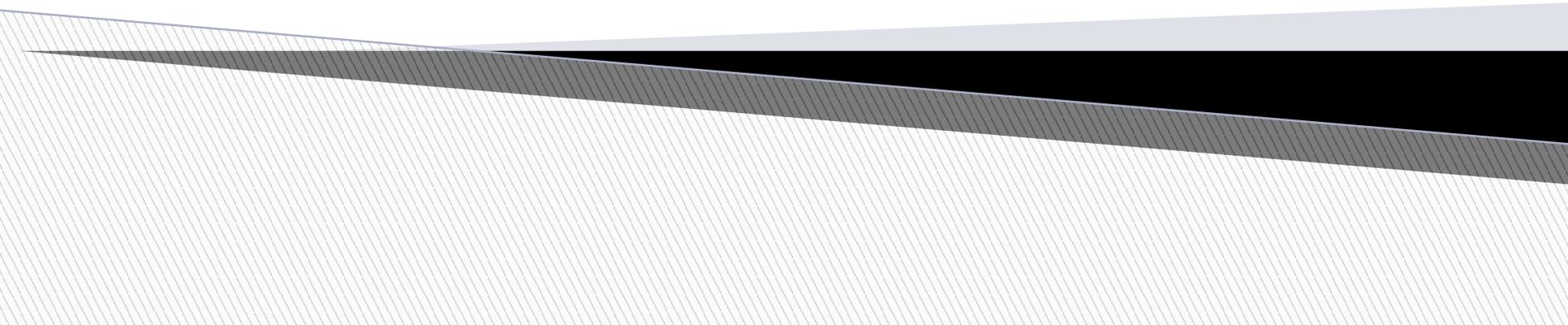
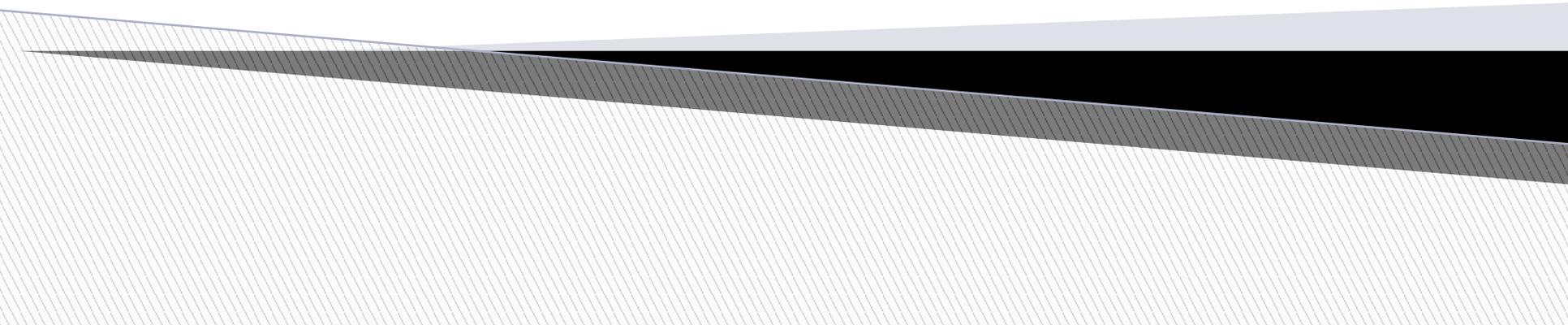


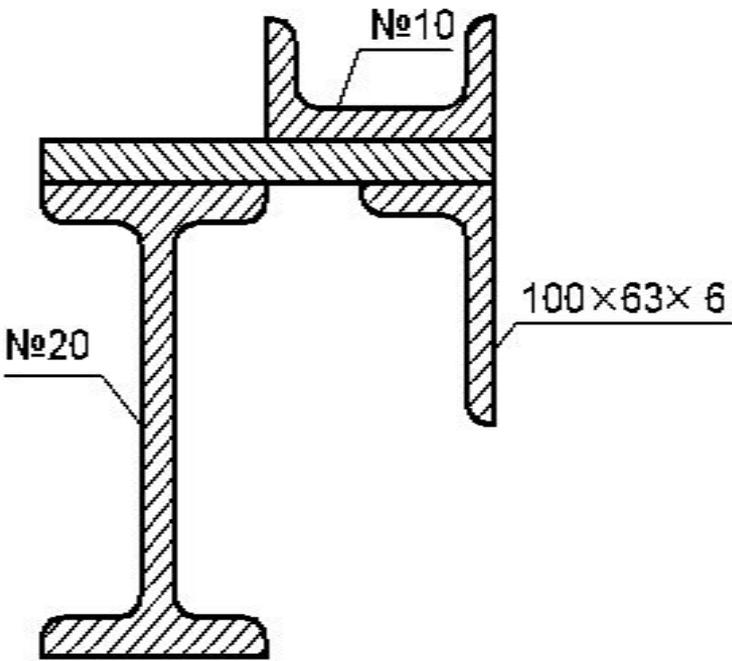
*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.  
Аммосова»  
Инженерно-технический институт  
Кафедра прикладной механики*

