ВИДЫ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

10 класс

Содержание.

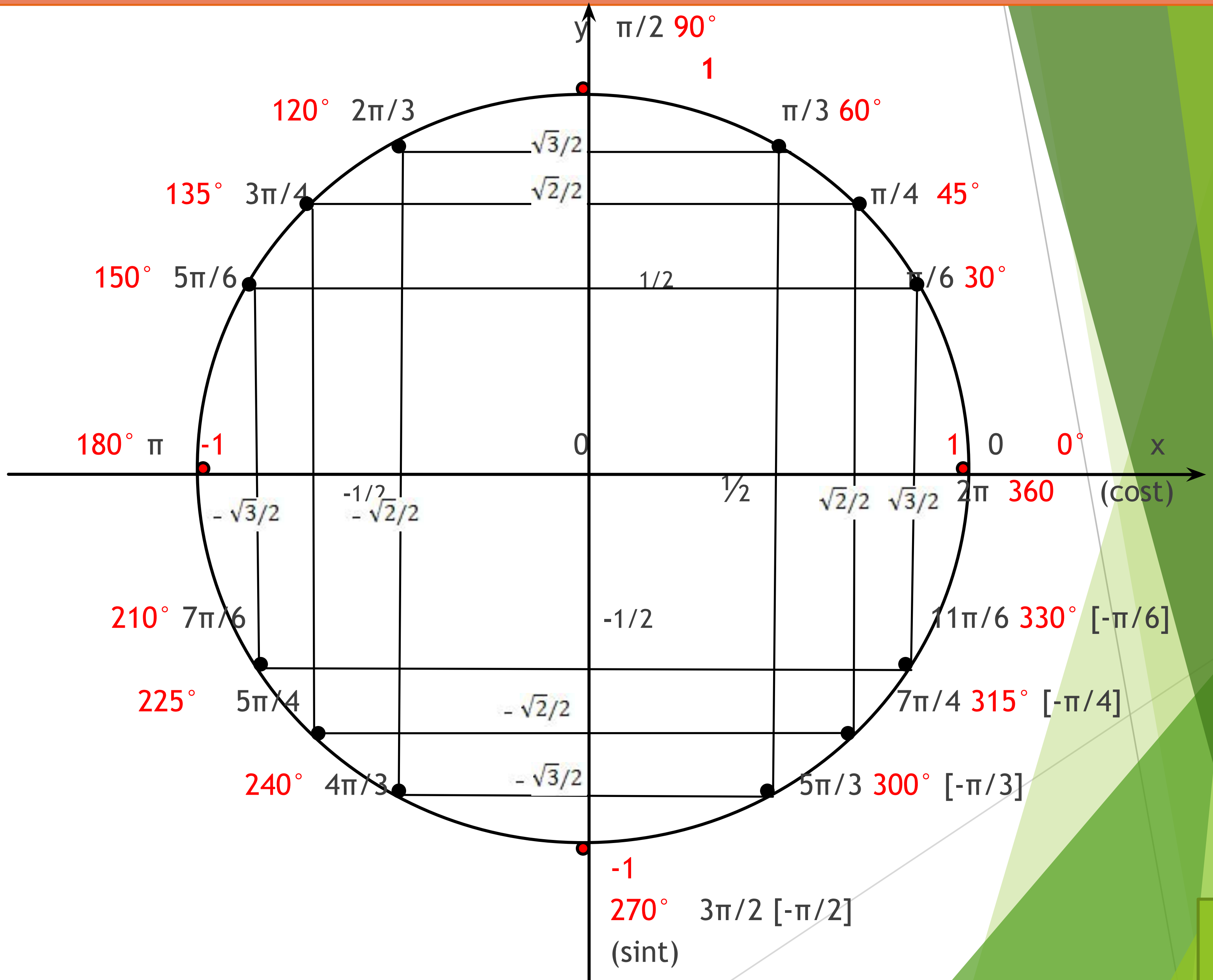
1. Вводная часть
2. Решение тригонометрических уравнений
3. Основные проблемы при решении тригонометрических уравнений

