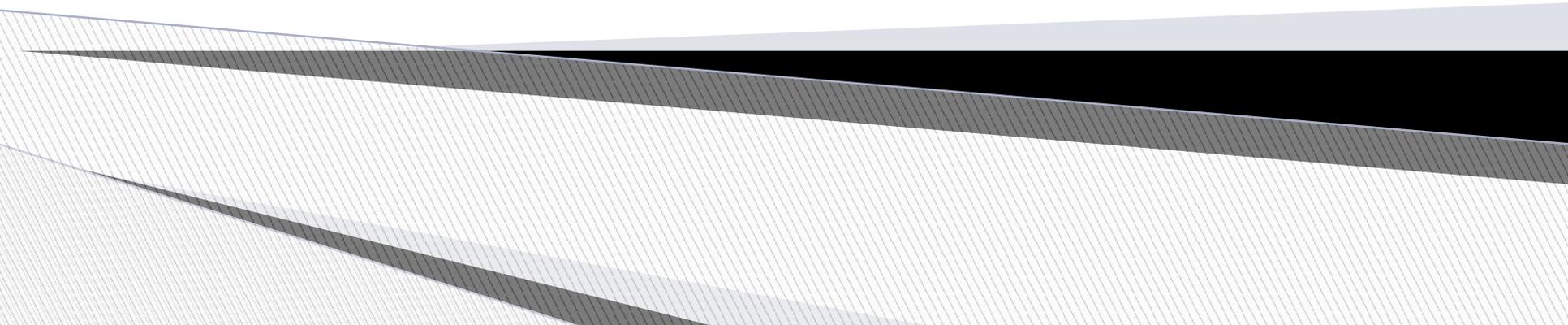


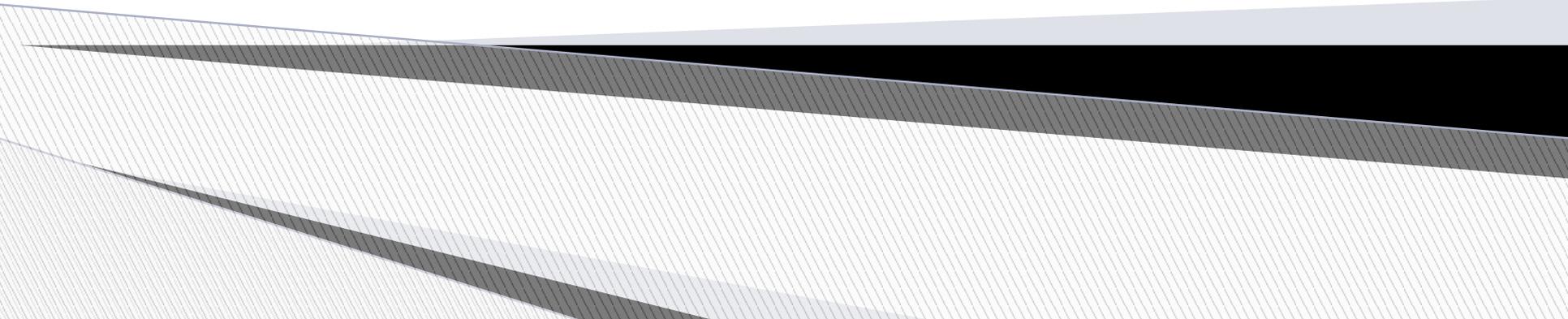
*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.  
Аммосова»  
Инженерно-технический институт  
Кафедра прикладной механики*

**Лекции**  
**по дисциплине «Техническая механика»**  
**270800 - Строительство**



# Плоский изгиб

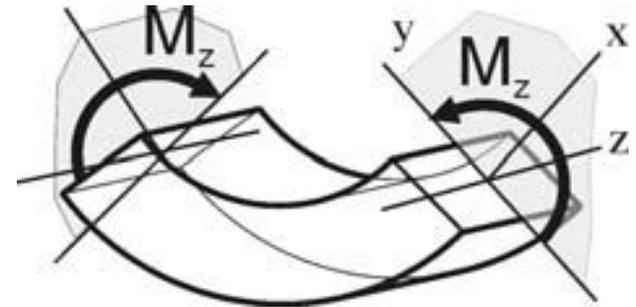
## Расчет на прочность



# Общие понятия и определения

**Изгиб** – деформация, при которой под действием внешних сил ось стержня изменяет свою кривизну.

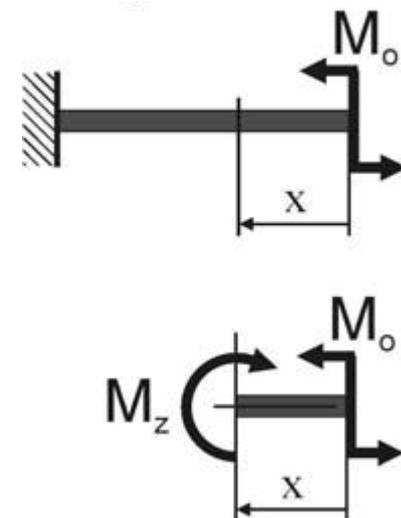
Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.



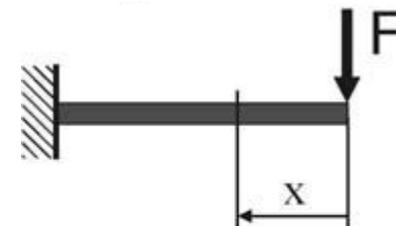
Различают изгиб **плоский** (**чистый, прямой поперечный**), **косой** и **сложный**.

**Плоский изгиб** – изгиб, при котором все усилия, изгибающие балку, лежат в одной из плоскостей симметрии балки (в одной из главных плоскостей).

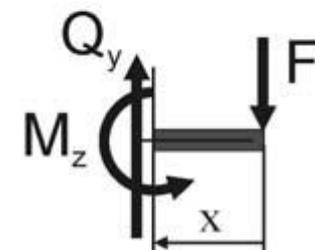
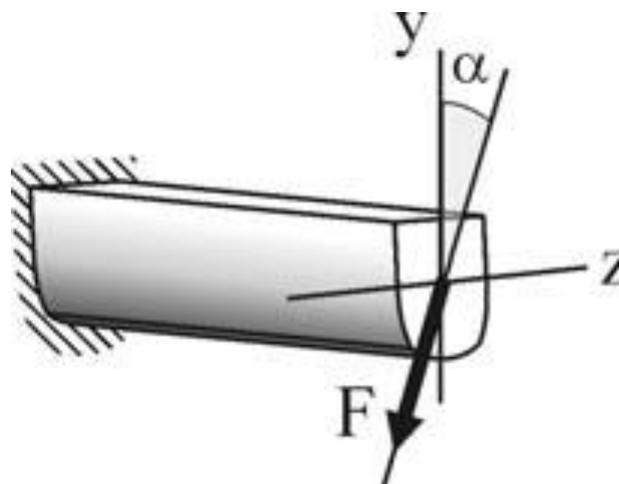
**Чистый изгиб** – в сечениях стержня возникает только – изгибающий момент.



