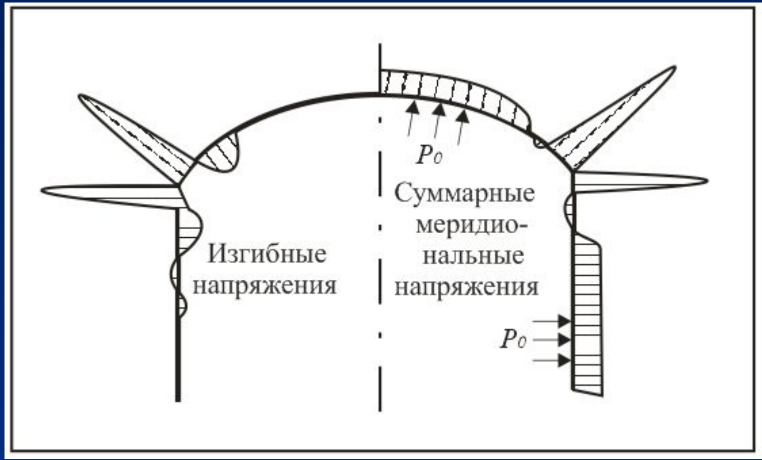
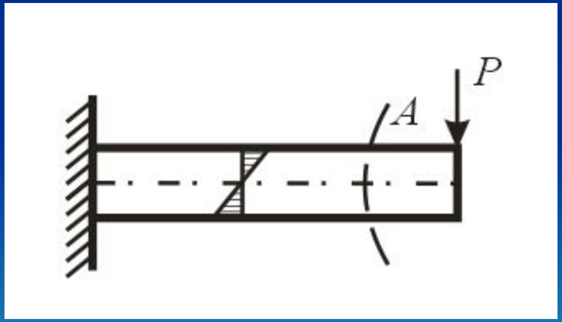
Основные гипотезы линейной теории упругости

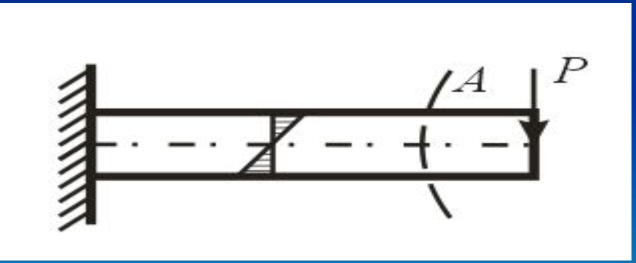
1. Среда заполняет тело сплошным образом и не меняет свою непрерывность в процессе приложения нагрузок.
2. До приложения нагрузок начальные напряжения в теле равны нулю.
3. Напряжения в теле, возникающие после приложения нагрузок, связаны линейной зависимостью с деформациями..
4. Перемещения тела малы по сравнению с линейными размерами тела.
5. Относительные деформации и углы сдвига в материале малы по сравнению с единицей

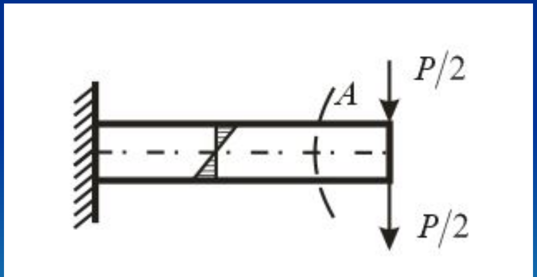
Принцип Сен-Венана

Если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие от места приложения нагрузок





