Презентация на тему
Комплексный потенциал и комплексная скорость. Некоторые простейшие потенциальные потоки. Условия подобия конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя. Условия подобия процессов теплообмена при свободной конвекции.

Работа
Студентки 3-го курса
Группы МИТ-12
Ежовой Алины

Введение

- Гидромеханика — раздел механики сплошной среды, изучающий течения жидкостей и газов, в том числе с учётом электромагнитных полей и происходящих в них физико-химических процессов, а также движение в них твёрдых тел. Плавание кораблей, подводных лодок и торпед, полеты до- и сверхзвуковых самолетов и ракет, фильтрация воды, нефти и газа в толще Земли, извержения вулканов и сход лавин, ориентация жидких кристаллов, многие астрофизические проблемы — всё это задачи гидромеханики.

Комплексный потенциал. Комплексная скорость.

- Рассмотрим безвихревое движение идеальной жидкости. В общем случае трехмерного движения течение будет безвихревым (потенциальным), если во всем потоке выполняется условие $rot\,V = 0$. Это условие позволяет ввести функцию φ, называемую потенциалом скоростей.
- Проекции скорости определяются следующими соотношениями:

$$u = \frac{d\,\varphi}{dx};\;\; v = \frac{d\,\varphi}{dy}; w = \frac{d\,\varphi}{dz}\;. (1.1)$$

- Вектор скорости будет $V = grad\,\varphi$.

- Наибольший практический интерес имеет плоское безвихревое стационарное движение несжимаемой жидкости. Плоским называется такое движение, при котором все частицы жидкости перемещаются параллельно некоторой плоскости. При этом движение во всех плоскостях, параллельных этой плоскости, одинаково.
- Потенциал скорости плоского движения:

$$u = \frac{d\,\varphi}{dx};\ \ v = \frac{d\,\varphi}{dy}\ .\ (1.2)$$

- Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в плоском движении имеет вид:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \text{ или div V=0.}$$

- Если ввести функцию ψ, связанную с проекциями скоростей равенствами:

$$u = \frac{d\,\psi}{dy};\ \ v = -\frac{d\,\psi}{dx}., (1.3)$$

- То функция ψ тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности, так как при подстановке в него значений u и v из выражений (1.3) получим

$$\frac{\partial 2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial 2\psi}{\partial x\,\partial y} \equiv 0.$$

- Функция ψ называется функцией тока, а выражение ψ (x, y) = C является уравнением линий тока.
- Так же, как и потенциал скоростей, функция тока определяется с точностью до постоянной.
- Учитывая, что течение является безвихревым, т.е

$$rot\,V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial 2\psi}{\partial x\ 2} - \frac{\partial 2\psi}{\partial y 2} = 0.$$

- Подставляя значения u и v из равенств (1.2) в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial 2\varphi}{\partial x\text{^}2} + \frac{\partial 2\varphi}{\partial y\text{^}2} = 0.$$

- Эти уравнения показывают, что как функция тока, так и потенциал скорости удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. являются гармоническими функциями.
- Из сравнения равенств (1.2) и (1.3) следует:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.\ (1.4)$$

- Известно, что если две функции φ и ψ от x и y удовлетворяют условиям Коши-Римана, то комплексная величина

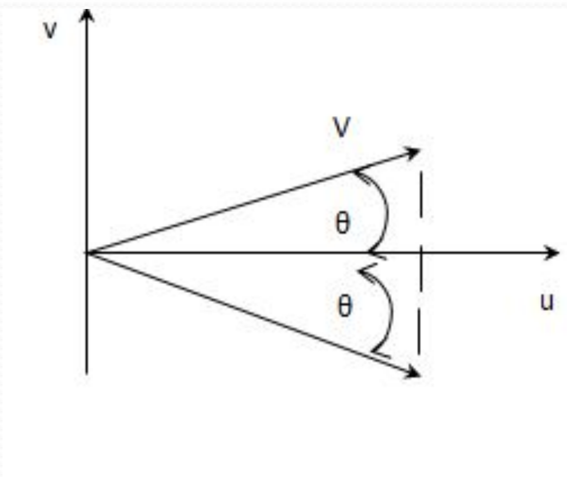
$$\varphi(x, y) + i\psi\,(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

- не просто зависит от x и y, а является функцией от одной комплексной переменной, z, равной $z = x + iy = re\hat{}i\theta.$ Таким образом, существует функция комплексной переменной W (z), вещественная и мнимая части которой будут φ и ψ, т.е.

$$W\,(z) = \varphi(x, y) + i\psi\,(x, y).\ (1.5)$$

- Функция W (z) имеет очень большое значение в теории безвихревого плоского потока и называется комплексным потенциалом, или характеристической функцией течения.

- Величина и направление скорости V в комплексной плоскости (рис.1.1) определится формулой



$$V = u + iv.$$

рис 1.1

- Сравнивая полученное выражение с формулой (1.6), видим, что производная от комплексного потенциала по координате равна величине скорости, но по направлению совпадает с зеркальным отображением вектора скорости относительно вещественной оси.
- Так как в теории комплексного переменного величины $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называют сопряженными, то

$$V = u - iv$$

можно назвать сопряженной скоростью.