ЦЕЛЬ:

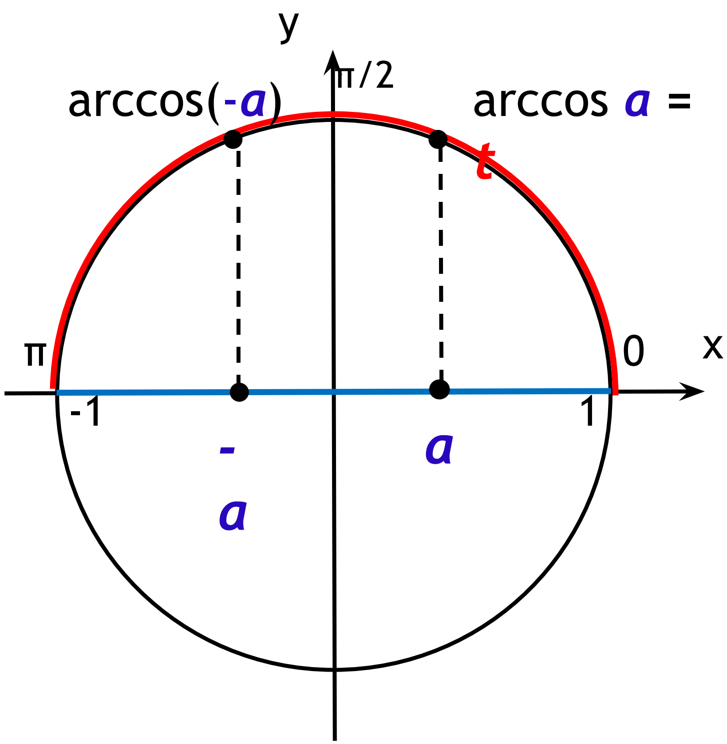
- Повторить решение тригонометрических уравнений
  - Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений
  - Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений
  - Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.

- Выделение основных проблем при решении этих уравнений:
  - Потеря корней.
  - Посторонние корни.
  - Отбор корней.

Повторение значения синуса и косинуса



Арккосинус

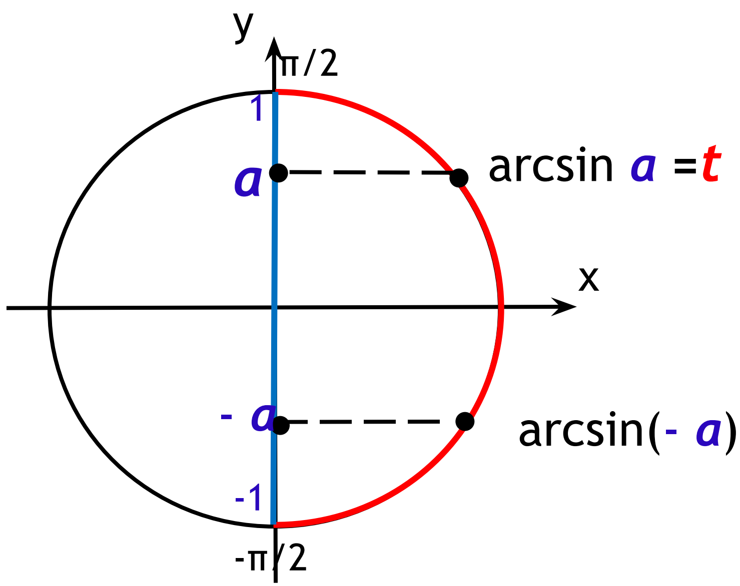


Арккосинусом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из [0;π], что **cos *t* = *a*.**

