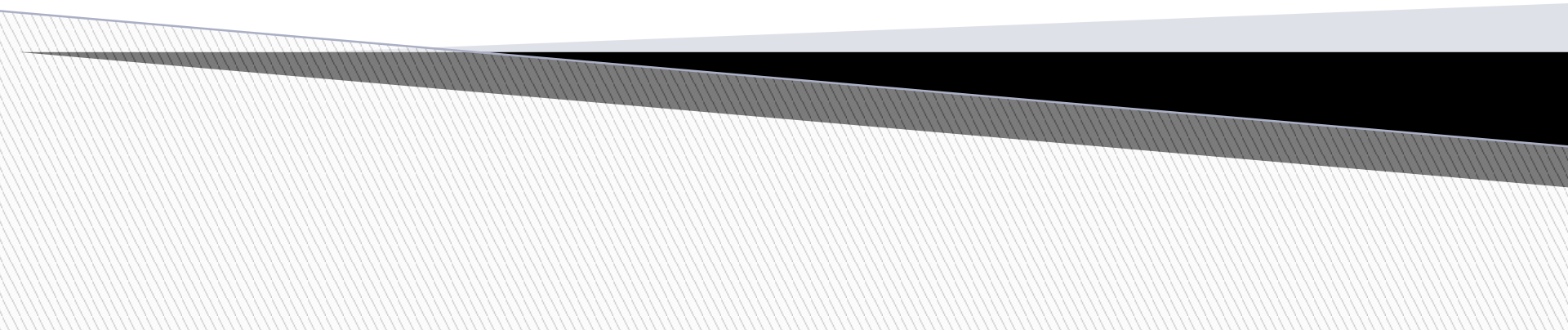
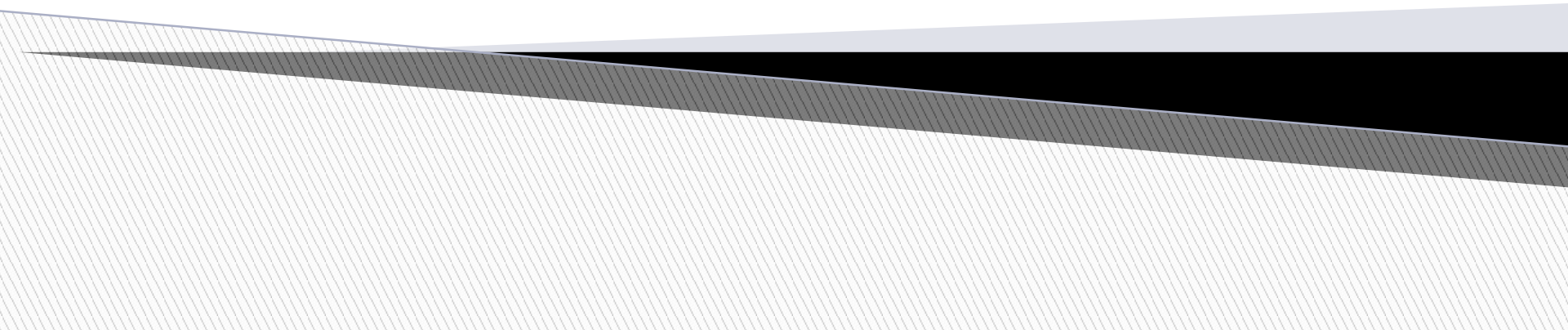


*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.
Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики*