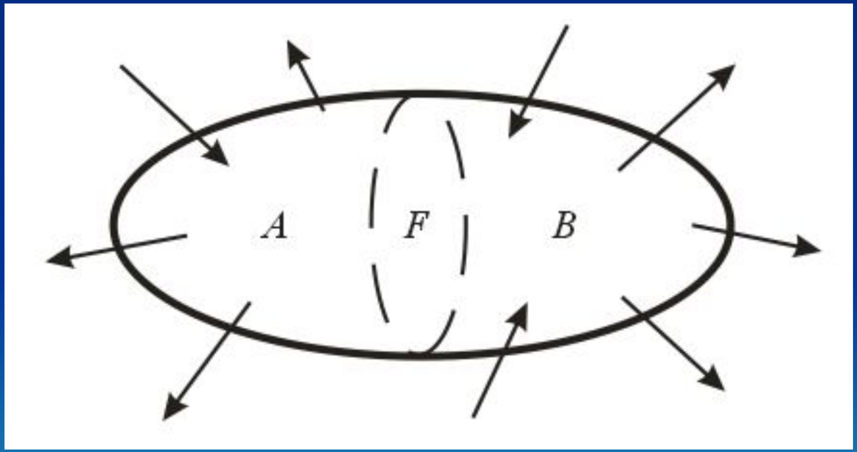


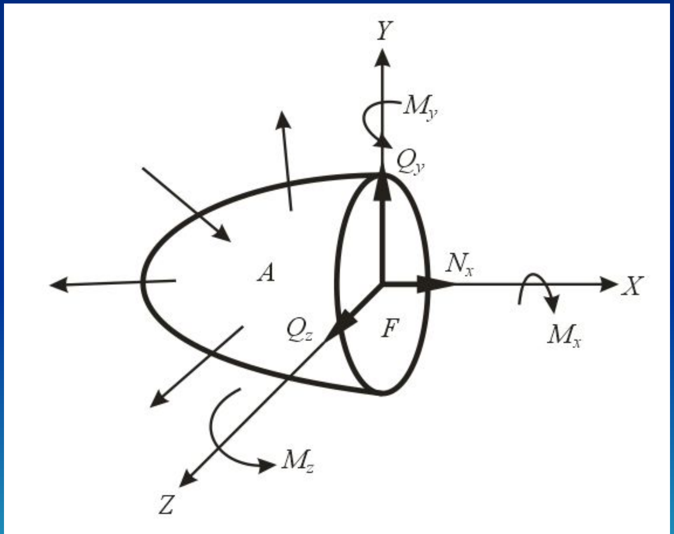


1. Теория напряжений

Напряжения и нагрузки

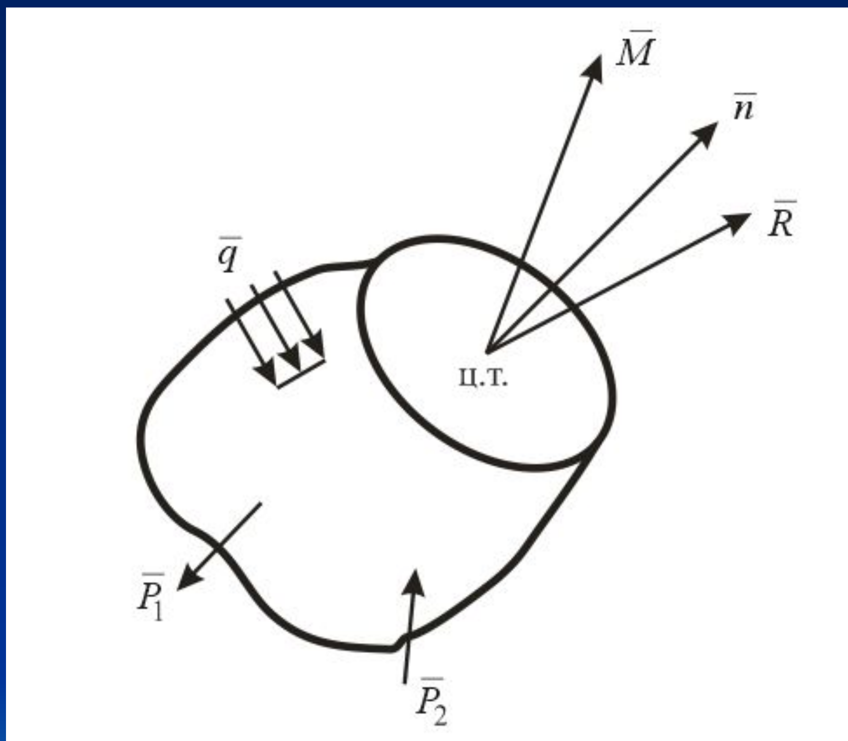
1. поверхностные;
2. сосредоточенные силы;
3. объемные.

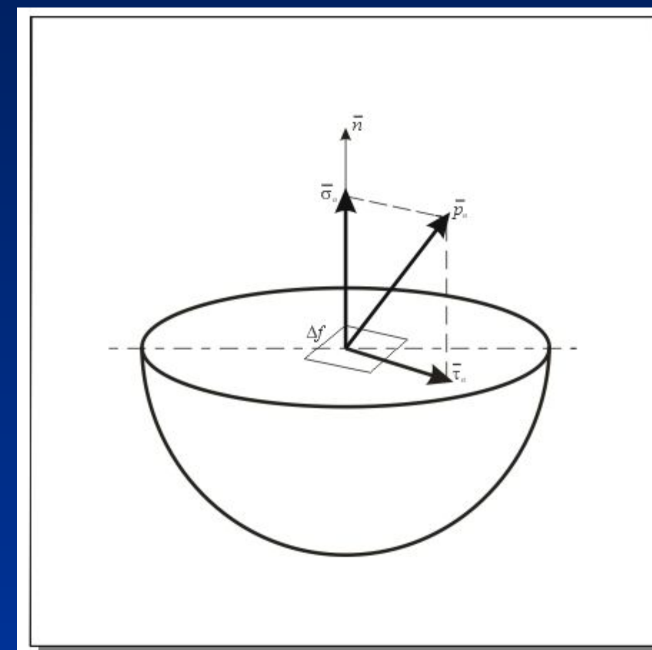




$$\overline{P}_n = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta \overline{t}}{\Delta f}$$