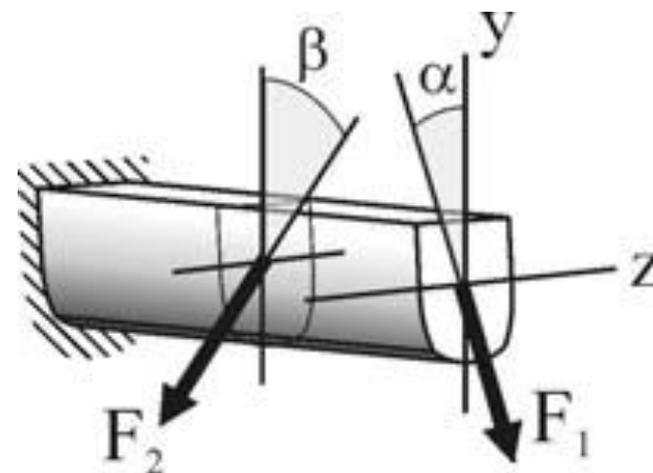
**Прямой поперечный изгиб** – в сечениях стержня возникают два внутренних усилия – изгибающий момент и поперечная сила.



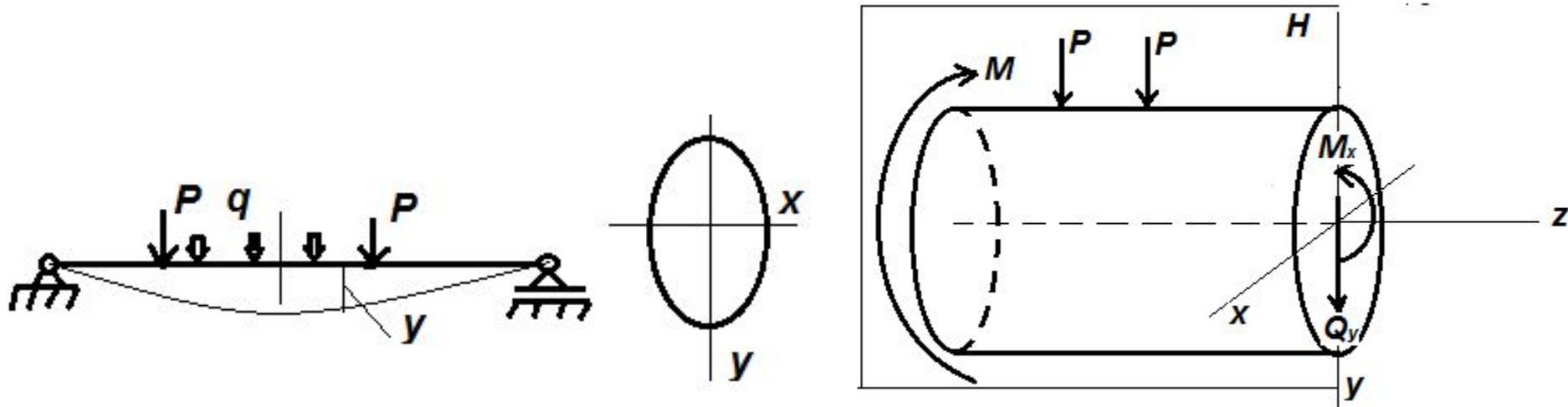
**Косой изгиб** – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции.



**Сложный изгиб** – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях.



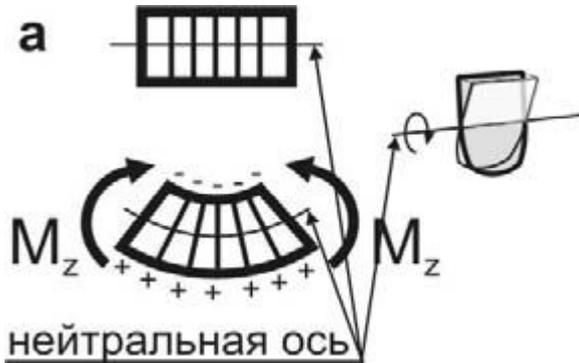
# Плоский изгиб балок симметричного поперечного сечения



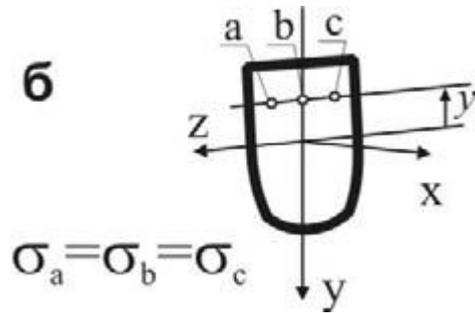
- 1) Поперечное сечение балки должно иметь хотя бы одну ось симметрии;
- 2) Внешние силы направлены перпендикулярно к оси стержня и лежат в плоскости, проходящей через ось симметрии, при этом деформированная ось балки представляет плоскую кривую;
- 3) При этом в поперечном сечении бруса будут возникать изгибающий момент –  $M_x$  и поперечная сила –  $Q_y$ , действующие в той же плоскости симметрии балки, продольные силы равны нулю ( $N=0$ ).

## Гипотезы при изгибе:

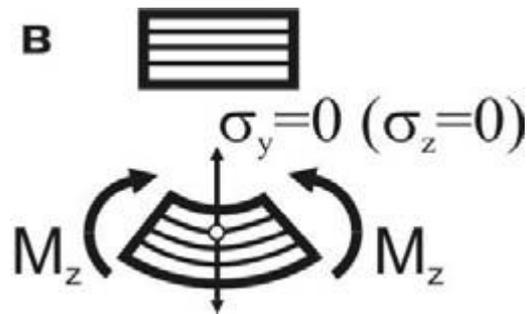
– гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) – сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, и лишь поворачиваются относительно некоторой линии, которая называется нейтральной осью сечения балки.



– гипотеза о постоянстве нормальных напряжений – напряжения, действующие на одинаковом расстоянии  $y$  от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;

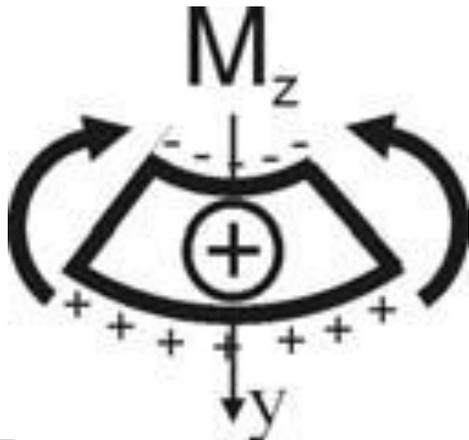
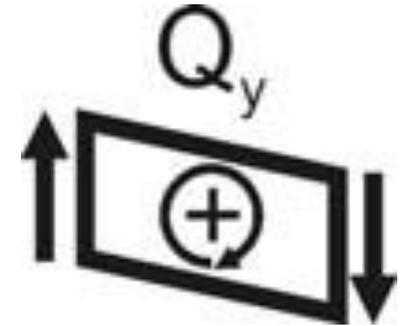


– гипотеза об отсутствии боковых давлений – соседние продольные волокна не давят друг на друга.