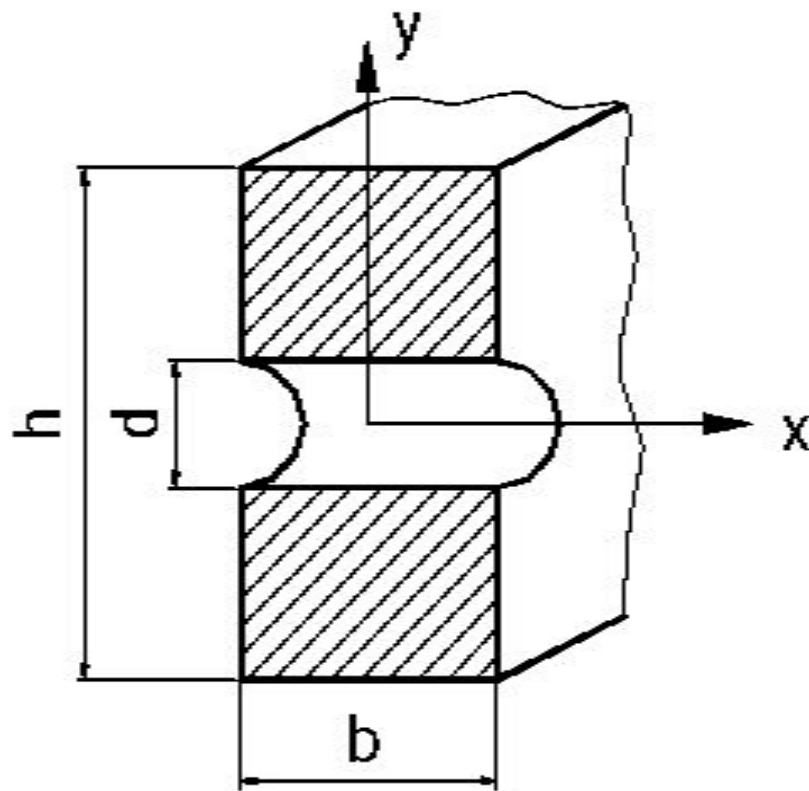
**Решение задач
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство**



Геометрические характеристики плоских сечений



Определить величины главных моментов инерции и моментов сопротивления сечения прямоугольного бруса, ослабленного круглым отверстием, при заданных размерах $b=12$ см, $h=20$ см, $d=5$ см.



Решение:

Центральные оси x и y являются главными, так как они являются осями симметрии сечения.

Моменты инерции относительно осей:

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bd^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} - \frac{12 \cdot 5^3}{12} = 7875 \text{ см}^4$$

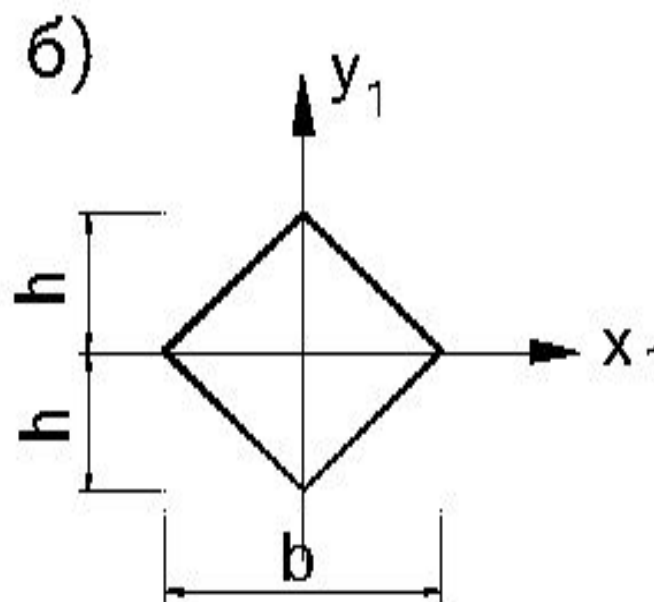
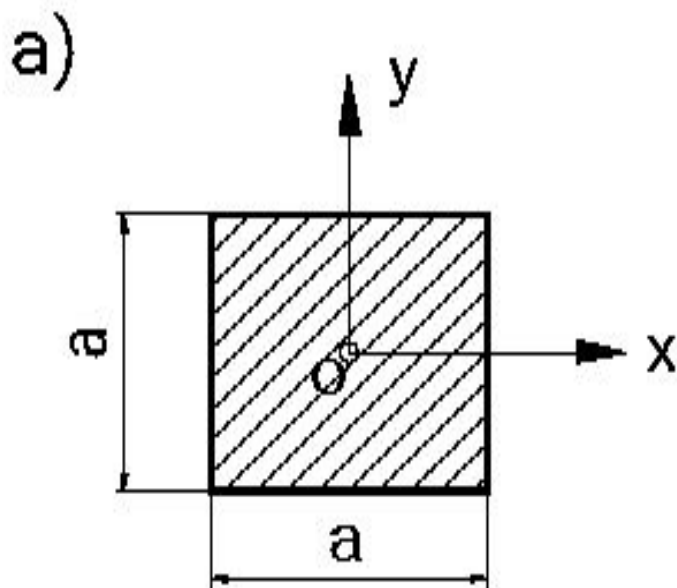
$$I_Y = I_{Y_1} - I_{Y_2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{db^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} - \frac{5 \cdot 12^3}{12} = 2160 \text{ см}^4$$

Соответственно, моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_X}{h/2} = \frac{7875}{10} = 787,5 \text{ см}^3;$$

$$W_Y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{I_Y}{b/2} = \frac{2160}{6} = 360 \text{ см}^3.$$

Вычислить, как изменяется момент инерции и момент сопротивления квадрата со стороной a , относительно оси x , если сечение повернуть на угол $\alpha=45^\circ$, оставив ось x горизонтальной.



