют между собой и в процессе взаимодействия не различают популяций, т.е. эволюционный механизм индивидуума является ненаблюдаемым параметром.
- Итог взаимодействия для индивидуумов со стратегией s характеризуется функциями рождаемости и выживаемости $f_{er_s}(\pi, N), v_s(\pi, N)$, зависящими от общего распределения по стратегиям во всем сообществе и его численности.
- Множество стратегий S и данные функции одинаковы для всех популяций.

Введем обозначения:

- L – множество популяций,
- N_l – численность популяции l ,
- N – общая численность сообщества,
- $\pi^l = \{\pi_s^l, s \in S\}$ - распределение по стратегиям в рамках популяции l .

Тогда общее распределение π по стратегиям выражается как $\pi = \sum_l \frac{N^l}{N} \pi^l$.

Пусть изменение распределения по стратегиям в популяции l описывается оператором Φ^l , соответствующим эволюционному механизму этой популяции.

(Например, в одной популяции – это прямое наследование стратегий, в другой – случайное подражание выжившим и т.п. В частности, динамика поведения может быть связана с максимизацией некоторой функции выигрыша).

Динамика сообщества описывается системой

$$N^l(t+1) = N^l(t) \sum_s \pi_s^l(t) f_s(\pi(t), N(t)), \quad (3.2)$$

$$\pi^l(t+1) = \Phi^l(\pi^k(t), N^k(t), k \in L), \quad l \in L.$$

Теорема 3.4. Пусть в сообществе существует популяция с механизмом прямого наследования и функция приспособленности разложима. Тогда для динамики общего распределения $\pi(t)$ **справедливы следующие аналоги теорем 3.1 и 3.2:**

1. любое устойчивое распределение π системы (3.2) является равновесием Нэша в популяционной игре $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S \rangle$;
2. если для некоторой траектории $\{\bar{N}(t)\}$ начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(\bar{N}(0), t) = \pi^*$, то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры;
3. пусть π - строгое равновесие для популяционной игры \bar{G} . Тогда π - асимптотически устойчивое распределение системы (3.2).

Таким образом, модель отбора эволюционных механизмов приводит к выводу, что приспособленность является эндогенной функцией полезности для любой самовоспроизводящейся популяции.

- Идея доказательства первых двух утверждений теоремы прозрачна: если стационарное распределение по стратегиям не является равновесием Нэша относительно функции приспособленности, то ничто не может помешать распространению репликаторов, использующих стратегию оптимального ответа на это распределение, что противоречит его устойчивости.
- Для обобщения теоремы 3.3 об исключении доминируемых стратегий требуются более сильные предположения о разнообразии эволюционных механизмов. Пусть в сообществе есть популяция с эволюционным механизмом Φ^l . Для любой пары стратегий s, r назовем s - r -замещением механизма Φ^l механизм $\Phi_{s,r}^l$ такой, что для стратегий, отличающихся от s, r , доли индивидуумов, использующих эти стратегии, меняются так же, как и при механизме Φ^l , а вместо стратегии s всегда используется стратегия r . Как показано в (Васин, 1995), если для любых s, r, l множество механизмов содержит всевозможные замещения $\Phi_{s,r}^l$, то справедлив аналог теоремы 3.3: всякая исключаемая по строгому доминированию стратегия исчезает со временем, то есть $\pi_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.
- Сформулированный результат относится к однородным популяциям без учета возрастной и половой структуры, но легко обобщается для популяций с такими структурами. Аналогом приспособленности при этом является скорость сбалансированного роста популяции, определяемая числом Фробениуса матрицы Лесли (см. Семевский, Семенов, 1982).

Выводы

- Изложенные модели и результаты ЭТИ показывают, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях согласована с известными теоретико-игровыми принципами оптимальности – равновесием Нэша и исключением доминируемых стратегий.
- Эндогенно формируемая функция выигрыша соответствует определенной Ч. Дарвином индивидуальной приспособленности.