## Правило знаков при определении внутренних усилий:

1) поперечная сила  $Q_y$  считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый элемент балки по часовой стрелке;

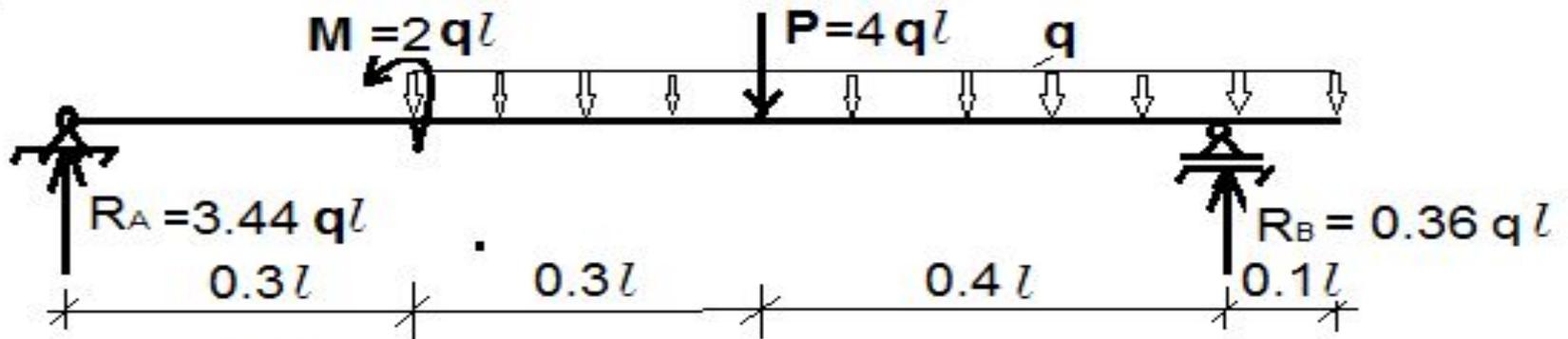


2) изгибающий момент  $M_z$  считается положительным, если при изгибе элемента балки верхние волокна элемента оказываются сжатыми, а нижние – растянутыми (правило зонты).

Решение задачи по определению внутренних усилий при изгибе:

- 1) из условия равновесия конструкции в целом, определяем реакции опор;
- 2) выделяем характерные участки балки, принимая за границы участков точки приложения сил, точки изменения формы или размеров балки, точки закрепления балки;
- 3) определяем внутренние усилия в сечениях балки, рассматривая условия равновесия отсеченной части (слева или справа) на каждом из участков.

## Пример построения эпюры внутренних усилий - поперечных сил и изгибающих моментов



1. Определяем опорные реакции:

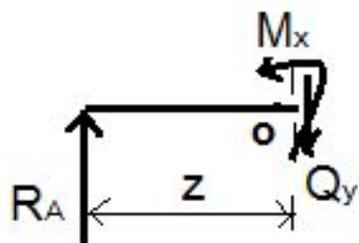
$$\sum m_A = R_B \cdot l + m - P \cdot 0.6l - q \cdot 0.8l \cdot 0.7l = 0$$

$$R_B = \frac{-2ql^2 + 3ql \cdot 0.6l + q \cdot 0.8l \cdot 0.7l}{l} = 0.36ql$$

$$\sum Y = R_B + R_A - 3ql - 0.8ql = 0 \quad R_A = 3.44ql$$

## 2. Определяем внутренние усилия:

1-й участок:  $0 \leq z \leq 0,3l$

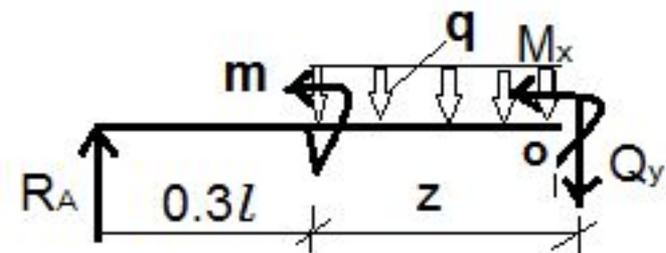


$$\sum y = R_A - Q_y = 0, \quad Q_y = 3.44ql$$

$$\sum m_o = M_x - R_A \cdot z = 0, \quad M_x = 3.44ql \cdot z / 0.3l$$

При  $z=0, \quad M_x=0,$   
 $z=0.3 \quad M_x=1.032ql \quad l^2$

2-й участок:  $0 \leq z \leq 0,3l$



$$\sum y = R_A - q \cdot z - Q_y = 0$$

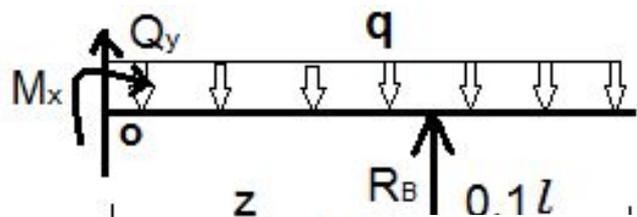
$$Q_y = 3.44ql - q \cdot z / 0.3l$$

$$\sum m_o = M_x - R_A \cdot (0.3l + z) + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$$M_x = 3.44ql \cdot (0.3l + z) - q \frac{z^2}{2} / 0.3l$$

при  $z = 0 \quad Q_y = 3.44ql \quad M_x = 0.968ql^2;$   
 при  $z = 0.3l \quad Q_y = 3.14ql, \quad M_x = 0.019ql^2;$

3-й участок:  $0 \leq z \leq 0,4l$



$$\sum y = R_B - q \cdot (0,1l + z) + Q_y = 0$$

$$Q_y = -0,36ql + q \cdot (0,1l + z)$$

$$M_x = 0,36ql \cdot z - q \cdot \frac{(0,1l + z)^2}{2}$$

$$\sum m_o = -M_x + R_B \cdot z - q \cdot (0,1l + z) \cdot \frac{(0,1l + z)}{2} = 0$$

при  $z = 0$   $Q_y = -0,26ql$   $M_x = -0,005ql^2$

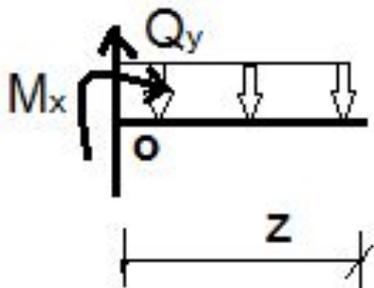
при  $z = 0,4l$   $Q_y = 0,14ql$   $M_x = 0,19ql^2$

Положение точки перехода эпюры  $Q_y$  через ноль (особая точка) определяем из:

$$Q_y = -0,36ql + q \cdot (0,1l + z_1) = 0$$

$$z_1 = 0,36l \quad M_x = 0,238ql^2$$

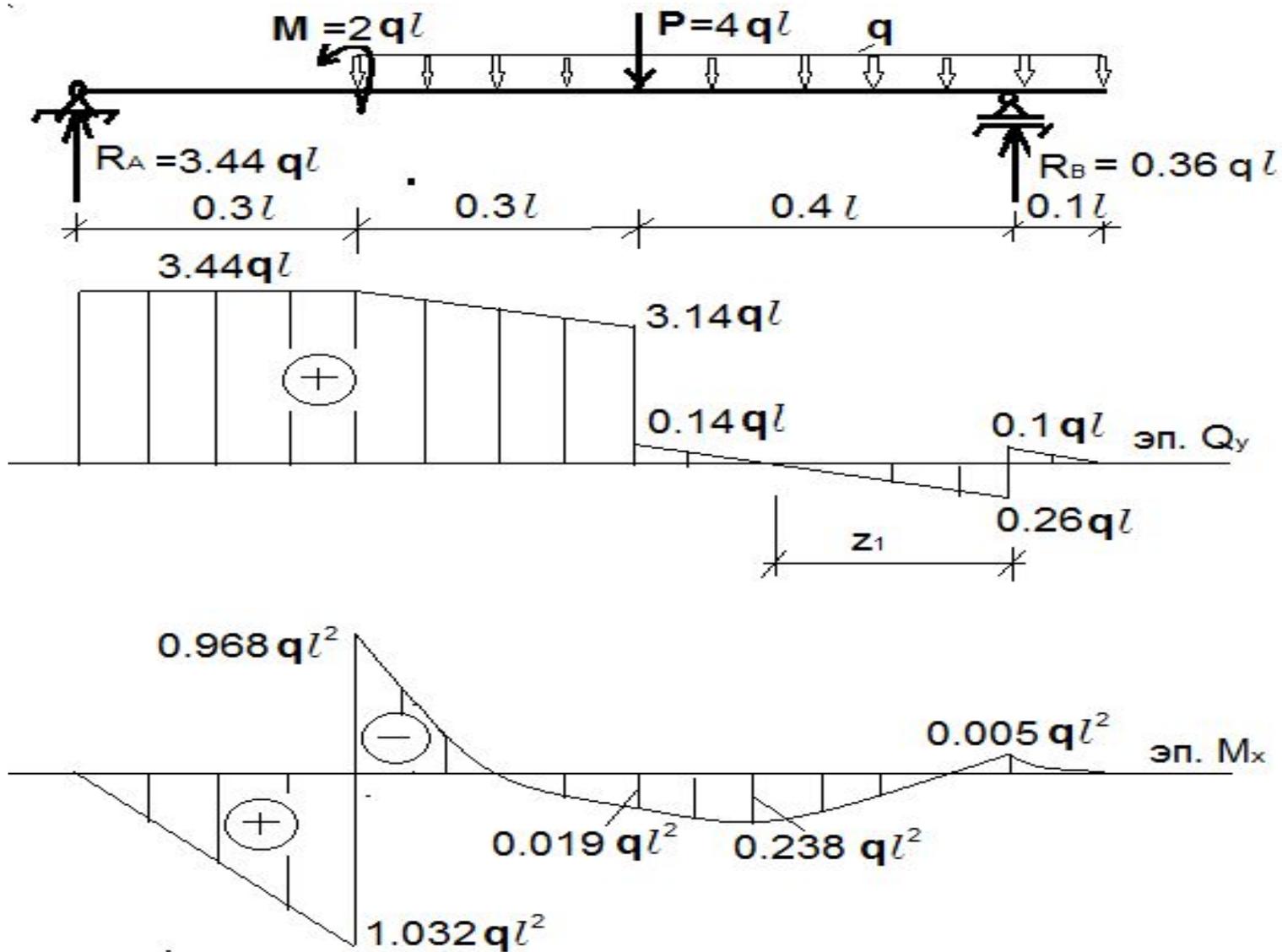
4-й участок:  $0 \leq z \leq 0,1l$



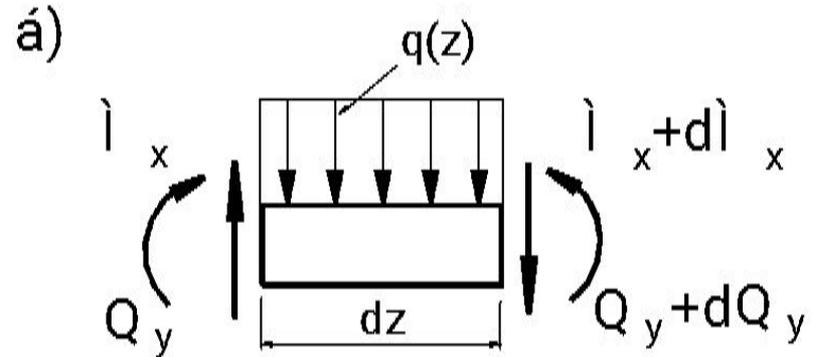
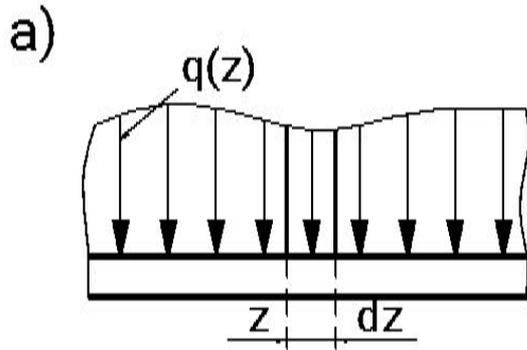
$$\sum y = Q_y - q \cdot z = 0 \quad Q_y = q \cdot z \Big|_{0,1l}^0 /_{0,1ql}$$

$$\sum m_o = -M_x - q \cdot \frac{z^2}{2} = 0 \quad M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2} = \Big|_{0,1l}^0 /_{-0,005ql^2}$$

### 3. Строим эпюры внутренних усилий:



# Дифференциальные зависимости между интенсивностью внешней нагрузки $q(Z)$ , поперечной силой $Q_y$ и изгибающим моментом $M_x$



Из условия равновесия элемента, получаем дифференциальные зависимости:

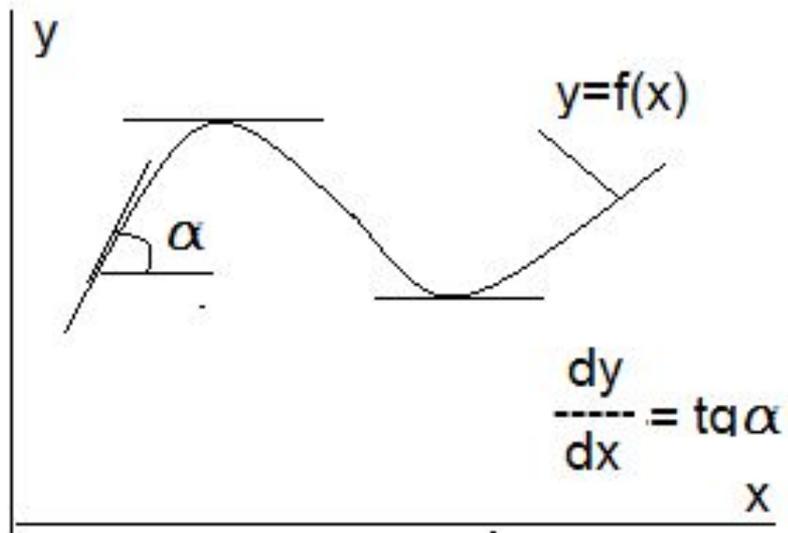
$$\sum y = Q_y - (Q_y + dQ_y) - q \cdot dz = 0 \qquad \frac{dQ_y}{dz} = -q(Z)$$

$$\sum m_{o1} = -M_x + (M_x + dM_x) - Q_y \cdot dz + q \cdot \frac{dz^2}{2} = 0 \qquad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = -q(z) \qquad \frac{d^2 M_x}{dZ^2} = -q(Z)$$

**Дифференциальные зависимости  
Д.И.Журавского при изгибе**

## Правила проверки правильности построенных эпюр $Q_y$ и $M_x$



Так как первая производная от функции есть тангенс угла наклона касательной к графику рассматриваемой функции, то эпюра  $Q_y$  показывает изменение тангенса угла наклона касательной к эпюре  $M_x$ .