Решение

Осевой момент инерции и момент сопротивления квадрата относительно оси x в положении а) будут равны:

$$I_X = \frac{bh^3}{12} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12} = 0,0833a^4 \quad W_X = \frac{I_X}{a/2} = \frac{a^3}{6} = 0,16667a^3$$

Осевой момент инерции и момент сопротивления повернутого на 45^0 квадрата (рис.б) относительно горизонтальной оси x_1 будут равны:

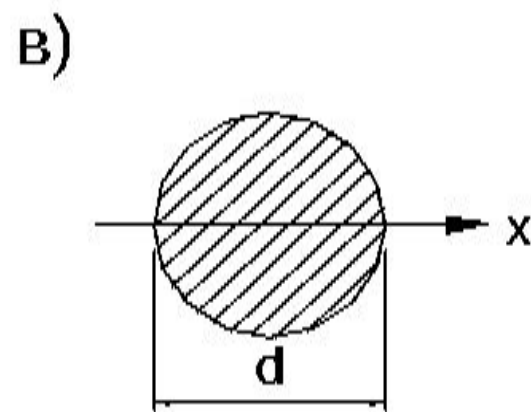
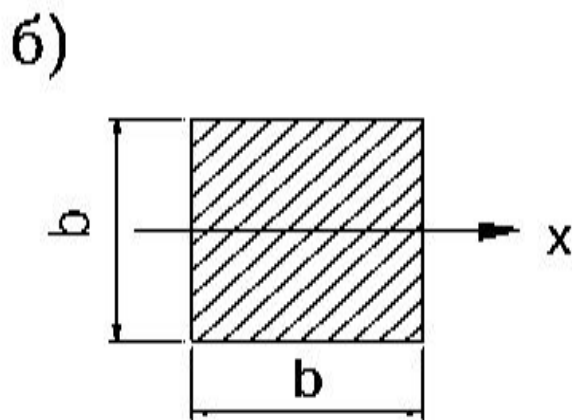
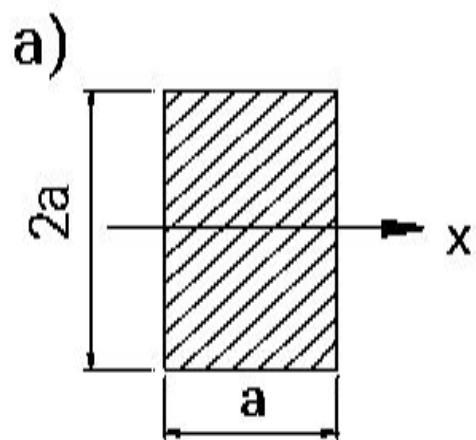
$$I_{X_1} = 2 \cdot \frac{bh^3}{12} = 2 \cdot \frac{1,414a \cdot (0,707a)^3}{12} = 0,0833a^4$$

$$\text{где } b = 2 \cdot a \cdot \text{Cos}45^0 = a \cdot 2 \cdot 0,707 = 1,414a; \quad h = 0,707a.$$

$$W_{X_1} = \frac{I_{X_1}}{h} = \frac{0,0833a^4}{0,707a} = 0,11787a^3$$

Моменты инерции I_X и I_{X_1} равны, т.е. не изменяются, момент сопротивления W_{X_1} уменьшается на 29,3%.

Сравнить величины моментов инерции относительно центральной оси x сечений прямоугольника, квадрата и круга при условии, что площади A всех трех сечений одинаковы.