Проблемы

- Однако, как в биологических, так и в социальных популяциях хорошо известны такие формы поведения, как кооперация и альтруизм, которые, видимо, не согласуются с оптимизацией индивидуальной приспособленности.
- Проблема устойчивости смешанных равновесий, т. е. распределений по стратегиям, в которых более одной чистой стратегии используется с положительной вероятностью. *Эта проблема возникает для межпопуляционных взаимодействий, в которых значение выигрыша для индивидуумов одной популяции зависит от распределения по стратегиям в другой популяции, а также для внутрипопуляционных случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии между участниками столкновения. Для таких игр смешанные равновесия Нэша никогда не являются эволюционно устойчивыми, а строгих равновесий Нэша может не существовать. Таким образом, не работают достаточные условия устойчивости.*
- Распространение альтруистического и кооперативного поведения. *Указанные формы поведения наблюдаются как в биологических, так и в социальных популяциях и, по-видимому, противоречат условию максимизации индивидуальной приспособленности.*
- Применимость рассматриваемых эволюционных моделей к социальным популяциям. Понятие супериндивида - самовоспроизводящейся структуры, которая использует человеческую популяцию как ресурс для собственного воспроизводства и способна влиять на динамику поведения в этой популяции.

**II. Устойчивость равновесий.
Особенности эволюции
социального поведения.**

Проблема устойчивости смешанных равновесий.

Рассмотрим игру Γ двух популяций с наборами стратегий $R = \{R_1, \dots, R_m\}$ и $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ и функциями выигрыша $A_i(q)$, $i = 1, \dots, m$, $B_j(p)$, $j = 1, \dots, n$, которые показывают результат взаимодействия для всех стратегий.

Предполагается, что в обсуждаемой модели *индивидуумы первой популяции взаимодействуют только с индивидуумами второй популяции, но не с индивидуумами своей популяции, и наоборот.*

В каждый момент времени t каждый индивидуум использует определенную стратегию. Пусть

$$p(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t)) \in \Delta^m = \left\{ p \in R_+^m \mid \sum_i p_i = 1 \right\}$$

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in \Delta^n = \left\{ q \in R_+^n \mid \sum_j q_j = 1 \right\}$$

являются распределениями популяций по стратегиям.

Точка $(p, q) \in \Delta^m \times \Delta^n$ называется **равновесием Нэша игры Γ** , если для любых i, j

$$(p_i > 0) \Rightarrow i \in \underset{u}{\text{Arg max}} A_u(q), \quad (q_j > 0) \Rightarrow j \in \underset{u}{\text{Arg max}} B_u(p),$$

равновесие называется **смешанным**, если для любых i, j $p_i(t) < 1$, $q_j(t) < 1$.

Легко видеть, что :

- для любой игры с непрерывными функциями выигрыша существует равновесие Нэша
- в невырожденном случае количество положительных координат в p и q одинаково.

$p(t)$ и $q(t)$ изменяются согласно системе

$$\dot{p}_i = c(t, p(0), q(0))G_i(p, A(q)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

$$\dot{q}_j = d(t, p(0), q(0))H_j(q, B(p)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Эта система называется **Н-согласованной**, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функции G_i и H_j удовлетворяют уравнениям

$$G_i(p, A) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$H_j(q, B) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

для любых распределений $p \in \Delta^m, q \in \Delta^n$ и векторов выигрыша $A = (A_1, \dots, A_m), B = (B_1, \dots, B_n)$, так что $\forall i (p_i > 0) \Rightarrow i \in \text{Arg} \max_u A_u; \forall j (q_j > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg} \max_v B_v$.

Это означает, что каждое равновесие Нэша является неподвижной точкой системы (4.1).

2. Функции c, d измеримы как функции от t и непрерывно дифференцируемы соответственно по $p(0), q(0)$, причем производные равномерно ограничены по t .
3. Множество $\Delta^m \times \Delta^n$ является инвариантом системы (4.1). Вектор-функции A, B, G и H непрерывно дифференцируемы.

Отметим, что MAP, МАПП а также система в виде с положительными функциями g_i, h_j удовлетворяет этим условиям в общих предположениях.

Заметим, что система (4.1) может быть сведена к автономной системе

$$\dot{p}_i = G_i(p, A(q)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

$$\dot{q}_j = H_j(q, B(q)), \quad j = 1, \dots, n,$$

если для любых $t, p(0), q(0)$

$$\frac{c(p(0), q(0), t)}{d(p(0), q(0), t)} = \alpha(p(0), q(0)).$$

Этот случай имеет место при взаимодействии между популяциями постоянных размеров или между индивидуумами одной популяции в разных ролях, например, между “собственниками” некоторого ресурса и “захватчиками” (Maynard Smith, 1982).

Рассмотрим игру Γ , H -согласованную систему (4.1) и соответствующую автономную систему (4.2).

- Неподвижная точка системы (4.2) называется **вырожденной**, если некоторое собственное значение λ якобиана равно 0.
- Точка называется **центром**, если для любого собственного значения $\operatorname{Re} \lambda = 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$.
- Точка называется **седлом**, если для некоторого собственного значения $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Теорема 4.1. Каждое смешанное равновесие (P^*, Q^*) является либо

- вырожденной точкой,
- либо центром,
- либо седлом системы (4.2).