Некоторые простейшие потенциальные потоки.

Плоскопараллельный поток.

- Наиболее простым примером комплексного потенциала является выражение

$$W\,(z) = a1z = a1x + i\,a1y.$$

выражение для вещественного, мнимого и комплексного значений числа а.

- Если а = а1 вещественно, то

$$W\,(z) = a1z = a1x + i\,a1y.$$

- Так как $W\,(z) = \varphi + i\psi$, то $\varphi = a1x$ и $\psi = a1y$, откуда получим, что эквипотенциальные линии $\varphi = const$ имеют вид

$$\varphi = a1x = \mathrm{C},$$

т.е. будут семейством прямых, параллельных оси у, а линии тока

$$\psi = a1y = \mathrm{C}$$

будут семейством прямых, параллельных оси х.

- Если число а мнимое, т.е. а $= i\,a1$ ($a1$ – вещественное число), то

$$W\,(z) = az = i\,a1(x + i\,y) = -a1\,y + i\,a1x,$$

тогда $\varphi = -a1y = C$ и $\psi = a1x.$

- Эквипотенциальные линии и линии тока соответственно будут:

$$\varphi = -a1y = C \text{ и } \psi = a1x = \mathrm{C}$$

- По сравнению с предыдущим случаем линии тока и эквипотенциальные линии при умножении комплексного потенциала на мнимую единицу меняются местами.
- Проекции скоростей будут

$$u = \frac{d\,\varphi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \text{ и } v = \frac{d\,\varphi}{dy} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = a1$$

- Если a – комплексное число, равное a = a1 + i a2 (a1 и a2 вещественные положительные числа), то комплексный потенциал будет

$$W\,(z) = az = (a1 + i\,a2)\,(x + i\,y) = \varphi + i\psi$$

- В этом случае потенциал скорости φ и функция тока ψ имеют вид:

$$\varphi = a1x - a2y \text{ и } \psi = a2x + a1y,$$

а проекции скоростей равны

$$u = \frac{d\,\varphi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = a1 \text{ и } v = \frac{d\,\varphi}{dy} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -a2$$

Источник и сток.

- Рассмотрим комплексный потенциал вида

$$W\,(z) = a \ln z = \varphi + i\psi \;(2.1)$$

- Пусть а – вещественное число. Тогда

$$W\,(z) = a \ln z = a \ln rei\theta = a \ln r + a \ln ei\theta = a \ln r + ia\theta$$

- Потенциал скорости и функция тока такого движения будут иметь вид

$$\varphi = a \ln r \text{ и } \psi = a\theta$$

- Линии тока и эквипотенциальные линии будут семейством прямых, проходящих через начало координат, и семейством окружностей с центром в начале координат.
- Составляющие скоростей можно определить согласно выражениям:

$$\begin{cases} Vr = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{\partial\psi}{r\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial r} a\, ln\, r = \dfrac{a}{r} \\ V\theta = \dfrac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

- Знак V определяется знаком числа а. Если а положительно, то направление линий тока будет соответствовать источнику; при отрицательном а – стоку.
- Комплексный потенциал такого потока можно представить в виде

$$\text{W (z)} = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

Вихрь.

- Если в комплексном потенциале (2.1) число а – мнимое, т.е.

$$\begin{cases} a = ia1 \\ W(z) = ia1\, ln\, z = \varphi + i\psi \end{cases}$$

то по сравнению с предыдущим линии тока и эквипотенциальные линии поменяются местами.

- $\varphi = -a1\theta$ и $\psi = a1 \ln r$, а уравнения линий тока и эквипотенциальных линий будут соответственно выражать семейство окружностей с центром в начале координат и семейство прямых, проходящих через начало координат.
- Комплексный потенциал потока с циркуляцией Г будет иметь вид

$$W = -\frac{\Gamma i}{2\pi \ln z} = \frac{\Gamma}{2\pi i ln\, z}$$

Величина скорости обратно пропорциональна радиусу r, т.е.

$$V0r = \frac{\Gamma}{2\pi} = const$$

- Такое движение жидкости соответствует циркуляционному потоку вокруг вихревой нити.

Вихресток и вихреисточник.

- При комплексном значении числа а, равном $a1 + i\, b1$, комплексный потенциал будет иметь вид

$$W\,(z) = (a1 + i\,b1)\ln z = (a1 + i\,b1)\ln re\text{^}i\theta$$
$$= (a1 + i\,b1)\,(\ln r + \ln e\text{^}i\theta)$$
$$= (a1 \ln r - b1\theta) + i(b1 \ln r + a1\theta),$$

откуда потенциал скорости φ и функция тока ψ равны

$$\varphi = a1 \ln r - b1\theta;\ \psi = b1 \ln r + a1\theta$$

- Это движение можно рассматривать как сумму двух предшествующих потоков: источника или стока и вихря.

Диполь.