Составляющие полного вектора напряжений



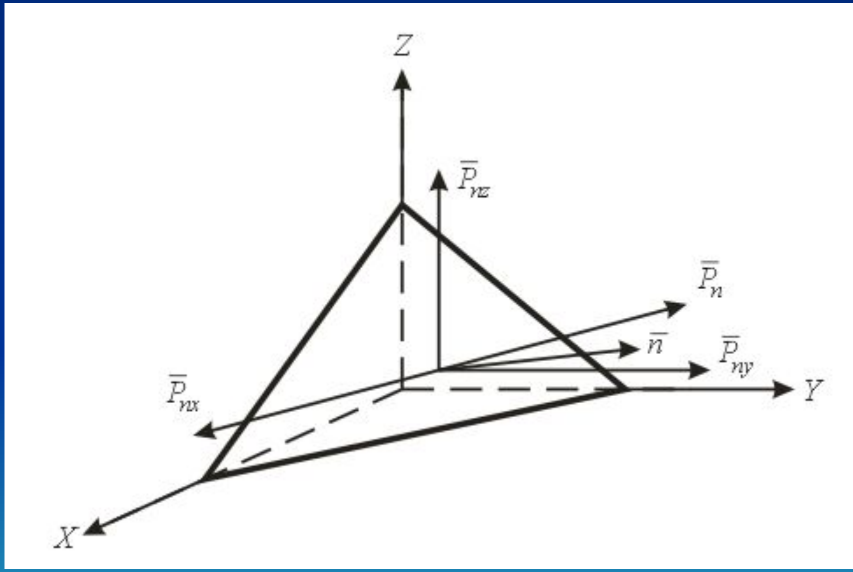


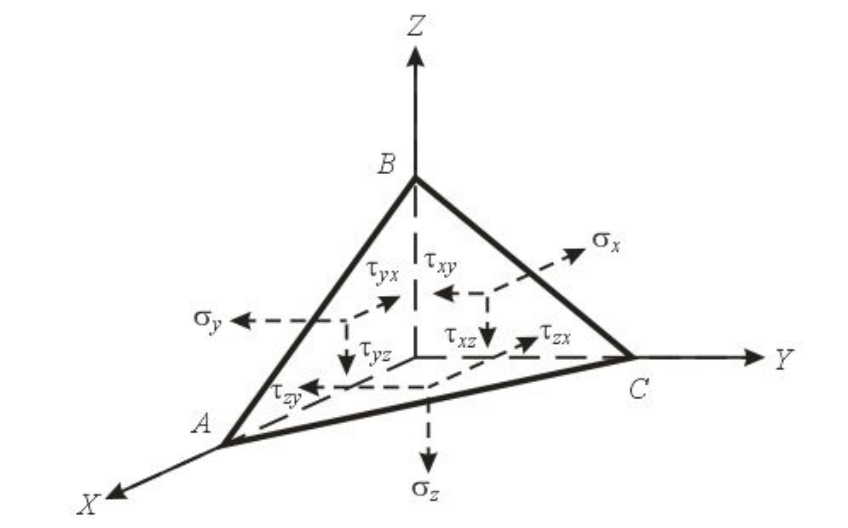
$$\overline{P}_n = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta \overline{t}}{\Delta f}$$

Напряжения на наклонной площадке

- Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение и в этом случае его направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке.

- Касательные напряжения положительны, если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением координатной оси (положительным или отрицательным соответственно), а направлены они в сторону соответствующей этому направлению координатной оси (положительной или отрицательной соответственно).





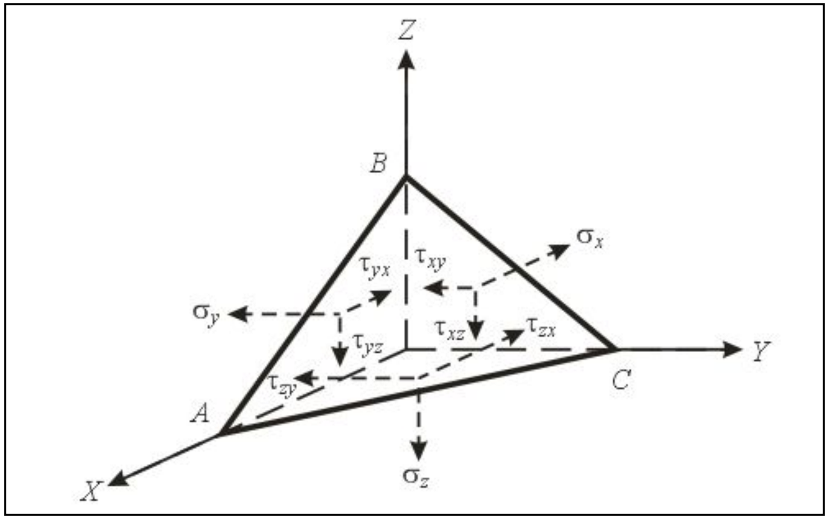
Напряжения на наклонной площадке

$$-\frac{1}{2}dydz\sigma_x - \frac{1}{2}dxdz\tau_{yx} - \frac{1}{2}dxdy\tau_{zx} + dfP_{nx} = 0$$