В этом случае (P^*, Q^*) является неустойчивой точкой системы (4.1) при любых допустимых функциях c, d .

Данная теорема оставляет открытым вопрос об устойчивости точек равновесий типа “центр”, для которых все собственные значения линеаризованной матрицы являются чисто мнимыми. Воспользуемся методом, развитым в работе (Ritzberger, Vogelsberger, 1990) и основанным на теореме Лиувилля.

Рассмотрим систему $\dot{A}(t) = \varphi(\pi(t))$. Согласно этой теореме свободное от дивергенции поле, (для которого $\text{div} \varphi(\pi) \equiv 0$) сохраняет любой объем постоянным и не может иметь асимптотически устойчивых состояний.

Опишем класс МАПП, для которых указанный метод позволяет прийти к выводу об отсутствии асимптотически устойчивых равновесий. Напомним, что основное уравнение МАПП записывалось в виде

$$\dot{\pi}_j = -r_j \pi_j \sum_{i: j_i > j_j} q_{ji} \gamma_{ji} + \sum_{i: j_i < j_j} r_i \pi_i q_{ij} \gamma_{ij}, \quad j \in J. \quad (2.2)$$

Теорема 4.2. Пусть межпопуляционная МАПП вида (2.2) удовлетворяет следующим условиям:

1) r_i^k, γ_{ij}^k не зависят от π^k ($k = 1, 2$) (интенсивность перехода в адаптивное состояние и вероятность смены стратегии не зависят от распределения по стратегиям внутри данной популяции, хотя могут зависеть от распределения по стратегиям в другой популяции, участвующей во взаимодействии);

2) $q_{ij}^k = \pi_j^k$ ($k = 1, 2$) (альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания другим членам популяции).

Тогда

- *любое смешанное равновесие не является асимптотически устойчивым.*
- если же вероятность выбора некоторой стратегии в качестве альтернативной для членов популяции не зависит от распределения по стратегиям в этой популяции, то в общих предположениях дивергенция векторного поля правых частей системы (2.2) отрицательна, и можно сходимости к смешанному равновесию.

Проблема сходимости к смешанным равновесиям рассматривалась в литературе также для итеративных и непрерывных процессов типа фиктивного разыгрывания, в частности, процесса Брауна для игры в нормальной форме.

Обозначим $p^a(t), a \in A$, смешанные стратегии, применяемые на шаге t . Тогда **дискретный процесс Брауна описывается соотношениями**

- $p^a(t+1) = p^a(t)(1-t) + z^a(t)/t, a \in A, t \in Z_+,$

- $z^a(t) \in \underset{p^a \in P_0^a}{\text{Argmax}} u^a(p(t) \| p^a),$

u^a - функция выигрыша игрока a в смешанных стратегиях,

- P_0^a - множество вырожденных смешанных стратегий игрока a , соответствующее множеству его чистых стратегий.

Применительно к динамике поведения во взаимодействующих популяциях процесс можно интерпретировать как адаптивный следующим образом: *после каждого периода $t \geq 2$ доля $1/t$ каждой популяции меняет свою стратегию на один из наилучших ответов.*

- Браун предположил, а Робинсон доказала сходимость дискретного процесса для антагонистических биматричных игр.
- Данскин показал сходимость данного процесса для антагонистических игр с непрерывными выигрышами на произведениях компактных пространств.
- Фьюденберг и Крепс показали сходимость адаптивной игровой модели для неантагонистических биматричных игр 2×2 с одним чисто смешанным равновесием Нэша.
- В работе Бенайм и Хирш распространили полученный результат для игр 2×2 с несколькими равновесиями Нэша (не обязательно смешанными).
- В работе Богданова на основе результатов Беленького и др. получены наиболее общие известные условия сходимости указанных процессов для биматричных игр. Доказано, что гарантировать сходимость можно для всех биматричных игр, которые сводятся к антагонистической при помощи следующих преобразований:
 - а) добавление константы к столбцу платежной матрицы первого игрока;
 - б) добавление константы к строке платежной матрицы второго игрока;
 - в) домножение платежной матрицы на положительную константу.
- Известно, что указанные преобразования задают классы игр с одинаковыми множествами равновесий Нэша.
- Однако полученные результаты нельзя распространить для неантагонистических игр большей размерности.