- если на участке эпюра  $Q_y$  **положительная**, то эпюра  $M_x$  **возрастает**;
- если на участке эпюра  $Q_y$  **отрицательная**, то эпюра  $M_x$  **убывает**;
- если на участке **нет распределенной нагрузки**  $q(Z)=0$ , то эпюра  $Q_y$  имеет **постоянное значение**, а эпюра  $M_x$  изменяется **по линейному закону**;
- если на участке балки **действует равномерно распределенная нагрузка**  $q(Z)=q$ , то эпюра  $Q_y$  изменяется **по линейному закону**, а эпюра  $M_x$  – **квадратная функция**;

• если на участке эпюра  $Q_y$  **переходит через нуль**, то эпюра  $M_x$  в этом сечении имеет **экстремальное значение**. При этом, если эпюра  $Q_y$  **переходит от положительного к отрицательному значению**, то эпюра  $M_x$  имеет **максимальное значение**, если **от отрицательного к положительному значению**, то эпюра  $M_x$  имеет **минимальное значение**;

- так как **вторая производная** от функции изгибающего момента **имеет отрицательную величину**  $\left( \frac{d^2 M_x}{dZ^2} = -q(Z) \right)$

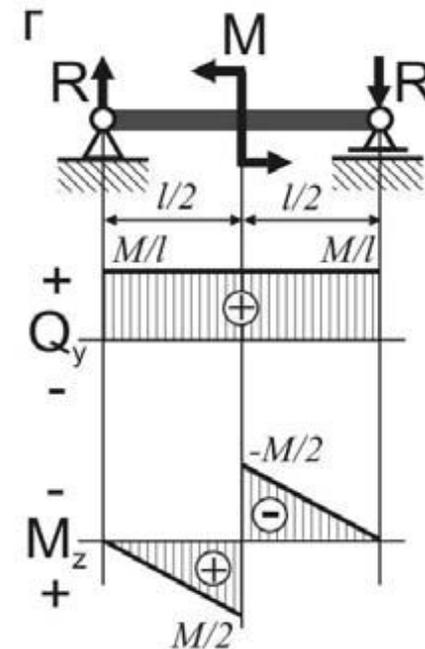
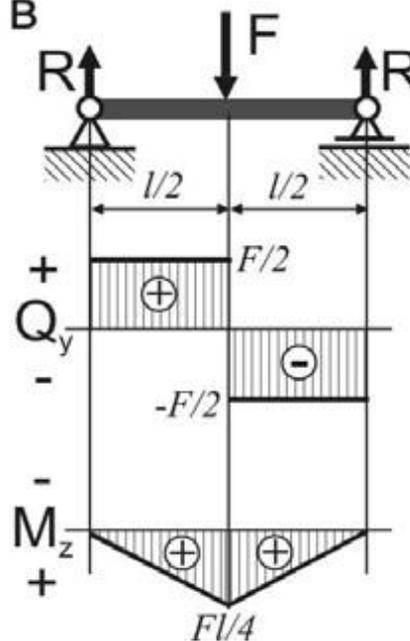
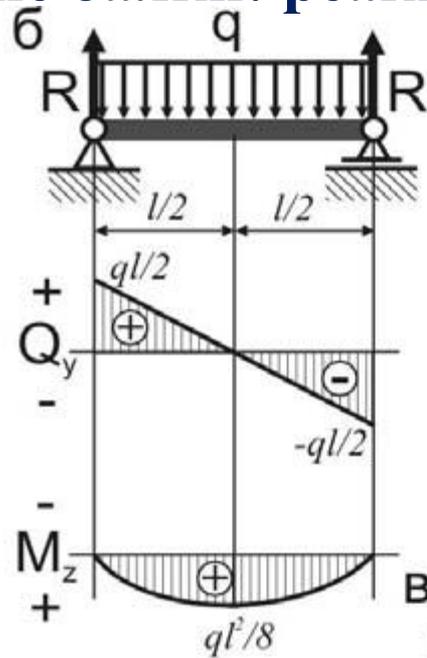
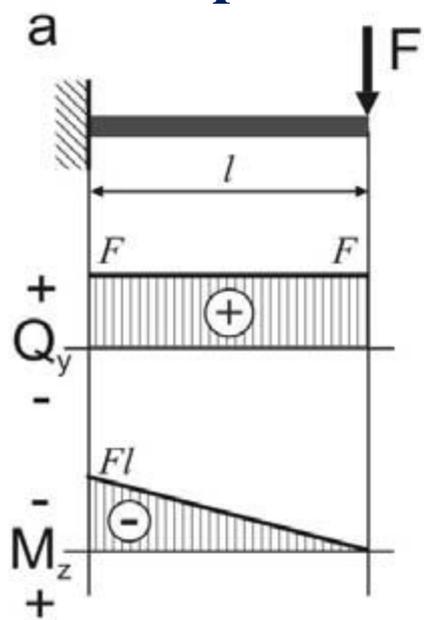
то выпуклость эпюры  $M_x$  **направлена по направлению распределенной нагрузки (правило «паруса»)**;

• в том сечении, где действует **сосредоточенная сила**, эпюра  $Q_y$  **имеет скачок**, равный по величине и по направлению силе  $P$ , а эпюра  $M_x$  **имеет излом** по направлению силы;

• в том сечении, где приложен **сосредоточенный момент**  $M$ , эпюра  $M_x$  **имеет скачок**, равный по величине и по направлению момента  $M$ , а эпюра  $Q_y$  **не меняется**;

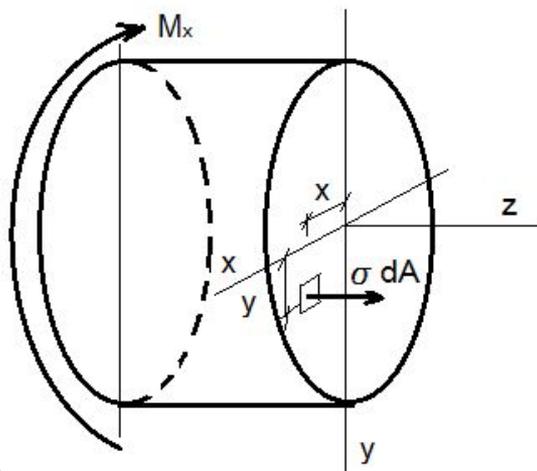
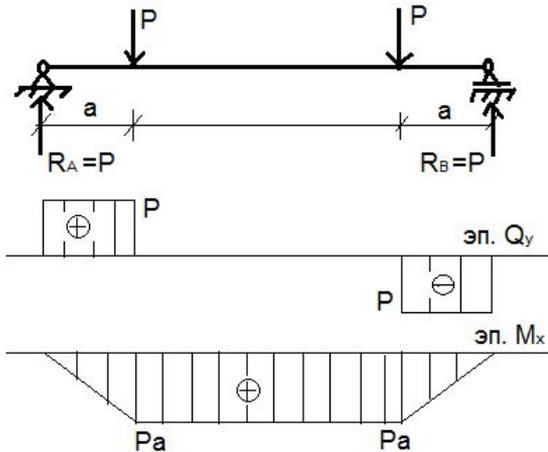
- на защемленном конце балки эюра  $Q_y$  равна величине опорной реакции, а эюра  $M_x$  опорному моменту;
- на шарнирной концевой опоре эюра  $Q_y$  равна опорной реакции, а эюра  $M_x$  равна нулю, если на опоре не приложен сосредоточенный момент;
- на свободном конце консольной балки эюра  $Q_y$  равна нулю, если отсутствует сосредоточенная сила, а эюра  $M_x$  равна нулю, если нет сосредоточенного момента;
- на промежуточной опоре эюра  $Q_y$  имеет скачок, равный по величине и по направлению опорной реакции, а эюра  $M_x$  имеет излом по направлению опорной реакции;
- в промежуточном шарнирном соединении эюра  $M_x$  равна нулю, если нет сосредоточенного момента, а эюра  $Q_y$  равна внутренним усилиям в шарнире.
- на участке, где эюра поперечных сил  $Q_y$  равна нулю, а эюра изгибающих моментов постоянная балка испытывает деформацию чистого изгиба.