$$\frac{1}{2}dydz = df \cdot \cos(n,x)$$

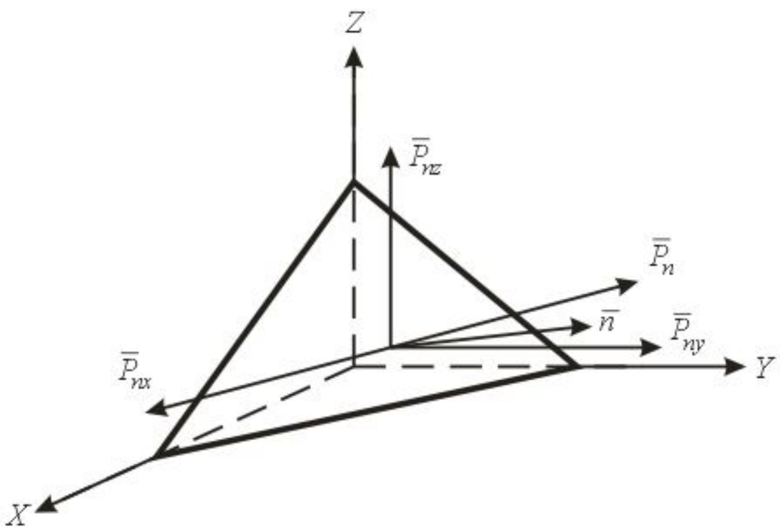
$$\frac{1}{2}dxdz = df \cdot \cos(n,y)$$

$$\frac{1}{2}dxdy = df \cdot \cos(n,z)$$



$$P_{nx} = \sigma_x \cdot \cos(n,x) + \tau_{yx} \cdot \cos(n,y) + \tau_{zx} \cdot \cos(n,z)$$