Процесс фиктивного разыгрывания не сходится для примера Шепли, где матрицы выигрыша игроков имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в качестве начальной точки игроки выберут пару чистых стратегий $(i_0, j_0) = (1,1)$, то выборы игроков в последующие моменты времени будут следовать по циклу шести пар стратегий:

$$(1,1) \rightarrow (1,3) \rightarrow (3,3) \rightarrow (3,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (1,1).$$

При этом число периодов, в которые процесс будет находиться в каждом из этих состояний, будет экспоненциально возрастать. Очевидно, что процесс фиктивного разыгрывания не сходится.

Для некоторых неантогонистических игр, в частности для примера Шепли было установлено, что траектории процесса фиктивного разыгрывания ведут себя так же, как средние по времени МДР. Можно показать, что МДР эквивалентна частному случаю МАПП, удовлетворяющей Теореме 4.2. При этом не только сами траектории таких МАПП не сходятся к равновесию в примере Шепли (что следует из Теоремы 4.2), но и их средние по времени также не сходятся.

Лучшие свойства (в смысле сходимости к смешанным равновесиям) демонстрируют некоторые более сложные адаптивные динамики.

Рассмотрим следующую модификацию непрерывного процесса фиктивного разыгрывания для игры двух лиц:

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \beta^1(q^2 + \gamma\lambda(q^2 - r^2)) - q^1, \\ \dot{q}^2 &= \beta^2(q^1 + \gamma\lambda(q^1 - r^1)) - q^2, \\ \dot{r}^1 &= \lambda(q^1 - r^1), \\ \dot{r}^2 &= \lambda(q^2 - r^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

q^a - текущая оценка смешанной стратегии игрока a ,

$\beta^a(p^{-a})$ - некоторый наилучший ответ игрока a на стратегию p^{-a} партнера.

Идея в том, что величина $\lambda(q^a - r^a)$ при достаточно больших λ аппроксимирует значение β^a , то есть наилучший ответ строится для будущей стратегии.

Для примера Шепли условием локальной стабильности равновесия для системы (4.3) является $0.0413 < \gamma/(1-\gamma) < 0.0638$.

Отдельный интерес представляют градиентные модели динамики, в которых смешанная стратегия каждого игрока меняется в направлении градиента его функции выигрыша. Показано, что если градиент вычисляется для текущей стратегии партнера, то равновесие Нэша никогда не является локально устойчивым для системы. Если, однако, считать градиент для будущей стратегии партнера, определяемой так же, как в случае фиктивного разыгрывания, то соответствующий выбор γ обеспечивает устойчивость.

О распространении альтруизма и кооперации

- Как принцип максимизации индивидуальной приспособленности соотносится с реальным поведением в биологических и социальных популяциях?
- Какие дополнения следует ввести в модели для более точного отражения реальной эволюции поведения?

Сначала остановимся на поведении в биологических популяциях. Общее мнение биологов состоит в том, что реальное поведение в основном не противоречит этому принципу (III Congress of the ESEB, 1991). Исключения: **кооперация и альтруизм.**

Понятия кооперативного и альтруистического поведения можно пояснить с помощью различных вариантов известной игры “дилемма заключенного”. В этой симметричной игре двух лиц у каждого из игроков есть две стратегии поведения: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). В общем случае:

- При любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия ($u_{33} > u_{32}, u_{23} > u_{22}$)
- Суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно ($u_{22} > (u_{23} + u_{32})/2, u_{22} > u_{33}$).

В качестве примера приведем следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & K & Э \\ K & (5,5) & (1,6) \\ Э & (6,1) & (2,2) \end{array}$$

В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая соответствует эгоистичному поведению и является также решением по доминированию.

Известно, однако, что в реальности игроки в подобных ситуациях часто ведут себя кооперативно.

Еще в большей степени отклоняется от максимизации индивидуальной приспособленности альтруистическое поведение. Рассмотрим следующую матрицу выигрышей

(А – альтруистическое поведение, Э – эгоистичное поведение):

$$\begin{array}{cc} & А & Э \\ А & (5,5) & (1,10) \\ Э & (10,1) & (2,2) \end{array}$$

Здесь альтруистическое поведение одного из партнеров в сочетании с эгоистичным поведением другого соответствует максимизации суммарной приспособленности. При этом альтруист получает меньше своего гарантированного выигрыша, который он мог бы получить в равновесии Нэша.

В качестве примера кооперации в биологических популяциях отметим поведение животных, которые по очереди выполняют функцию сторожа. Сторож стоит на страже и подает сигнал при появлении хищника. Выгодное отклонение от этого поведения:

- не следить за хищником и не подавать сигнал
- следить за хищником и не подавать сигнал.