**Решение задач  
по дисциплине «Техническая механика»  
270800 - Строительство**



# **Геометрические характеристики плоских составных сечений**



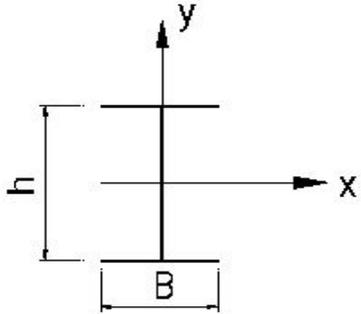


- Для заданного сечения требуется:
- Определить положение центра тяжести составной фигуры;
  - Вычислить осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно выбранных центральных осей  $x_0, y_0$ ;
  - Определить положение главных осей инерции;
  - Вычислить значение главных осевых моментов инерции и сравнить их с экстремальными значениями осевых моментов инерции.

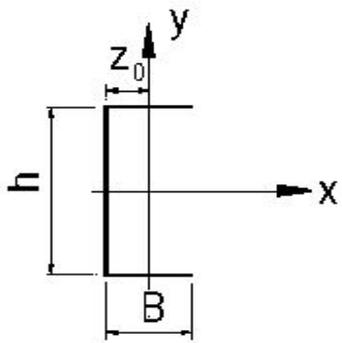
Сечение состоит из листа размерами  $B \times t = 20 \times 2$  см<sup>2</sup>, двутавра №20, неравнополочного уголка  $B \times b = 10 \times 6,3 \times 6$  и швеллера №10.

## Решение

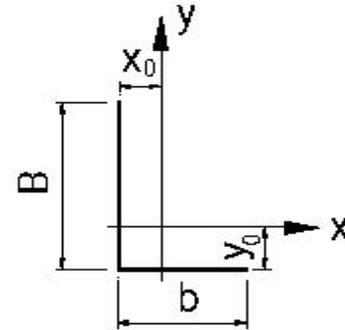
Необходимые геометрические характеристики сечений двутаврового, швеллерного профилей и неравнополочного уголка берем из таблицы сортаментов:



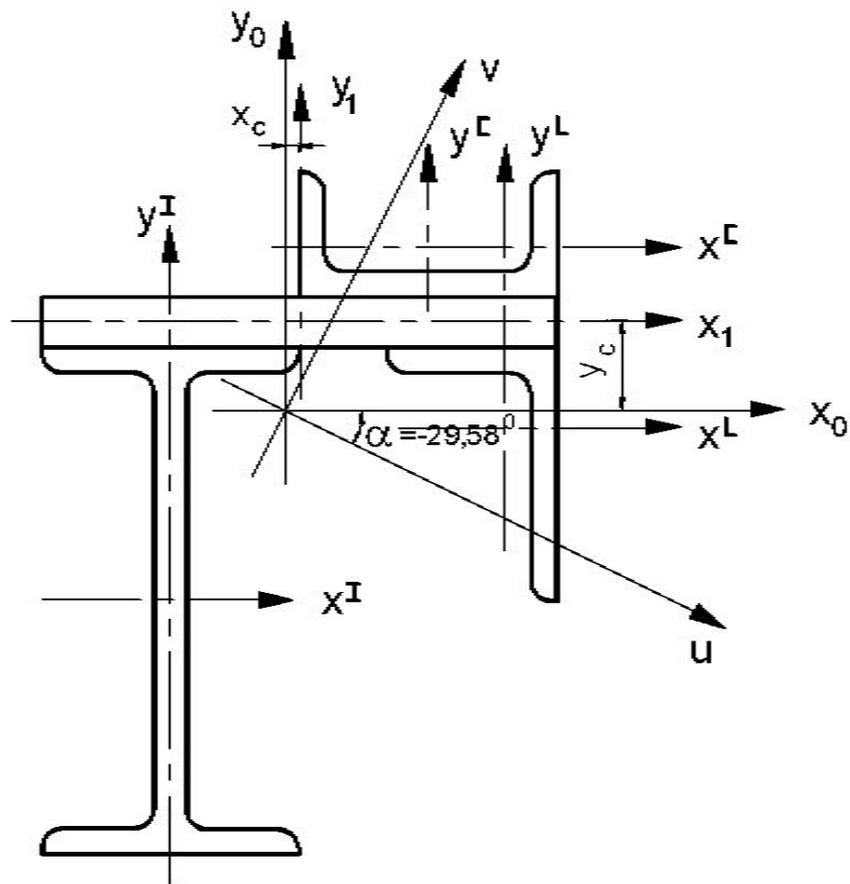
$$\begin{aligned}h &= 200 \text{ мм}, \\B &= 100 \text{ мм}, \\A &= 26,8 \text{ см}^2, \\I_x &= 1840 \text{ см}^4, \\I_y &= 115 \text{ см}^4.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}h &= 100 \text{ мм}, \\B &= 46 \text{ мм}, \\A &= 10,9 \text{ см}^2, \\I_x &= 174 \text{ см}^4, \\I_y &= 20,4 \text{ см}^4, \\z_0 &= 1,44 \text{ см}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}B &= 100 \text{ мм}, \\b &= 63 \text{ мм}, \\A &= 9,58 \text{ см}^2, \\I_x &= 98,3 \text{ см}^4, \\I_y &= 30,6 \text{ см}^4, \\|I_{xy}| &= 31,5 \text{ см}^4, \\x_0 &= 1,42 \text{ см}, \\y_0 &= 3,23 \text{ см}.\end{aligned}$$



Произвольные оси  $x_1, y_1$  принимаем проходящими через центр тяжести сечения листа - прямоугольника

Положения центров тяжести отдельных фигур определяем их координатами относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$x_1^- = 0, \quad y_1^- = 0,$$

$$x_1^I = -\left(\frac{B^-}{2} - \frac{B^I}{2}\right) = -5 \text{ см};$$

$$y_1^I = -\left(\frac{h^I}{2} + \frac{t^-}{2}\right) = -11 \text{ см};$$

$$x_1^L = \left(\frac{B^-}{2} - \frac{h^L}{2}\right) = 5 \text{ см};$$

$$x_1^L = \left(\frac{B^-}{2} - x_0^L\right) = 8,58 \text{ см};$$

$$y_1^L = \left(\frac{t^-}{2} + z_0^L\right) = 2,44 \text{ см};$$

$$y_1^L = -\left(\frac{t^-}{2} + y_0^L\right) = -4,23 \text{ см};$$

Определяем положение центра тяжести всего сечения относительно осей  $x_1, y_1$ :

$$x_C = \frac{\sum S_{y_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{A^I \cdot x_1^I + A^L \cdot x_1^L + A^L \cdot x_1^L}{A^- + A^I + A^L + A^L} =$$
$$= \frac{26,8 \cdot (-5) + 10,9 \cdot 5 + 9,58 \cdot 8,58}{40 + 26,8 + 10,9 + 9,58} = -0,03 \text{ см}$$

$$y_C = \frac{\sum S_{x_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{A^I \cdot y_1^I + A^L \cdot y_1^L + A^L \cdot y_1^L}{A^- + A^I + A^L + A^L} =$$
$$= \frac{26,8 \cdot (-11) + 10,9 \cdot 2,44 + 9,58 \cdot (-4,23)}{40 + 26,8 + 10,9 + 9,58} = -3,54 \text{ см}$$

Положение центров тяжести фигур относительно центральных осей  $x_0, y_0$ :

$$x_0^- = x_C = 0,03 \text{ см}, \quad y_0^- = y_C = 3,54 \text{ см};$$

$$x_0^I = -(5 - 0,03) = -4,97 \text{ см}, \quad y_0^I = -(11 - 3,54) = -7,46 \text{ см};$$

$$x_0^L = (5 + 0,03) = 5,03 \text{ см}, \quad y_0^L = (2,44 + 3,54) = 5,98 \text{ см};$$

$$x_0^R = (8,58 + 0,03) = 8,61 \text{ см}, \quad y_0^R = -(4,23 - 3,54) = -0,69 \text{ см}.$$

Осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей инерции  $x_0$  и  $y_0$ :

$$I_{x_0} = \left( I_x^- + (y_0^-)^2 \cdot A^- \right) + \left( I_x^I + (y_0^I)^2 \cdot A^I \right) + \left( I_y^L + (y_0^L)^2 \cdot A^L \right) + \\ + \left( I_x^L + (y_0^L)^2 \cdot A^L \right) = \left( \frac{20 \cdot 2^3}{12} + 3,54^2 \cdot 40 \right) + \left( 1840 + (-7,46)^2 \cdot 26,8 \right) + \\ + \left( 20,4 + 5,98^2 \cdot 10,9 \right) + \left( 98,3 + (-0,69)^2 \cdot 9,58 \right) = 3859,915 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_0} = \left( I_y^- + (x_0^-)^2 \cdot A^- \right) + \left( I_y^I + (x_0^I)^2 \cdot A^I \right) + \left( I_x^L + (x_0^L)^2 \cdot A^L \right) + \\ + \left( I_y^L + (x_0^L)^2 \cdot A^L \right) = \left( \frac{2 \cdot 20^3}{12} + 0,03^2 \cdot 40 \right) + \left( 115 + (-4,97)^2 \cdot 26,8 \right) + \\ + \left( 174 + 5,03^2 \cdot 10,9 \right) + \left( 30,6 + 8,61^2 \cdot 9,58 \right) = 3300,3 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ :

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0} &= \left( I_{xy}^- + y_0^- \cdot x_0^- \cdot A^- \right) + \left( I_{xy}^I + y_0^I \cdot x_0^I \cdot A^I \right) + \left( I_{xy}^L + y_0^L \cdot x_0^L \cdot A^L \right) + \\ &+ \left( I_{xy}^L + y_0^L \cdot x_0^L \cdot A^L \right) = (0 + 3,54 \cdot 0,03 \cdot 40) + (0 + (-7,46) \cdot (-4,97) \cdot 26,8) + \\ &+ (0 + 5,98 \cdot 5,03 \cdot 10,9) + (-31,5 + (-0,69) \cdot 8,61 \cdot 9,58) = 937,1 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Положение главных осей инерции относительно осей  $x_0, y_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = -\frac{2 \cdot 937,1}{3859,915 - 3300,3} = -1,6745$$

$$2\alpha_0 = -59,155^\circ \quad \alpha_0 = -29,578^\circ.$$

Определяем значение главных осевых моментов инерции:

$$\begin{aligned} I_{\text{гл1}} &= I_{x_0} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_0} \sin^2 \alpha_0 - I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 3859,915 \cdot \cos^2(-29,578^0) + 3300,3 \cdot \sin^2(-29,578^0) - \\ &- 937,1 \cdot \sin(-59,155^0) = 4558,12 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\text{гл2}} &= I_{x_0} \sin^2 \alpha_0 + I_{y_0} \cos^2 \alpha_0 - I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 3859,915 \cdot \sin^2(-29,578^0) + 3300,3 \cdot \cos^2(-29,578^0) + \\ &+ 937,1 \cdot \sin(-59,155^0) = 2602,10 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

По результатам вычисления получили  $I_{\text{гл1}} > I_{\text{гл2}}$ , следовательно, поворот оси  $x_0$  на угол  $\alpha_0$  совпадает с главной осью  $u$ , а ось  $y_0$  с осью  $v$ , т.е.  $I_{\text{гл1}} = I_u$ ,  $I_{\text{гл2}} = I_v$ .

Определяем экстремальные значения осевых моментов инерции:

$$\begin{aligned} I_{\frac{\max}{\min}} = I_{u/v} &= \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{x_0y_0}^2} = \\ &= \frac{3859,915 + 3300,3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3859,915 - 3300,3)^2 + 4 \cdot 937,1^2} = \\ &= 3580,1075 \pm 977,982, \\ I_{\max} = I_u &= 4558,1 \text{ см}^4, \quad I_{\min} = I_v = 2602,1 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Максимальные и минимальные значения осевых моментов инерции являются главными осевыми моментами инерции.

Сумма осевых моментов инерции относительно любых двух ортогональных осей есть величина постоянная и равная полярному моменту инерции сечения:

$$I_{\rho} = I_{x_0} + I_{y_0} = I_u + I_v;$$

$$I_{\rho} = 3859,915 + 3300,3 = 7160,2 = 4558,12 + 2602,1 = 7160,22 \text{ см}^4.$$