Граничные условия



$$n_x = \cos(n, x), \quad n_y = \cos(n, y),$$

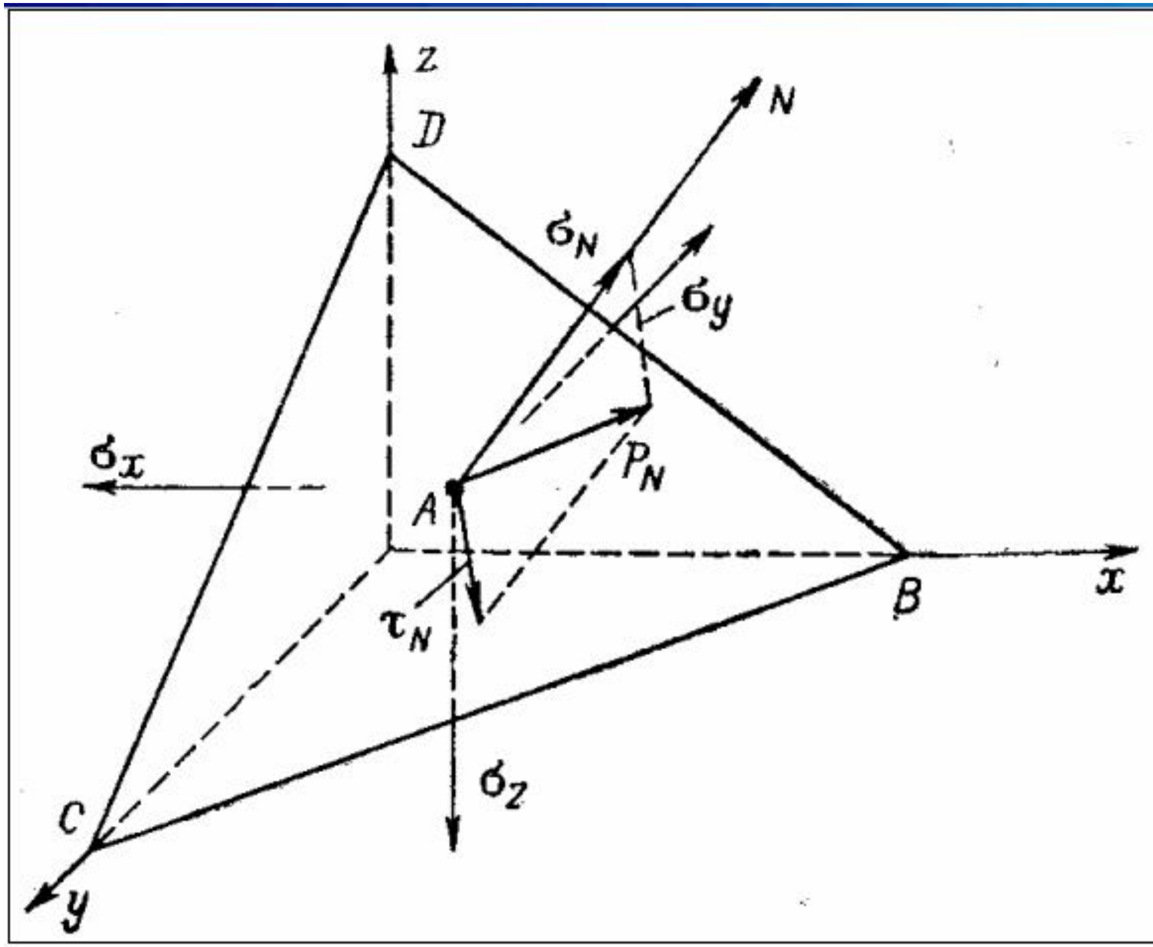
$$n_z = \cos(n, z)$$

$$P_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z$$

$$P_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z$$

$$P_{nx} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

Напряжения на наклонной площадке



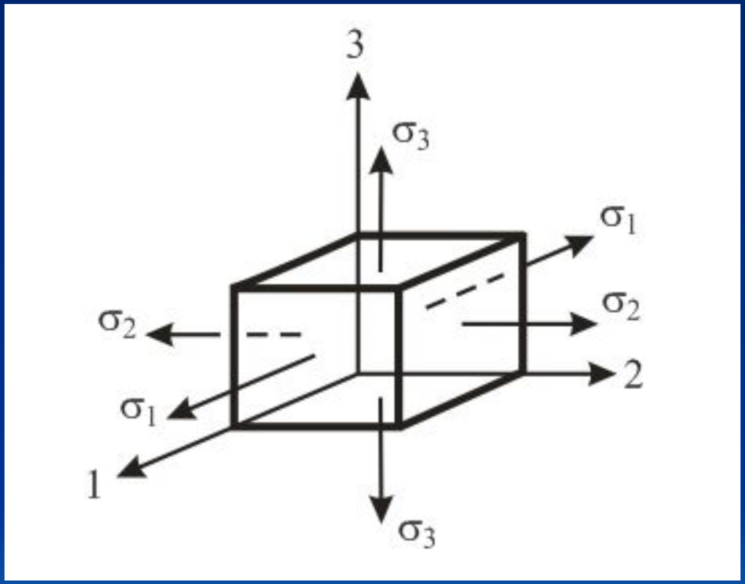
Главные напряжения

Главными называются такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения , а касательные равны нулю.

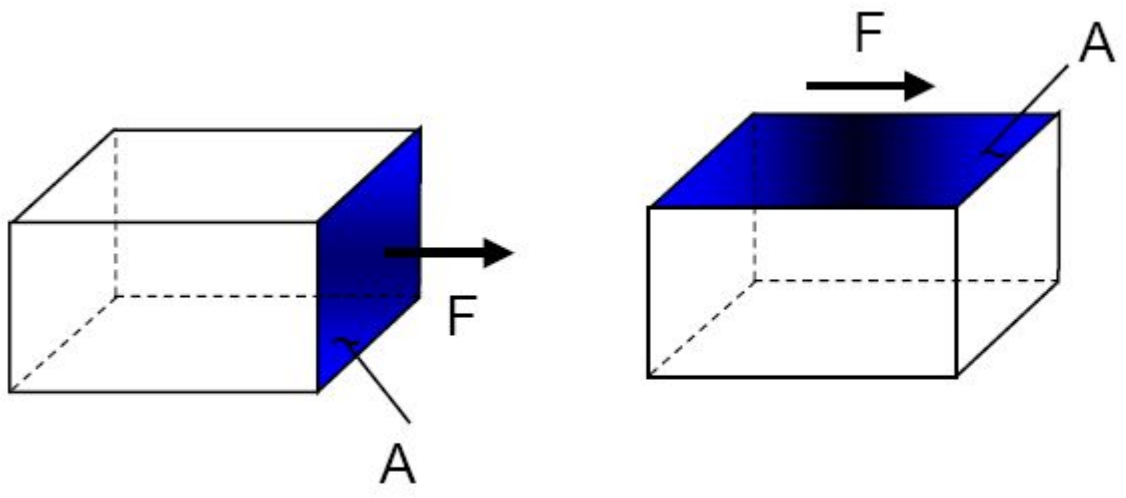
$$P_{nx} = \sigma_n n_x$$
$$P_{ny} = \sigma_n n_y$$
$$P_{nz} = \sigma_n n_z$$
$$(\sigma_x - \sigma_n) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0$$
$$\tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma_n) n_y + \tau_{zy} n_z = 0$$
$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \sigma_n) n_z = 0$$
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$
$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Главные напряжения