Причём, | ***a*** |≤ **1.**

arccos(**-** ***a***) **=** π- arccos ***a***

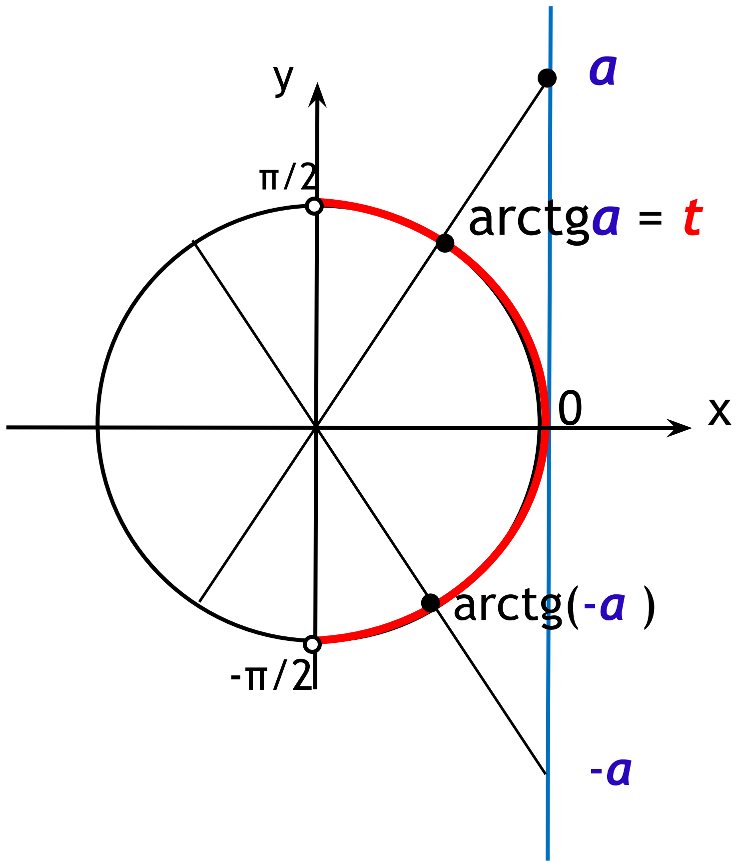
Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t = a.***
Причём, **| *a* |≤ 1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

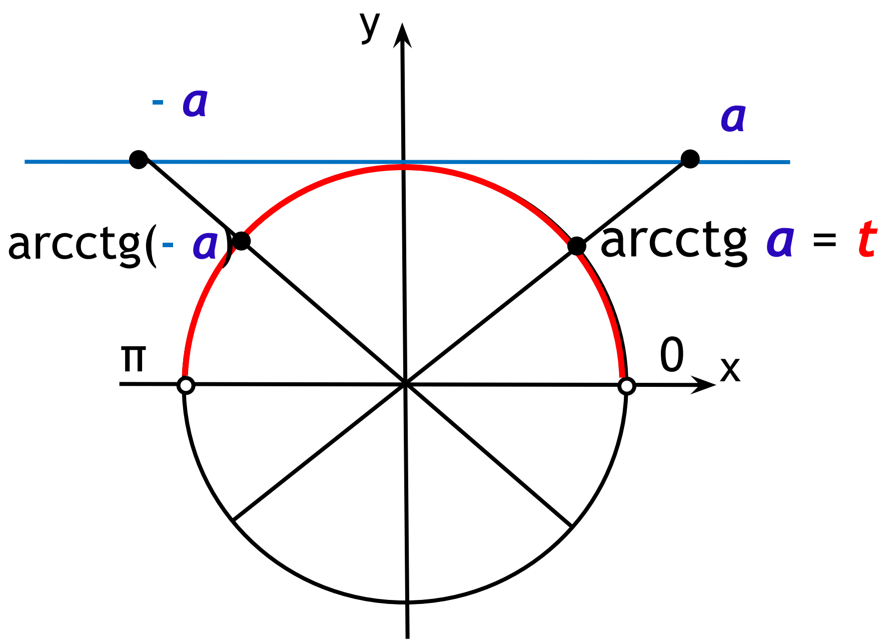
Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из (-π/2;π/2), что **$tg\ t = a$** .
Причём, a **Є R.**

arctg(-a) = - arctg a

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (0;π), что с***tg t* = *a.***
Причём, ***a*** ЄR .