# Простейшие балки: реакции опор и эпюры $Q_y$ и $M_x$



# Определение нормальных напряжений в балке при **чистом изгибе**

Если в пределах рассматриваемого участка балки действуют только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю, балка на этом участке испытывает деформацию чистого изгиба.

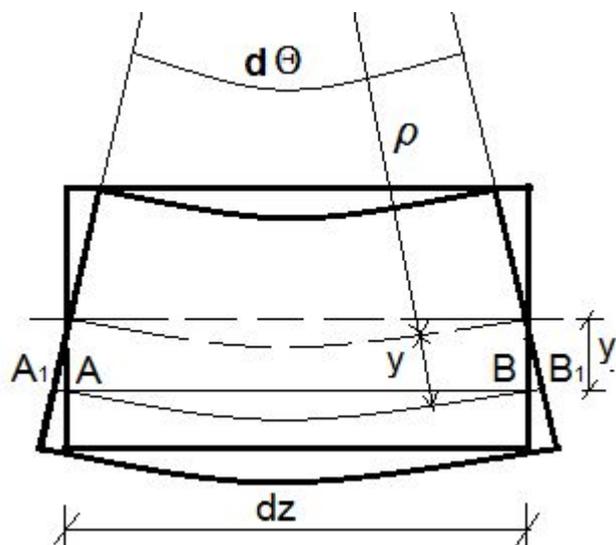


Рассматривая равновесие вырезанного элемента балки получим:

$$\sum y \equiv 0 \quad \sum x \equiv 0 \quad \sum z = \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

$$\sum m_x = -M_x + \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = 0 \quad M_x = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$\sum m_y = \int_A x \cdot \sigma \cdot dA = 0 \quad \sum m_z \equiv 0$$



Для получения функции распределения нормальных напряжений по поперечному сечению балки рассмотрим деформированную схему бесконечно малого элемента длиной  $dz$ . Волокна А-В длиной  $dz$  при деформировании принимают положение дуги А<sub>1</sub>-В<sub>1</sub> длиной

$$d\check{s} = (\rho + y) \cdot d\theta \quad d\check{Z} = \rho \cdot d\theta$$

$$\Delta d\check{s} = \Delta d\check{Z} = d\check{s} - d\check{Z}$$

Относительное линейное удлинение волокна А-В равно

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{dz} = \frac{y \cdot d\theta}{dz} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{y \cdot d\theta}{dz} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot y$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{y}$$

Поставляя значение напряжения в уравнениях равновесия получаем:

$$\frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot S_x = 0$$

отсюда видно, что статический момент инерции относительно оси  $x$  равен нулю  $S_x = 0$ , следовательно ось  $x$  проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.

$$\frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA = \frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot I_{xy} = 0$$

отсюда видно, что центробежный момент инерции относительно осей  $x, y$  равен нулю  $I_{xy} = 0$ , следовательно оси  $x$  и  $y$  являются главными осями инерции поперечного сечения балки.

$$M_x = \frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot \int_A y^2 \cdot dA = \frac{d\theta}{dz} \cdot E \cdot I_x = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{y} \cdot E \cdot I_x = \frac{\sigma}{y} \cdot I_x$$

отсюда имеем:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$$

Из формулы видно, что нормальные напряжения по высоте сечения балки меняются линейно и наибольших значений достигают в крайних верхних и нижних волокнах:

следовательно:

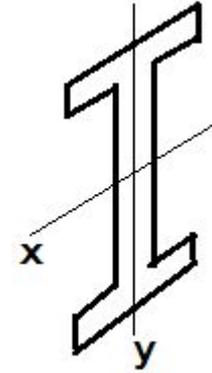
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{M_X \cdot y_{\max/\min}}{I_X}$$

Осевой момент сопротивления сечения балки равен

$$W_x = \frac{I_X}{y_{\max/\min}}$$
$$W'_x = \frac{I_X}{y_{\max}} \quad W''_x = \frac{I_X}{y_{\min}} \quad \sigma_{\max/\min} = \pm \frac{M_X}{W_X}$$

## Условие прочности балки с сечением с двумя осями симметрии:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x^{\min}} \leq [\sigma]$$



**Типовые задачи:**

**1. Проверочный расчет:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x^{\min}} \leq [\sigma]$$

**2. Проектировочный (конструкционный) расчет (подбор сечения):**

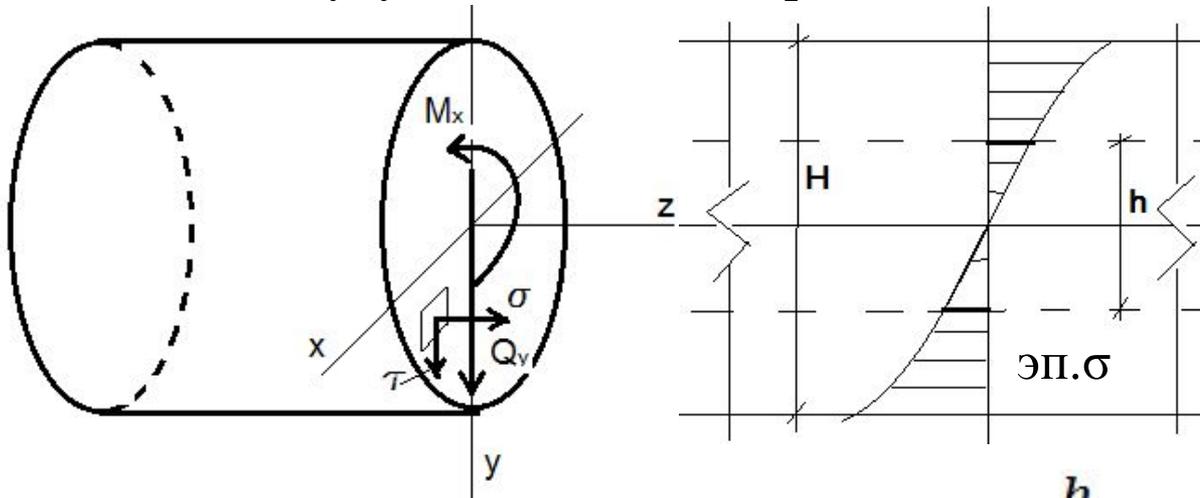
$$W_x^{\text{тр}} \geq \frac{M_x}{[\sigma]}$$

**3. Проектный расчет (несущая способность):**

$$M_x^{\text{доп}} \leq [\sigma] \cdot W_x$$

## Плоский поперечный изгиб балки

При плоском изгибе балки, в общем случае, в поперечном сечении балки возникают поперечные силы  $Q_y$  и изгибающие моменты  $M_x$ , следовательно в этих сечениях будут действовать нормальные и касательные напряжения.