Решение

Для сравнения величин моментов инерции, выражаем их через площади сечения, так как у всех сечений площади одинаковые.

$$A = A_{(a)} = a \cdot 2a = 2a^2, \quad A = A_{(б)} = b \cdot b = b^2, \quad A = A_{(b)} = \frac{\pi d^2}{4}$$

Моменты инерции сечений относительно оси x :

$$I_{X_{(a)}} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{8}{12} a^4 = \frac{2 \cdot (2a^2) \cdot (2a^2)}{12} = 0,1667 \cdot A_a^2 = 0,1667 \cdot A^2;$$

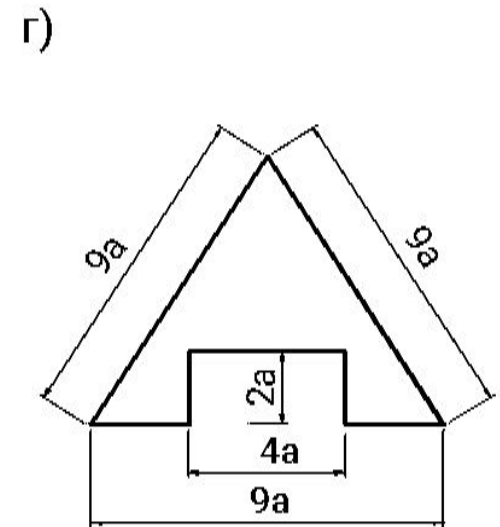
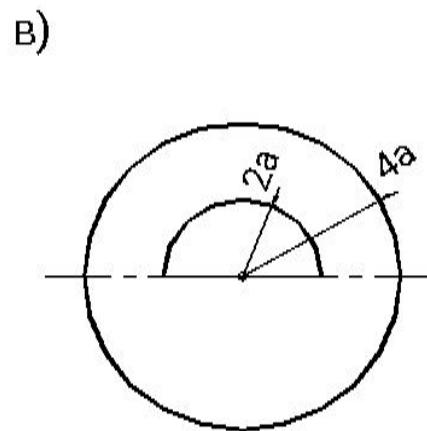
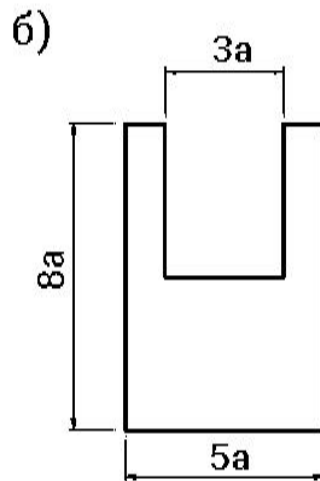
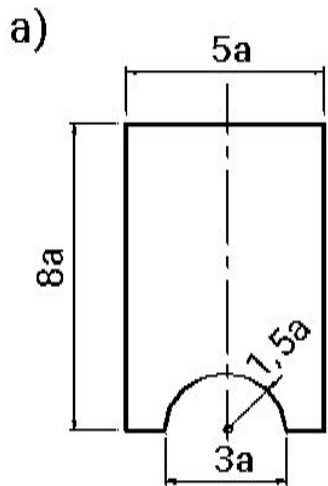
$$I_{X_{(б)}} = \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{12} = \frac{b^2 \cdot b^2}{12} = 0,08333 \cdot A_b^2 = 0,08333 A^2;$$

$$I_{X_{(b)}} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot \pi \cdot d^2 \cdot d^2}{\pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{\pi \cdot 4} \cdot A_b^2 = 0,0796 A^2.$$

Момент инерции прямоугольника больше, чем квадрата в 2 раза, а круглого сечения - в 2,1 раза. Момент инерции квадратного сечения больше, чем круглого в 1,05 раза.

Для сечений, показанных на рис., определить:

- положение центра тяжести;
- вычислить осевые моменты инерции I_X и I_Y ;
- осевые моменты сопротивления
- вычислить осевые и центробежный момент инерции относительно осей, повернутых на угол α а) $\alpha=30^\circ$ б) $\alpha=-45^\circ$ в) $\alpha=60^\circ$ г) $\alpha=-60^\circ$.