Напряжения

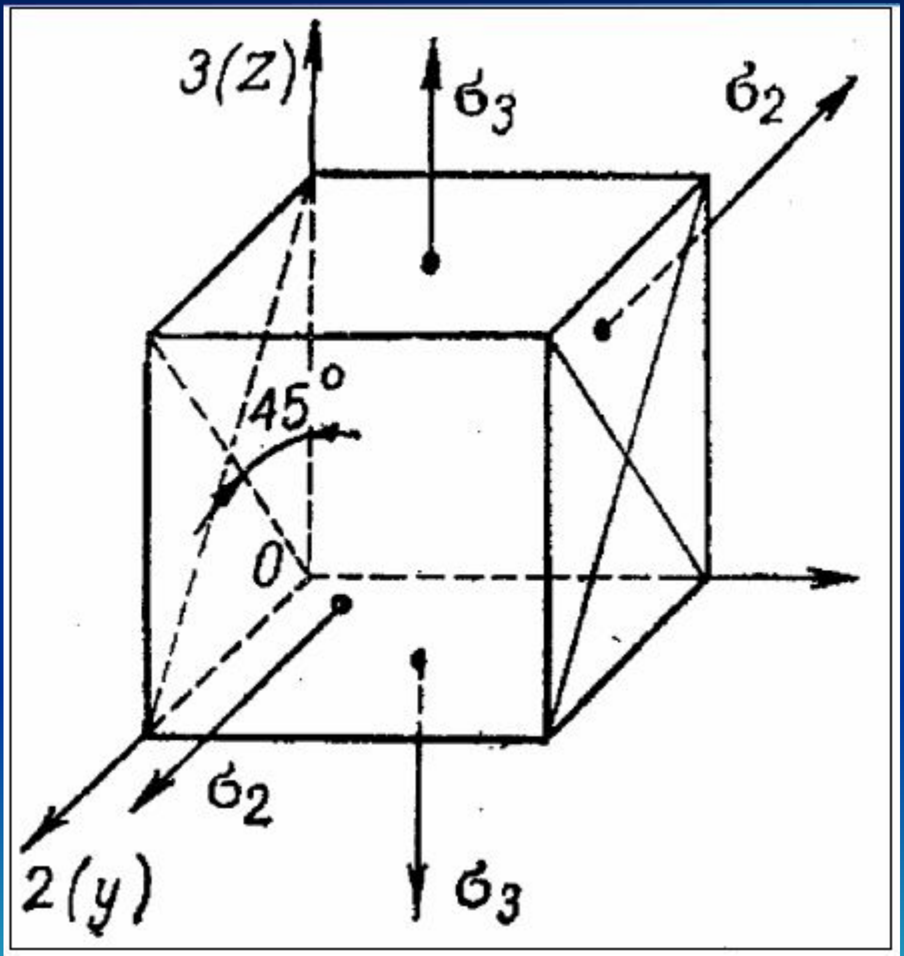


Нормальные

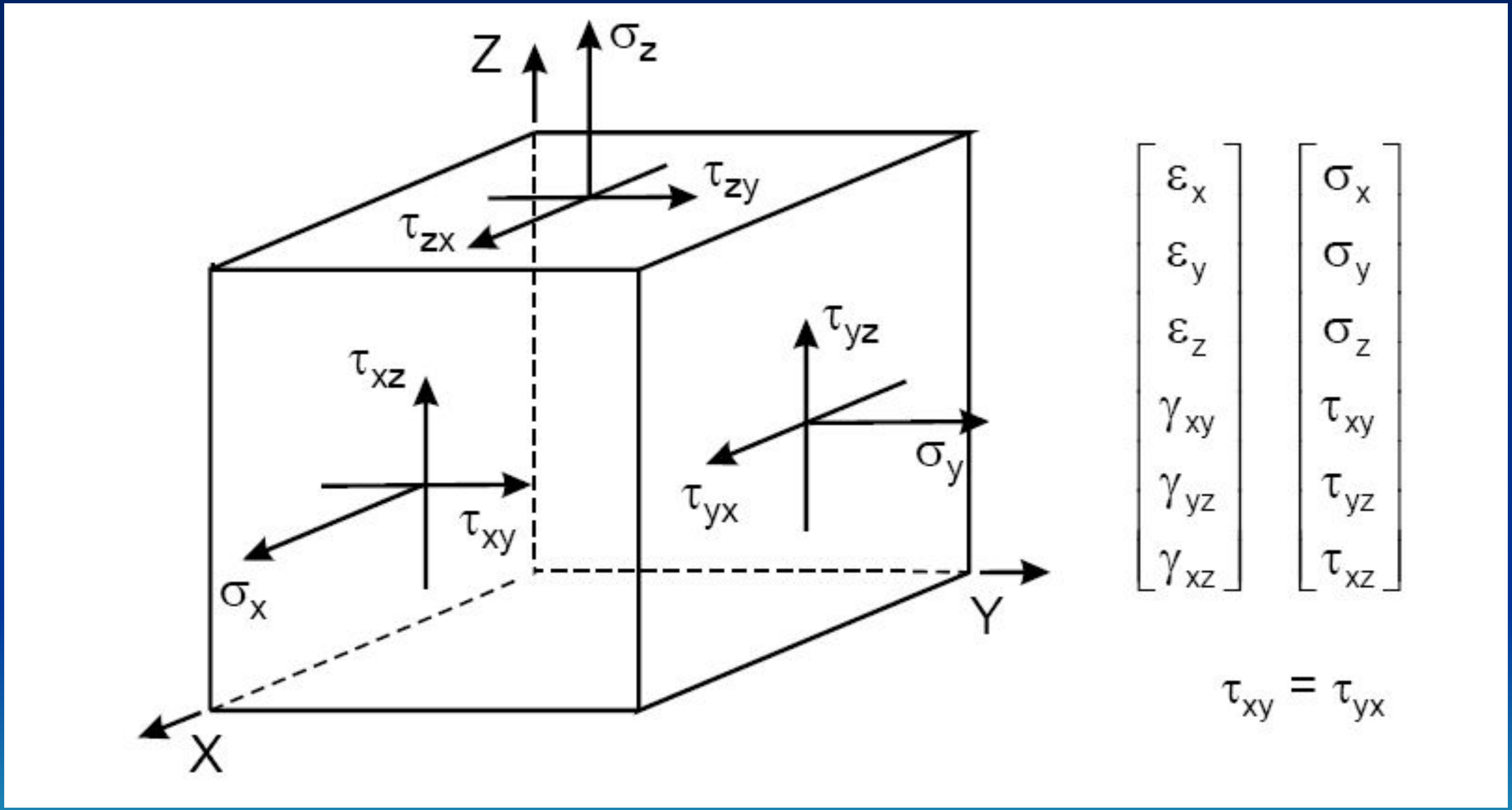
Касательные

$$S = \lim_{A \to 0} \frac{F}{A}$$

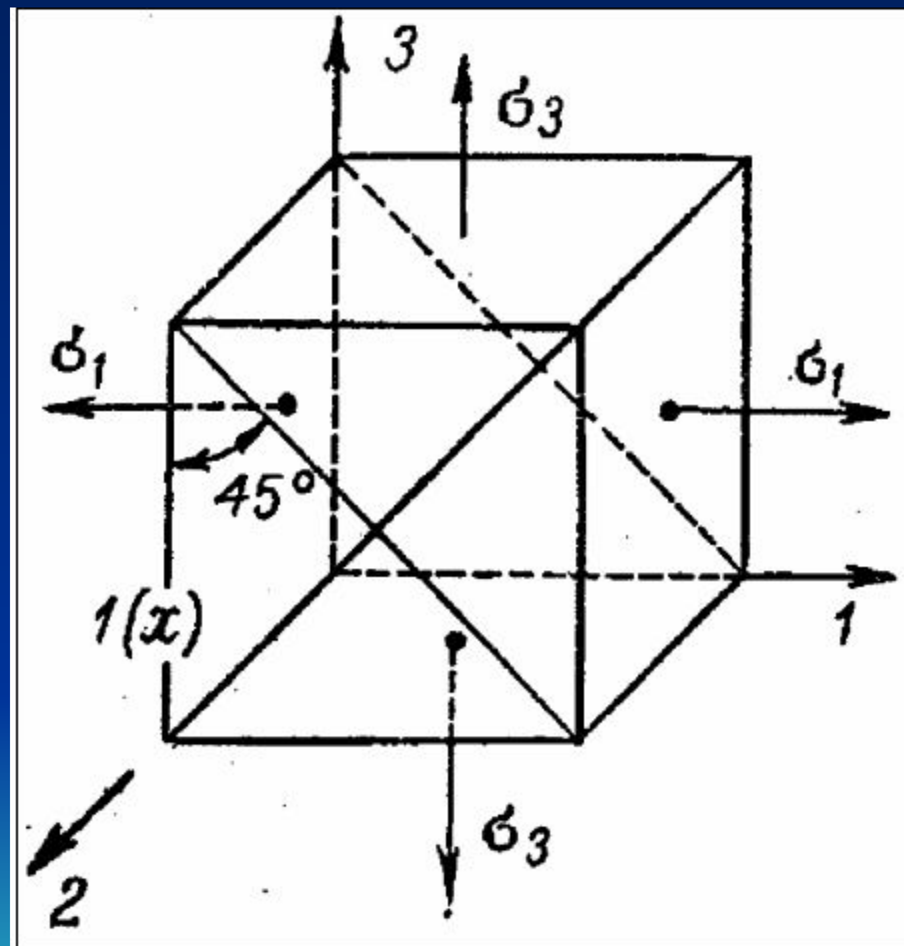
Главные напряжения



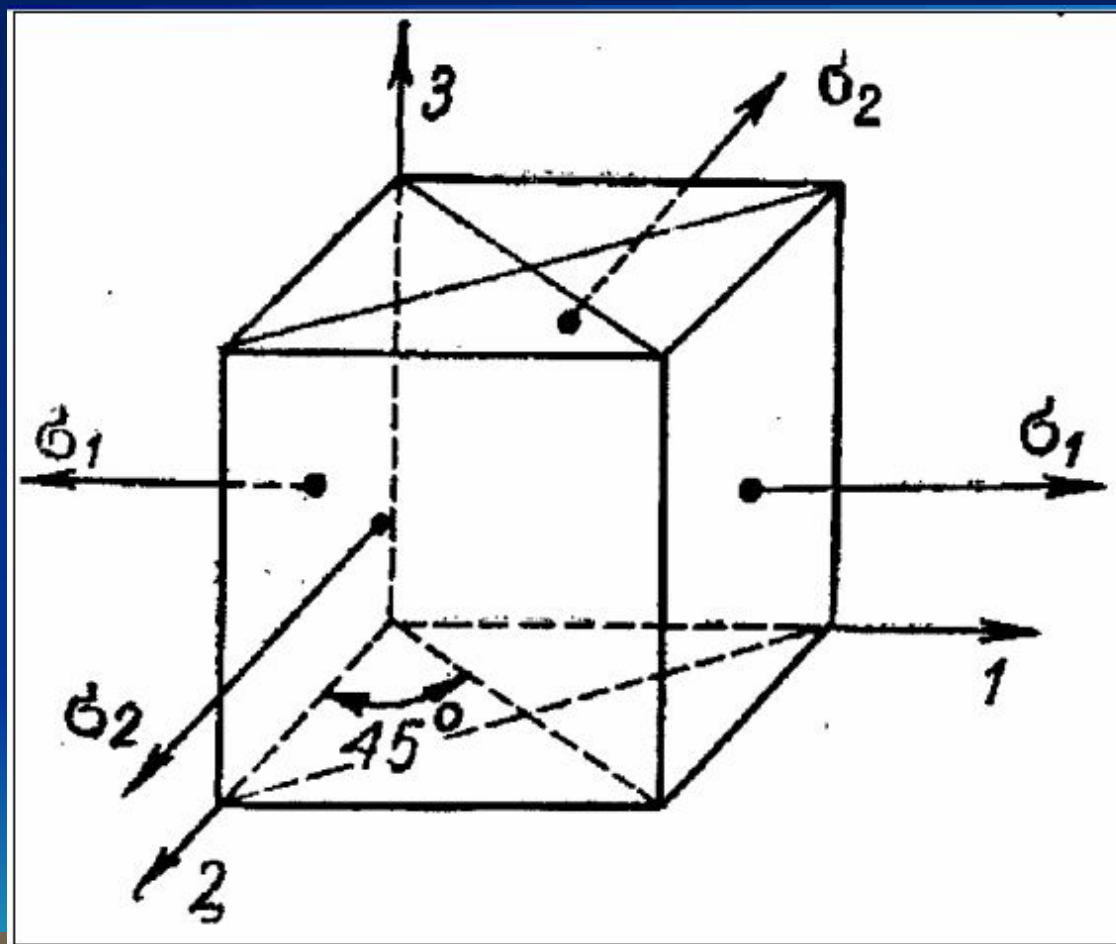
Тензор напряжений



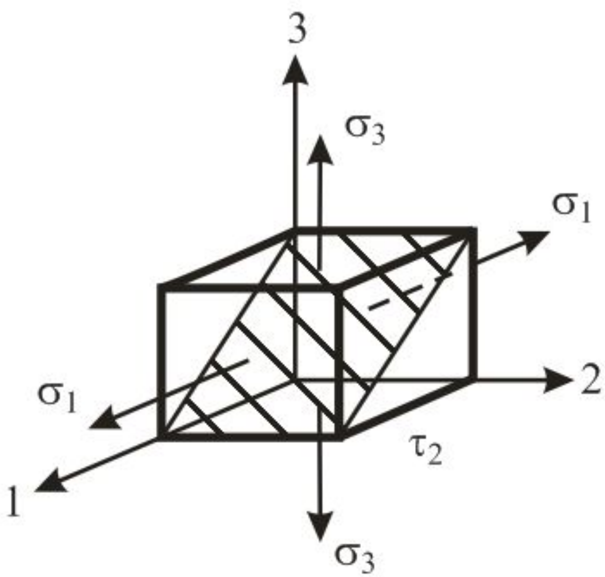
Главные напряжения



Главные напряжения

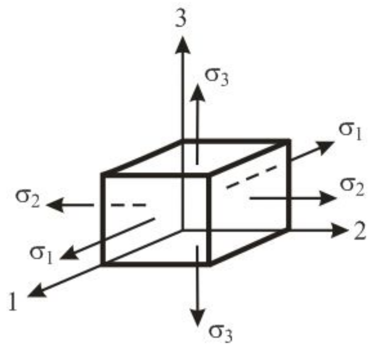


Свойства главных напряжений