Дело в том, что подача сигнала привлекает хищника к тому, кто его подал. Если ни один член популяции не будет выполнять функцию сторожа, то все проиграют.

Другим примером является совместная охота группы хищников, при этом эгоисты экономят затраты энергии в процессе охоты в ущерб общей эффективности.

Что касается альтруизма, то его примеры наблюдаются в отношениях между родственниками.

- Альтруизм *родителей по отношению к детям.*
 - Явление достаточно распространенное, оно не противоречит концепции максимизации приспособленности, т.к. она равна сумме рождаемости и выживаемости.
 - Если за счет жертвы индивидuum спасает своих детей, это может быть оптимальным с точки зрения индивидуальной приспособленности.
- Интересны *проявления альтруизма, не связанные с максимизацией индивидуальной приспособленности.*
 - Наблюдаются у общественных насекомых (пчелы, муравьи, термиты).
 - В этих популяциях часть индивидуумов свою приспособленность не максимизирует, т.к. потомства они не оставляют, но при этом бесстрашно нападают на любого агрессора и жертвуют собой, защищая семью.
 - Объяснение состоит в том, что индивидуумы, входящие в семьи общественных насекомых, являются близкими родственниками.

Недостаток модели прямого наследования состоит в том, что она учитывает только связь “родитель-ребенок” и не учитывает связи типа “брат-сестра”. Учитывая эти связи, можно объяснить распространение альтруистического поведения в смысле максимизации приспособленности группы родственников.

Опишем соответствующую модель. Предположим, что взаимодействие в популяции характеризуется множеством стратегий S и функциями приспособленности $f_s(\pi)$, $s \in S$. Главное отличие данной модели - **индивидуум способен различать сибсов** (родных братьев или сестер) среди других членов популяции и выбирать стратегию в зависимости от этого признака.

Полная стратегия (s, s') включает:

- компоненту s , применяемую к сибсам,
- компоненту s' для прочих индивидуумов.

В данный период времени индивидуум с некоторой интенсивностью $\lambda_r \in (0,1)$ взаимодействует с сибсами, а с интенсивностью $1 - \lambda_r$ - с остальными индивидуумами из популяции.

Общая приспособленность аддитивно зависит от результатов взаимодействия с родственниками и с остальной частью популяции:

$$\bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi'),$$

- $f_s^r(s)$ - функция, описывающая результаты взаимодействия с сибсами,
- π' - распределение по компоненте s' .
- Предполагается, что все сибсы применяют одну (унаследованную) стратегию.

Таким образом, взаимодействие характеризуется популяционной игрой

$$\bar{G} = \langle \bar{S} = \{ (s, s') \in S \times S \}, \bar{f}_{s, s'}(\bar{\pi}) = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi') \rangle,$$

где $\bar{\pi}$ - распределение по полным стратегиям.

Теорема 5.1. Всякая стратегия (s, s') , в которой $s \notin \mathop{\text{Arg max}}_i f_i^r(i)$, строго доминируется стратегией (s^*, s') , где $s^* \in \mathop{\text{Arg max}}_i f_i(i)$. Распределение $\bar{\pi}$ является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех указанных неоптимальных стратегий $\pi_{ss'} = 0$, а соответствующее распределение π' является равновесием Нэша для игры $\langle S, f_{s'}(\pi') \rangle$.

Таким образом, в отношениях типа “дилеммы заключенного” субъекты используют кооперативную стратегию применительно друг к другу.

Чтобы объяснить распространение альтруистического поведения, рассмотрим следующую модификацию модели.

Если отказаться от предположения об одинаковом состоянии sibсов и считать, что они могут оказаться в разных ролях (например, доминирующей и подчиненной), а стратегия и функция приспособленности могут зависеть от роли, то полная стратегия в отношении родственников задается парой $s = (s_\alpha, s_\beta) \in S \times S$.

В результате исключения строго доминируемых стратегий остаются лишь стратегии $s^* = (s_\alpha^*, s_\beta^*) \rightarrow \max_{(s_\alpha, s_\beta)} (f^\alpha(s) + f^\beta(s))$, обеспечивающие максимум суммарной приспособленности.

На основании теоремы 5.1 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях ведет к формированию поведения, максимизирующего суммарную приспособленность sibсов.

Хотя в последней модели неявно заключено ограничение на эволюционный механизм, определяющий динамику распределения по стратегиям в отношении родственников, это ограничение не является существенным: любой другой механизм будет проигрывать реализующему оптимальную стратегию s^* , указанную в теореме 5.1.

Отметим, что указанные результаты допускают обобщение на отношения кузенов, троюродных родственников и т.д.