- Комплексный потенциал

$$W\ (z) = \frac{m}{2\,\pi}\frac{1}{z}$$

- После подстановки $z\ =\ x\ +\ iy$ получим

$$W\ (z)\ =\ \frac{m}{2\,\pi}\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}\ =\ \frac{m}{2\,\pi}/()\ \frac{x-iy}{x2+y2},$$

откуда потенциал скорости φ и функция тока ψ будут иметь вид

$$\varphi\ =\ \frac{m}{2\,\pi}\ \frac{x}{x2+y2}\ \text{и}\ \psi\ =\ -\frac{m}{2\,\pi}\frac{y}{x2+y2}$$

Условие подобия конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя.

- Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности, которые содержат большое количеств неизвестных. Аналитическое решение полной системы дифференциальных уравнений очень трудоемко, поэтому при решении задач конвективного теплообмена большое значение приобретает экспериментальный путь исследований.
- Недостатком экспериментальных исследований является невозможность распространения результатов, полученных в данном опыте, на другие явления и процессы, отличающиеся от изученного.

- С помощью теории подобия размерные физические величины объединяют в безразмерные комплексы, число которых значительно меньше, чем неизвестных величин. Безразмерные комплексы рассматриваются как новые переменные, что упрощает исследование физических процессов.
- При выполнении необходимых предпосылок подобия стационарные процессы конвективного теплообмена при вынужденном движении будут подобны, если два определяющих критерия (Re и Pr) будут численно одинаковыми:

$$Re = idem \quad \mathrm{Pr} = idem \quad (3.1)$$

- Критерий Re определяет гидромеханическое подобие течения теплоносителя:

$$Re = \frac{\omega l}{v} \text{ (3.2)}$$

где ω – обычно средняя скорость течения теплоносителя в начальном сечении системы, м/с;

l – геометрический размер системы (диаметр капли, размер пластины и т.д.), м;

n – коэффициент кинематической вязкости теплоносителя, м2/с

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

- Теплофизической характеристикой теплоносителя является критерий Прандтля, состоящий из физических параметров:

$$\mathrm{Pr} = \frac{v}{a} \text{ или } \mathrm{Pr} = \frac{\mu cp}{\lambda},$$

$$\text{т. к. } a = \frac{\lambda}{Cp\,\rho} \text{ (3.3)}$$

- Одинаковость определяющих критериев Re и Pr определяет условия теплового подобия при вынужденном движении теплоносителей.

- Как следствие, одинаковыми являются и определяемые критерии:
- - критерий Нуссельта Nu, характеризующий интенсивность конвективного теплообмена:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (3.4)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м2К);

l – определяющий размер (например, диаметр d), м;

λ – коэффициент теплопроводности теплоносителя, Вт/(м К);

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = idem \quad (3.5)$$

является следствием установившегося подобия.

- Критериальное уравнение для конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителя имеет вид:

$$Nu = f\,(Re, \mathrm{Pr}) \quad (3.6)$$

- Критерий Нуссельта является определяемым, т.к. содержит коэффициент теплоотдачи α, являющийся функцией процесса теплообмена.

Условие подобия процессов теплообмена при свободной конвекции.

- Процесс естественной конвекции возникает за счет разности плотностей нагретых и холодных частиц теплоносителя.
- Приняв линейное изменение плотности теплоносителя от температуры

$$\rho \;=\; \rho ж\,[1-\beta(t-tж)]$$

и учитывая, что плотность ρ нагретого теплоносителя меньше, чем ρж, т.е. ρ < ρж холодного теплоносителя, то возникает подъемная сила:

$$g\,(\rho ж - \rho) \;=\; g\,\rho ж\,\beta\,(t - tж)\;(3.7)$$

где β – коэффициент объемного расширения теплоносителя;

t и tж – температуры нагретого и холодного теплоносителей соответственно;

g – ускорение свободного падения, м/с2.

- Предпосылкой подобия теплообмена при естественной конвекции должно быть геометрическое подобие систем и подобие температурных полей на поверхности нагрева или охлаждения.
- Стационарные процессы свободной конвекции подобны, если два определяющих критерия: критерий Грасгофа Gr и критерий Прандтля Pr – численно одинаковы:

$$Gr = idem \quad \mathrm{Pr} = idem \, (3.8)$$

- Критерий Gr характеризует относительную эффективность подъемной силы, вызывающей свободное конвективное движение среды:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta t l3}{v2} (3.9)$$

где Δt – характерная разность температур;

l – характерный размер.

- В геометрически подобных системах свободной конвекции критерий Nu одинаков:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = idem,$$

а критериальное уравнение имеет вид

$$Nu = f\,(Gr, \mathrm{Pr})$$

Список литературы

1. И.Л.Повх Техническая гидромеханика, 1975г.
2. И.А. Кибеля, Н.Е.Кочин, Н.В.Розе Теоретическая гидромеханика.
3. С.С.Кутателадзе Основы теории теплообмена, 1979г.

Вывод

- Гидромеханика изучает все движения жидкостей и газов. Гидромеханика и ее часть гидравлика прикладная наука, которая изучает закономерности движения жидкостей и применение этих законов к решению изомерных задач.

Спасибо за внимание!