arcctg(- ***a***) = π – arcctg ***a***

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где **|*a*|** ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>cost=0</u>
t = π/2+πk, kЄZ

2) <u>cost=1</u>
t = 2πk, kЄZ

3) <u>cost = -1</u>
t = π+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

2. sint = *а*, *где* | *а* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin \boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>sint=0</u>
t = πk, kЄZ

2) <u>sint=1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

3) <u>sint = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

3. tgt = *a*, *a*ЄR

t = arctg ***a*** **+** πk, k ЄZ

4. ctgt = *a*, *a* ЄR

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2x+1)$

1) $-1 \le \mathbf{2x+1} \le 1$
$-2 \le \mathbf{2x} \le 0$
$-1 \le \mathbf{x} \le 0$
Ответ: [-1;0]

2. $\arccos(5-2x)$

2) $-1 \le \mathbf{5-2x} \le 1$
$-6 \le \mathbf{-2x} \le -4$
$2 \le \mathbf{x} \le 3$
Ответ: [2;3]

3. $\arccos(x^2-1)$

$-1 \le \mathbf{x^2-1} \le 1$
$0 \le \mathbf{x^2} \le 2$
Ответ: $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$-1 \le 4x^2-3x \le 1$
$\begin{cases} 4x^2-3x \ge -1 \\ 4x^2-3x \le 1 \end{cases}$
$4x^2-3x-1 \le 0$
Ответ: $\left[-\frac{1}{4};1\right]$

Примеры:

1) cost= - $\frac{1}{2}$;

t= ±arccos(-1/2)+2πk, kЄZ

t= ± $\frac{2\pi}{3}$ + 2πk, kЄZ

2) sint = 0;

Частный случай:
t = πk, kЄZ

3) tgt = 1;

t = arctg1+πk, kЄZ

t = $\frac{\pi}{4}$ + πk, kЄZ.

4) ctgt = - $\sqrt{3}$

t = arcctg($-\sqrt{3}$)+ πk, kЄZ

t = $\frac{5\pi}{6}$ + πk, kЄZ.

Решение простейших уравнений

1) $\mathbf{tg2x = -1}$

$2x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi k,\ k\in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k\in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k\in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k\in Z$.

2) **$\mathbf{\cos(x+\pi/3) = ½}$**

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k,\ k\in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k\in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k\in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k\in Z$

3) **$\mathbf{\sin(\pi - x/3) = 0}$**

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k,\ k\in Z$

$x = 3\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $3\pi k,\ k\in Z$.

Виды тригонометрических уравнений

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

Первой степени:

Решаются делением на cos x (или sinx) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

3.Уравнение вида

$A \sin x + B \cos x = C$. $\quad A, B, C \neq 0$

Виды тригонометрических уравнений

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$a\cdot\sin^2x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2x$. Получим квадратное уравнение:

$$a\cdot tg^2x + b\cdot tgx + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$tg^2 x + 4\, tg\, x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1,\ y_2 = -3,$ отсюда

1) $tg\, x = -1,$ 2) $tg\, x = -3,$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg3 + \pi n,\ n \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $A \sin x + B \cos x = C$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;
Проверка обязательна!

Понижение степени.

$\cos^2 x$ *$= (1 + \cos 2x) : 2$*

$\sin^2 x$ *$= (1 - \cos 2x) : 2$*

Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$ заменим на $C \sin(x+\phi)$, где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\sin\phi = \frac{a}{C}$; $\cos\phi = \frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

Правила.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.

Потеря корней, лишние корни.

1.Потеря корней:

- делим на $g(x)$.
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на $g(x)$ (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Спасибо