- стратегия включает варианты s_1, \dots, s_k поведения в отношении родственников различных степеней от 1 до k
- вариант s' в отношении прочих индивидуумов
- функция приспособленности представима в виде $f_i(\pi) = \sum \lambda_i f_{si}^i(s_i) + (1 - \sum \lambda_i) f_i(\pi')$, где $\lambda_i \in (0,1)$ характеризует интенсивность взаимодействия с родственниками степени i .

Как и выше, предполагается, что все родственники применяют в отношении друг друга одну и ту же стратегию, что соответствует модели прямого наследования и не ограничивает общности в рамках изложенной модели отбора эволюционных механизмов.

Очевидно, что исключение строго доминируемых стратегий ведет к оптимизации родственных отношений: остаются такие стратегии s^* , для которых $s_i^* \in \text{Argmax} f_{si}^i(s_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Как в биологических, так и социальных популяциях с низким уровнем миграции взаимодействующие индивидуумы обычно имеют общих предков *по крайней мере в седьмом поколении*.

- Рассмотрим двух индивидуумов, случайно выбранных из популяции численностью 10^6 .
- Пусть от противного у них нет общих предков в предшествующих семи поколениях.
- Тогда семь поколений назад у каждого из них было 64 предка каждого пола.
- Пусть численность популяции в это время составляла 104 (что соответствует в среднем четырем детям на семью в этих поколениях).
- Необходимое условие для отсутствия общих предков: ни одна из женщин – предков одного индивидуума не вышла замуж за предка – мужчину другого индивидуума.
 - Вероятность такого события $(1 - 64/5900)^{129} < 0.1$.

Согласно изложенным результатам, следовало бы ожидать повсеместного распространения кооперативного и альтруистического поведения, направленного на максимизацию суммарной приспособленности. Однако реальное поведение зачастую не соответствует принципам “возлюби ближнего своего как самого себя” или “человек человеку друг, товарищ и брат”. Да и в биологических популяциях указанные формы поведения не являются доминирующими. Хорошо известны примеры жестокой конкуренции между близкими родственниками, вплоть до поедания детенышей друг у друга. Одна из причин ограниченного распространения кооперативного поведения – его **неустойчивость к внедрению мутантов - эгоистов**.

Применительно к социальным популяциям возникает следующая задача. Поскольку для разных наций характерно различное соотношение интенсивностей внутриродственных и внешних взаимодействий, то интересно определить *степени альтруизма и кооперации в равновесии Нэша в зависимости от этих параметров и интенсивности мутаций.*

Отметим, что проблеме распространения кооперативного и альтруистического поведения посвящено множество работ.

Например, теория повторяющихся игр объясняет распространение кооперации в повторяющихся конфликтных ситуациях с одними и теми же участниками, исходя из оптимизации индивидуальных функций приспособленности. Повторяемость дает возможность наказывать тех, кто отклоняется от кооперативного поведения. В результате, с учетом наказаний, оказывается индивидуально выгодно вести себя кооперативно. В рассмотренных выше моделях это не так. И, тем не менее, вырабатывается кооперативное поведение за счет отбора механизмов наследования стратегий.

Особенности эволюции поведения в социальных популяциях.

Сверхиндивиды.

Их воздействие на целевые функции и процессы воспроизводства наций.

В современных социальных популяциях поведение не максимизирует ни индивидуальную, ни групповую приспособленность. Возьмем государства социального благосостояния, такие как Швеция или Германия. Там любому новорожденному гражданину, независимо от его социального происхождения, гарантированы условия, обеспечивающие высокую вероятность выживания и нормального биологического развития. Тем не менее, как показывают демографические данные, коренное население в массе пренебрегает благоприятной возможностью для воспроизводства. В конце XX века ВВП на душу населения в Германии и Швеции примерно в десять раз превышал этот показатель для России. В то же время рождаемость в трех странах была одинаково низкой: 9-10 человек на 1000, что не обеспечивало простого воспроизводства населения. Социологический опрос жителей Стокгольма в тот же период показал, что около 70% взрослого населения не имели детей и не планировали обзаводиться ими («World population prospects», 1996).

Почему же для социальных популяций не работают изложенные выше эволюционные модели? Отметим важнейшие факторы, объясняющие такое несоответствие.

а) Наследование стратегий родителей детьми практически невозможно реализовать в социальных популяциях.