Если отношение высоты балки к её длине

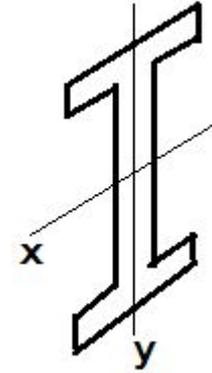
$$\frac{h}{l} = \left( \frac{1}{6} \div \frac{1}{10} \right)$$

тогда нормальные напряжения могут с достаточной точностью могут быть определены по формуле полученной при чистом изгибе

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$$

# Условие прочности балки по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x^{\min}} \leq [\sigma]$$



**Типовые задачи:**

**1. Проверочный расчет:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x^{\min}} \leq [\sigma]$$

**2. Проектировочный (конструкционный) расчет (подбор сечения):**

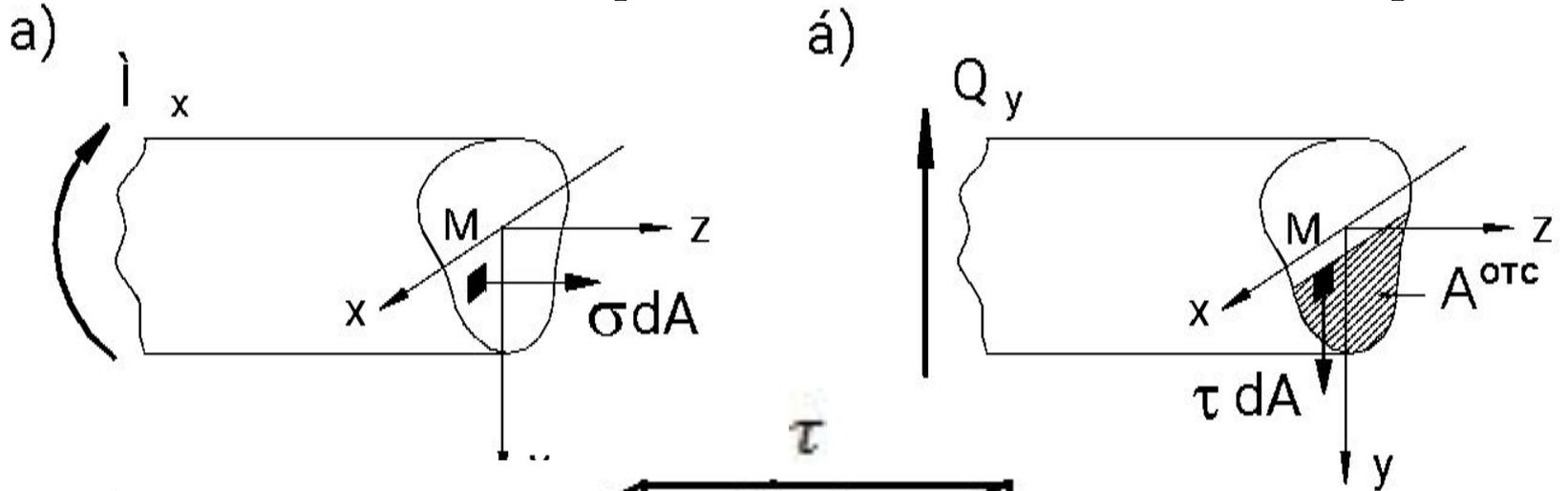
$$W_x^{\text{тр}} \geq \frac{M_x}{[\sigma]}$$

**3. Проектный расчет (несущая способность):**

$$M_x^{\text{доп}} \leq [\sigma] \cdot W_x$$

# Определение касательных напряжений в сечении балки

Когда в балке действуют и изгибающий момент и поперечная сила, в сечении балки возникают и нормальные –  $\sigma$  и касательные –  $\tau$  напряжения.



$$\int_{A^{отс}} \sigma \cdot dA$$

$$\int_{A^{отс}} (\sigma + d\sigma) \cdot dA$$

$$\sum Z = - \int_{A^{отс}} \sigma \cdot dA + \int_{A^{отс}} (\sigma + d\sigma) \cdot dA - \tau \cdot b_y \cdot dz = 0$$

Отсюда получаем  $\tau = \int_{A^{отс}} \frac{d\sigma \cdot dA}{b_y dz}$  заменяем  $d\sigma = \frac{dM_x \cdot y}{I_x}$

$\tau = \int_{A^{отс}} \frac{dM_x \cdot y}{dz \cdot I_x \cdot b_y} dA$  заменяем  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$

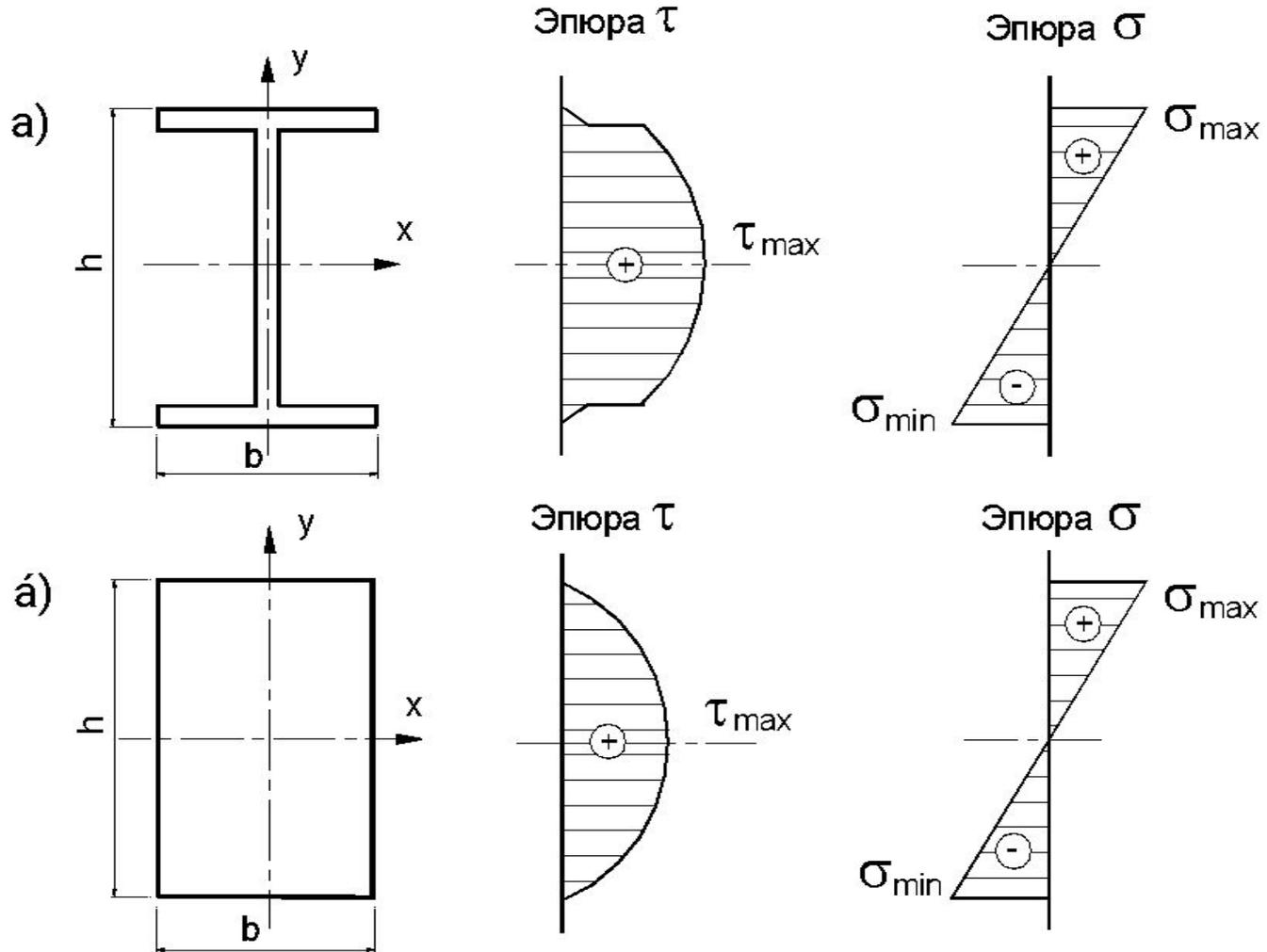
$\tau = \frac{Q_y}{I_x \cdot b_y} \int_{A^{отс}} y \cdot dA = \frac{Q_y \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot b_y}$  - формула Журавского

$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{пол}}{I_x \cdot b_y}$

$S_x^{отс}$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси  $X$ ;

$S_x^{пол}$  – статический момент половины площади сечения относительно нейтральной оси  $X$ .

# Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений для прямоугольного и двутаврового сечений



# Полная проверка прочности

## Опасные сечения и опасные точки

Для проверки на прочность при изгибе строят эпюры изменения внутренних усилий ( $M_x$ ,  $Q_y$ ) по ее длине и определяют опасные сечения балки. При полной проверке прочности таких сечений будет, как минимум, три (иногда они совпадают):

- 1) сечение, в котором изгибающий момент  $M_z$  достигает своего максимального по модулю значения, – именно по этому сечению подбирают сечение всей балки;
- 2) сечение, в котором поперечная сила  $Q_y$  достигает своего максимального по модулю значения;
- 3) сечение, в котором и изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q_y$  достигают по модулю достаточно больших величин.

В каждом из опасных сечений необходимо, построив эпюры напряжений, найти опасные точки (проверка прочности проводится для каждой из них), которых также будет, как минимум, три:

- 1) точка, в которой нормальные напряжения  $\sigma_x$  достигают своего максимального значения, – то есть точка на наружной поверхности балки наиболее удаленная от нейтральной оси сечения;
- 2) точка, в которой касательные напряжения  $\tau_{xy}$  достигают своего максимального значения, – точка, лежащая на нейтральной оси сечения;
- 3) точка, в которой и нормальные напряжения  $\sigma_x$  и касательные напряжения  $\tau_{xy}$  достигают достаточно больших величин (эта проверка имеет смысл для сечений типа тавра или двутавра, где ширина резко изменяет свое значение).

# Проверка прочности элементов, работающих на прямой поперечный изгиб по различным теориям прочности

При плоском поперечном изгибе балки в том сечении, где одновременно действуют большие значения изгибающего момента и поперечной силы, главные напряжения в особых точках сечения балки, где одновременно возникают достаточно большие значения  $\sigma$  и  $\tau$ , будут иметь большие значения. Тогда возникает необходимость проверки прочности материала балки по различным теориям.

В любой точке сечения балки главные напряжения будут определены по:

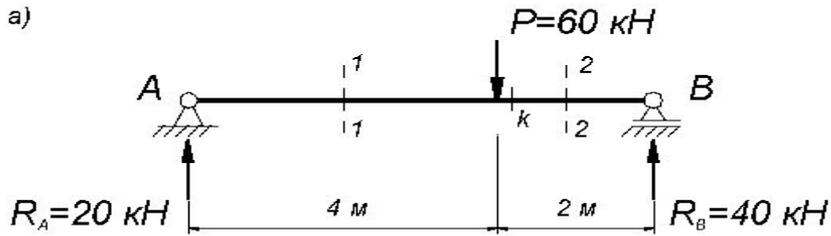
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad - \text{ главные растягивающие напряжения,}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad - \text{ главные сжимающие напряжения,}$$

где  $\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}, \quad \tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{отс}}{I_x \cdot b_y}.$

Направления главных напряжений определяются:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma},$$

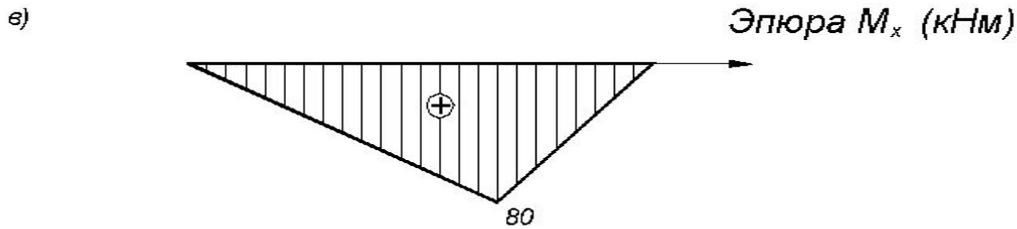
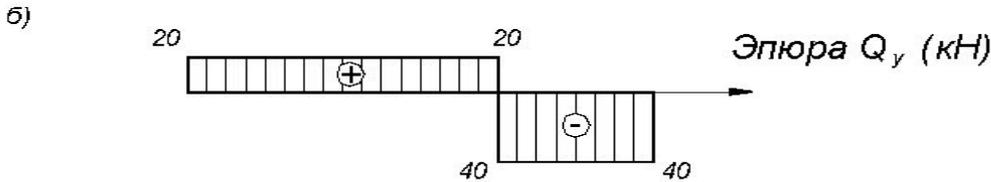


Нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$$

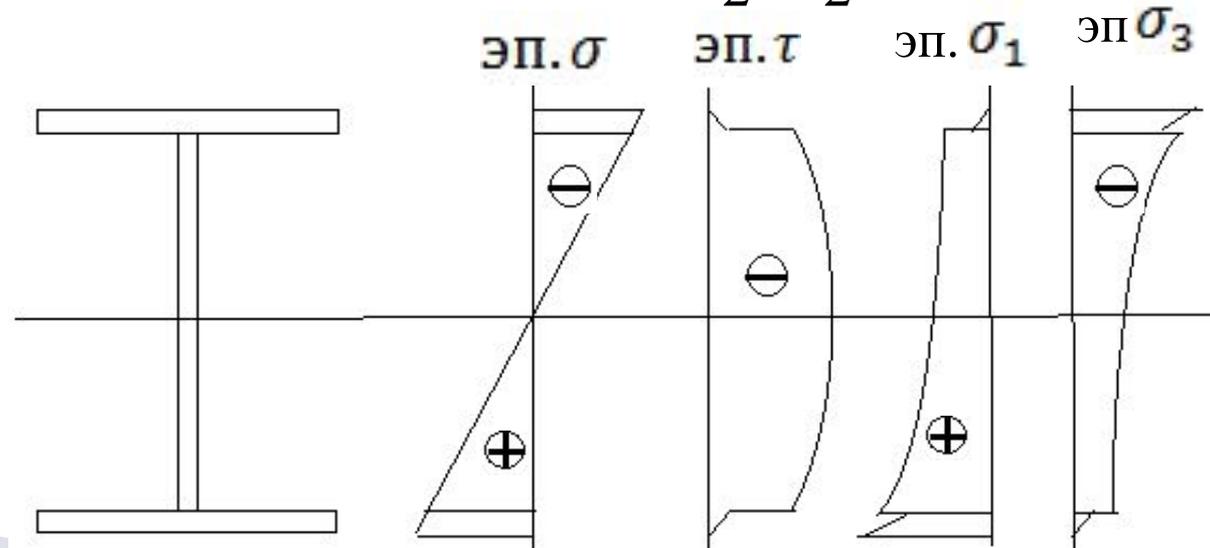
Касательные напряжения

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b_y}$$



Главные напряжения в окрестности соответствующих точек:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$



**Проверка прочности балки  
по третьей и четвертой теориям:**

**По теории наибольших касательных напряжений:**

$$\sigma_{\text{экв}_3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

**По теории Мора:**

$$\sigma_{\text{экв}_3}^M = \frac{1-p}{2}\sigma + \frac{1+p}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

где  $p = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{сж}}]}$

**По энергетической теории:**

$$\sigma_{\text{экв}_4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$