Решение

Сечение а

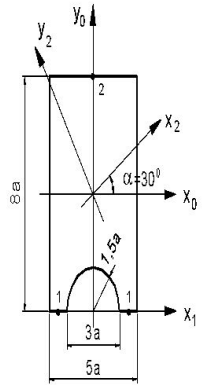
Положение центра тяжести фигуры относительно оси x_1 :

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{5a \cdot 8a \cdot 4a - \frac{\pi \cdot (1,5a)^2}{2} \cdot 0,424 \cdot 1,5a}{5a \cdot 8a - \frac{\pi \cdot (1,5a)^2}{2}} = 4,326a$$

Моменты инерции фигуры относительно центральных осей x_0, y_0 :

$$I_{x_0} = \frac{5a \cdot (8a)^3}{12} + (4,326a - 4a)^2 \cdot (5a \cdot 8a) - \left[0,11 \cdot (1,5a)^4 + \frac{\pi \cdot (1,5a)^2}{2} \cdot (4,326a - 0,424 \cdot 1,5a)^2 \right] = 168,929a^4;$$

$$I_{y_0} = \frac{8a \cdot (5a)^3}{12} - \frac{\pi \cdot (1,5a)^4}{8} = 81,346a^4$$



Моменты сопротивления сечения относительно оси x_0 в соответствующих точках 1 и 2.

$$W_x^{(1)} = \frac{I_{x_0}}{y_1} = \frac{168,929a^4}{4,326a} = 39,05a^3 \quad W_x^{(2)} = \frac{I_{x_0}}{y_2} = \frac{168,929a^4}{3,674a} = 45,98a^3$$

где $y_1=4,326a$, $y_2=h-y_1=3,674a$.

В сечении ось y_0 является осью симметрии, следовательно, центробежный момент инерции $I_{x_0y_0} = 0$

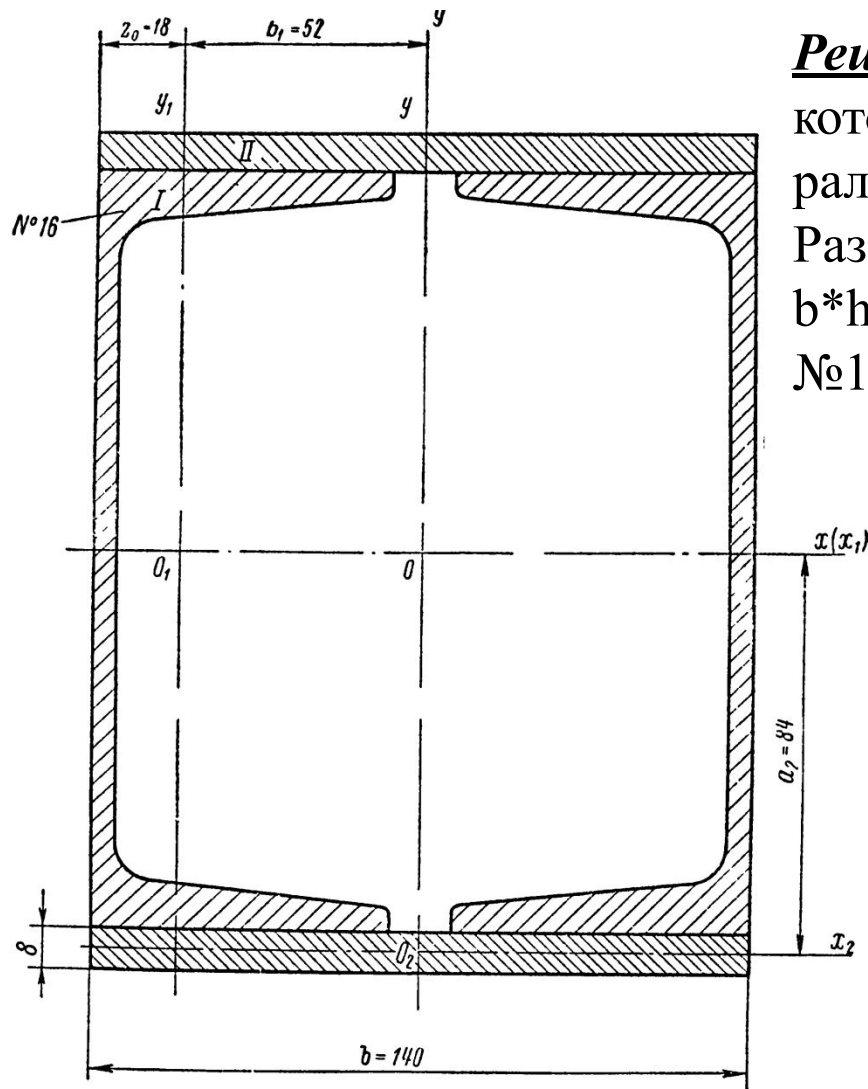
Осевые моменты инерции относительно осей x_2 и y_2 , повернутых на угол $\alpha=30^0$:

$$\begin{aligned} I_{x_2} &= I_{x_0} \cdot \text{Cos}^2 30^0 + I_{y_0} \cdot \text{Sin}^2 30^0 = \\ &= 168,929a^4 \cdot \text{Cos}^2 30^0 + 81,346a^4 \cdot \text{Sin}^2 30^0 = 147,033a^4 \\ I_{y_2} &= I_{x_0} \cdot \text{Sin}^2 30^0 + I_{y_0} \cdot \text{Cos}^2 30^0 = \\ &= 168,929a^4 \cdot \text{Sin}^2 30^0 + 81,346a^4 \cdot \text{Cos}^2 30^0 = 103,242a^4 \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции относительно осей x_2 и y_2 :

$$I_{x_2y_2} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \cdot \text{Sin}2\alpha = \frac{168,929a^4 - 81,346a^4}{2} \cdot \text{Sin}60^0 = 37,923a^4$$

Вычислить главные центральные моменты инерции.



Решение: Сечение имеет 2 оси симметрии, которые и являются его главными центральными осями.

Разбиваем сечение на 2 прямоугольника: $b \cdot h = 140 \cdot 8$ мм и 2 прокатных швеллера №16. Из табл. сортамента имеем:

$$I_{x1} = I_x = 747 \text{ см}^4; I_{y1} = I_y = 63,3 \text{ см}^4;$$

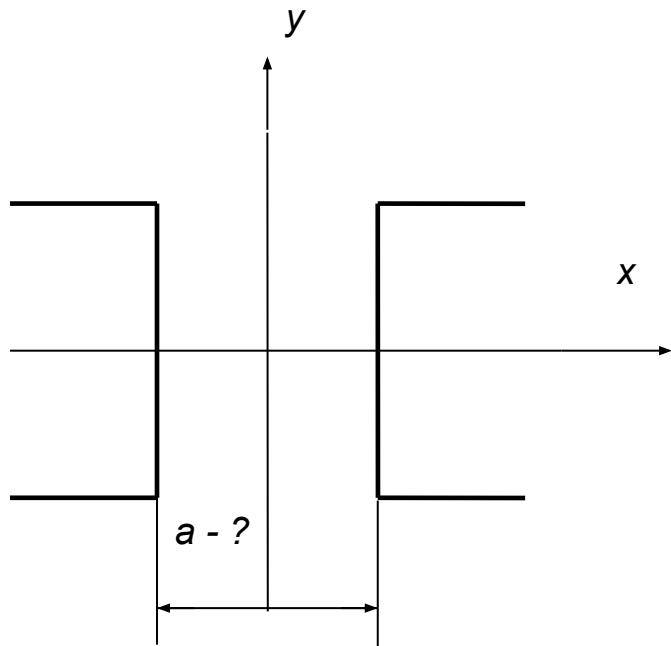
$$A_1 = 18,1 \text{ см}^2; z_0 = 1,8 \text{ см}.$$

Вычислим I_x и I_y

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \left(I_{x1} + \frac{bh^3}{12} + a_2^2 bh \right) = \\ &= 2 \left(747 + \frac{14 \cdot 0,8^3}{12} + 8,4^2 \cdot 14 \cdot 0,8 \right) \approx 3080 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left(I_{y1} + b_1^2 A_1 + \frac{hb^3}{12} \right) = \\ &= 2 \left(63,3 + 5,2^2 \cdot 18,1 + \frac{0,8 \cdot 14^3}{12} \right) \approx 1470 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