Стратегии поведения настолько сложны, а среда настолько изменчива, что индивидууму пришлось бы потратить основную часть времени жизни на обучение потомков. Уже на ранних стадиях развития человечества возникло разделение труда и, в частности, институт учителя, специально занимающийся обучением и воспитанием нового поколения. Позднее государство, церковь и другие субъекты общественной жизни осознали роль этого института и эффективно использовали его для формирования желательного поведения.

б) Задача оценки различных стратегий поведения с точки зрения их влияния на приспособленность нередко сложна даже для теоретического анализа.

На практике же решения обычно принимаются в условиях ограниченного времени субъектами, не способными провести такую оценку. В ходе биологической эволюции выработались различные механизмы, позволяющие быстро принимать решения, которые в среднем оказываются оптимальными с точки зрения приспособленности.

Одним из таких механизмов является **чувство удовольствия, удовлетворения**, связанное с потреблением пищи, комфортными условиями обитания, отдыхом.

В природе удовольствие и приспособленность согласованы между собой: действия, приносящие удовольствие или направленные на его достижение, обычно являются рациональными с точки зрения индивидуального воспроизводства. В частности, потребление пищи и других ресурсов, как правило, необходимы для воспроизводства. (Подобные ситуации имеют место и в социальных системах. Для них модель «homo economics» согласуется с оптимизацией индивидуальной приспособленности.)

Избыточность ресурсов и вредное потребление возникают в природе очень редко. Известный пример такого рода для экологических систем связан с взаимоотношениями жука ламехузы и некоторых видов. Муравьи питаются секретом, выделяемым этим жуком. Иногда потребляемый секрет действует на них как наркотик: муравьи выбрасывают из муравейника самку, а на ее место сажают ламехузу и кормят с тем, чтобы получить как можно больше секрета. Через некоторое время муравейник погибает...

Для экосистем этот пример является исключительным. Ситуация в современных человеческих популяциях совсем иная. Множество людей потребляют большие количества алкоголя, табака, пищевых продуктов и других товаров, которые являются вредными или по крайней мере бесполезными с точки зрения воспроизводства. Многие семьи тратят всю жизнь на то, чтобы зарабатывать деньги для такого потребления и в конце концов оставляют одного потомка или вовсе не имеют детей.

Другим вспомогательным механизмом, широко используемым при выборе стратегий в группах животных, является **механизм подражания лидеру**.

- В природных популяциях этот механизм способствует обучению и позволяет координировать действия членов группы, повышая их приспособленность.
- В социальных системах этот механизм создает дополнительную возможность для манипулирования поведением путем выбора подходящего лидера или образца для подражания.

Все упомянутые способы воздействия на поведение (контроль над процессом обучения, использование стремления к удовольствию и механизма подражания) практиковались с глубокой древности. Однако, качественно новая ситуация возникла в связи с развитием СМИ в XX веке. В настоящее время телевидение дает возможность влиять на поведение миллиардов людей, одновременно выступая в роли учителя и создавая образцы для подражания.

Обратимся теперь к вопросу, кто или что воздействует на целевые функции, формируя поведение индивидуумов в социальных популяциях. В рассмотренных примерах для экосистем мы столкнулись с двумя различными вариантами.

- В примере с ламехузой манипулятором является индивид другой популяции. Взаимоотношения двух популяций подобны взаимодействию “хищник-жертва”, а исход зависит от ряда факторов, включая наличие альтернативных видов жертв для манипуляторов и долю жертв, устойчивых к оказываемому воздействию.
- В примере с общественными насекомыми поведение индивидуума формируется самовоспроизводящимся супериндивидом – семьей. Подавляя индивидуальное воспроизводство отдельных особей, данный механизм регулирования вместе с тем обеспечивает эффективное воспроизводство супериндивидов и популяции в целом.

Вообще супериндивид, относящийся к некоторой биологической или человеческой популяции, представляет собой самовоспроизводящуюся структуру, включающую в качестве элементов или использующую как ресурс индивидуумов базовой популяции наряду с другими материальными и нематериальными компонентами. При обсуждении поведения в социальных системах в качестве аналога базовой популяции мы рассматриваем население страны (нацию). Наряду с самовоспроизводящимися супериндивидами, имеющими биологическую природу (семья, род), в социальных популяциях существуют супериндивиды, имеющие социально-экономическую природу (корпорации, научные и художественные школы, общественные и религиозные организации, государственные институты). Вместо размножения путем репликации супериндивид может расти, включая в себя все больше людей и других ресурсов, или деградировать. В социальных системах супериндивиды активно влияют на формирование поведения людей с целью обеспечить собственное воспроизводство и рост. Чем интенсивнее специфическая деятельность включенных индивидуумов, тем успешнее развивается супериндивид. Поскольку ресурсы каждого человека ограничены, супериндивид часто подавляет другие формы активности, в частности, индивидуальное воспроизводство.

Исходя из изложенных соображений и результатов, можно сформулировать гипотезу о том, что индивидуальные целевые функции в современном обществе в значительной степени определяются супериндивидами, которые формируют их таким образом, чтобы обеспечить собственное воспроизводство и рост. Иначе говоря, динамические модели конкуренции и отбора и связанные с ними принципы оптимальности следует формулировать и применять на уровне супериндивидов.

Анализ таких моделей, связанных с конкуренцией, дал полезные результаты с точки зрения эндогенного определения функций выигрыша. Для исследования других социально-экономических процессов следует использовать модели взаимодействия и естественного отбора самовоспроизводящихся индивидов различной природы. Ввиду сложности социальных систем не представляется возможным в ближайшее время построить замкнутую количественную модель эволюции социального поведения, подобную модели динамики репликаторов. Тем не менее, концепция конкуренции супериндивидов и их влияния на социальное поведение помогает в анализе конкретных вопросов экономики и социологии. В частности, данная концепция позволяет предложить модель целенаправленного поведения человека, преодолевающую отмеченные недостатки моделей «человека экономического» и «человека биологического».

Здесь развивается подход, предложенный в работе Гермейер, Ватель (1973).

- Стратегией индивидуума (выбираемой сознательно или подсознательно) является распределение его времени и других ресурсов на разные виды деятельности.
- От этого распределения s^a , а также неконтролируемых им факторов z , зависят значения вспомогательной функции полезности u_0^a , отражающей удовольствие от потребления, и параметры воспроизводства:
 - 1) его самого (выживаемость u_1^a),
 - 2) его семьи (приспособленность u_2^a),
 - 3) различных супериндивидов, в которые он входит (параметры $u_j^a, j = 3, 4, \dots$, характеризуют состояния структур, на которые индивидуум тратит свою энергию).
- Выбирая стратегию s^a , он максимизирует некоторую свертку этих функций.
- В упомянутой работе рассматривается свертка вида $\min_i \left(\frac{u_i^a(s^a, z) - w_i^a(z)}{\lambda^a} \right)$, которую можно интерпретировать следующим образом:
 - w_i^a - минимальное приемлемое в данных условиях значение показателя u_i^a ,
 - λ^a - коэффициент важности увеличения этого показателя относительно минимального приемлемого уровня.
- Согласно данному критерию, индивидуум затрачивает ресурсы прежде всего на увеличение наиболее неблагоприятных показателей. Реальное поведение далеко не всегда соответствует такой свертке. Нередко индивидуум использует ресурсы в том направлении, где видит наибольший эффект от их вложения (формально это соответствует замене минимума на максимум в указанном выражении). Разные люди характеризуются различными видами свертки и значениями коэффициентов.

Отметим связь данной модели с классификацией, предложенной Л. Н. Гумилевым (1993). Он выделяет следующие типы:

- 1) Гармоничные люди – индивидуумы, производящие столько работы, сколько требуется для поддержания своей жизни и жизни потомства. Формально этот тип максимизирует комбинацию индивидуальной и семейной приспособленности.
- 2) Субпассионарии – люди, неспособные контролировать свои вожеления, даже если их удовлетворение идет во вред себе и окружающим. Не заботятся о потомстве. Формально максимизируют u_0^a .
- 3) Пассионарии – индивидуумы, обладающие повешенной энергией. Осуществляют работу по изменению окружающей среды. При этом их активность не связана ни с материальными благами, ни с удовольствиями, ни с индивидуальным или семейным воспроизводством. Трудоголики, обеспечивающие производственные и экономические успехи корпораций, эффективную работу государственных структур, люди науки и искусства, развивающие свою область, несмотря на материальное вознаграждение, - всех их следует рассматривать как пассионариев в указанном смысле.

С точки зрения социально-экономического моделирования большой интерес представляет соотношение численностей гармоничных, пассионарных и субпассионарных граждан, а также их распределение среди самовоспроизводящихся структур различных типов. Сбор и обработка соответствующих данных являются актуальной задачей социологии и экспериментальной экономики.

Литература

1. Васин А.А. “Эволюционная теория игр и экономика. Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения”. Журнал Новой экономической ассоциации, 3-4, М.:2009
2. Васин А.А. (2005) “Некооперативные игры в природе и обществе”. М.: Макс Пресс.
3. Maynard Smith, J. (1982). Evolution and the theory of games. Cambridge: Cambridge University Press.