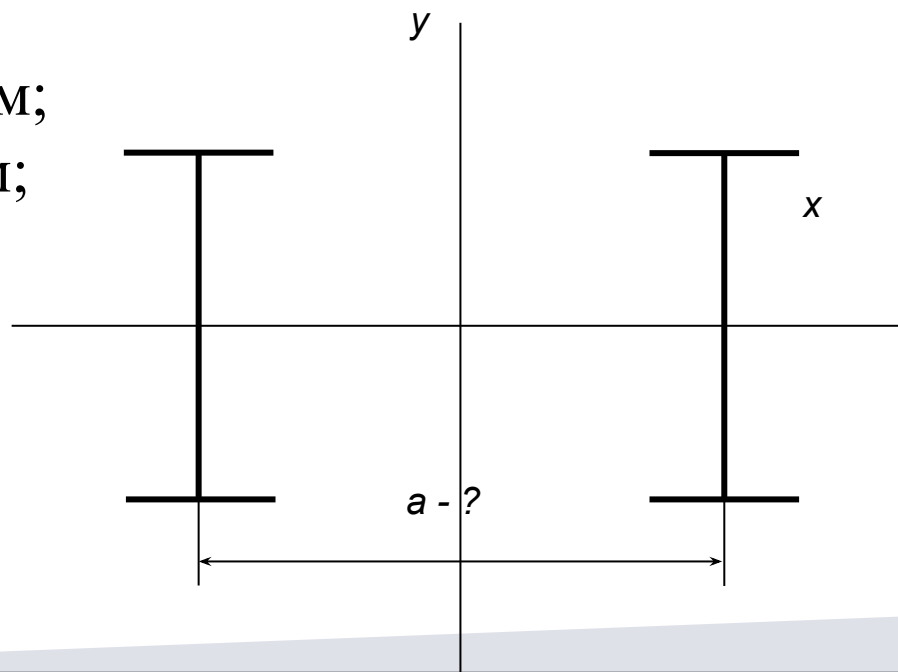
Определить на каком расстоянии друг от друга нужно расположить два швеллера №14, чтобы осевые моменты инерции сечения были равны между собой.



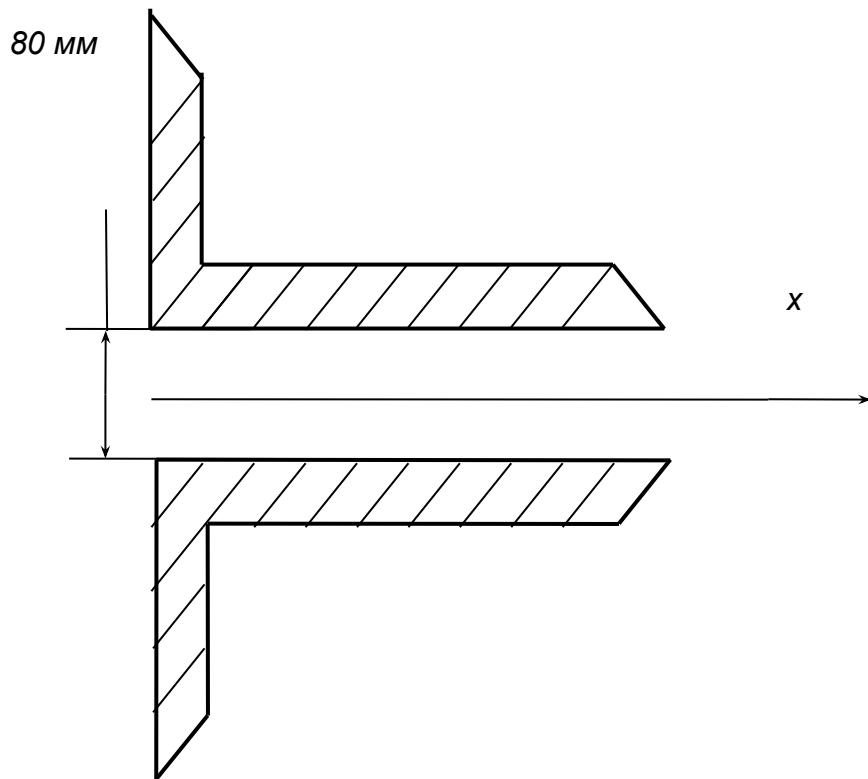
- а) 4,63 см
- б) 20,4 см
- в) 7,35 см
- г) 16,0 см

Определить на каком расстоянии друг от друга нужно расположить два двутавра №20, чтобы осевые моменты инерции сечения были равны между собой.

- А) 20,2 см ; Б) 16,04см;
В) 12,24см; Г) 32,24см;



Для сечения, составленного из двух неравнобоких уголков 100*63*10, определить момент инерции J_x



- А) 1059,4 см⁴;
- Б) 308 см⁴;
- В) 483 см⁴;
- Г) 683 см⁴