1. Из всех нормальных напряжений , действующих на наклонных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим являются соответствующие главные напряжения;
2. Из всех полных напряжений, действующих на наклонных площадках, наибольшими и наименьшими по абсолютному значению являются также соответствующие главные напряжения
3. Наибольшие касательные напряжения равны $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и действуют в площадках, наклоненных под углом в 45° к главным площадкам

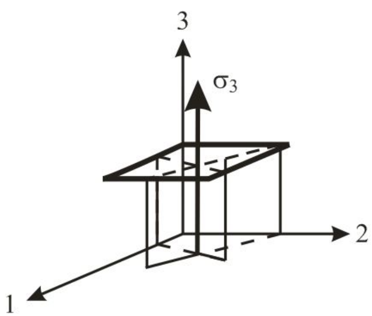
Свойства главных площадок



$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$$

площадки взаимно перпендикулярны и различны

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$$



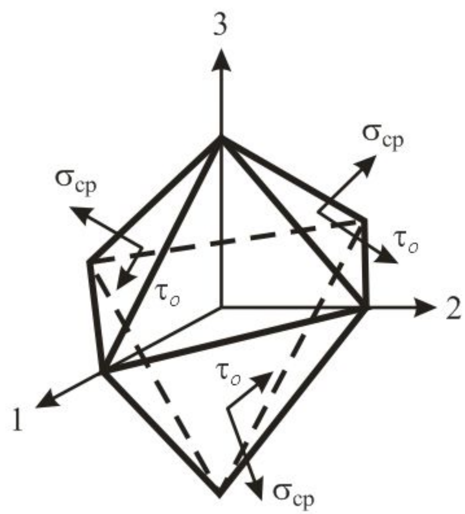
имеется одна площадка, соответствующая , и бесчисленное множество площадок перпендикулярных ей, на которых действуют напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

на всех площадках действуют лишь нормальные напряжения и тело находится в ней в условиях всестороннего растяжения (сжатия).

Октаэдрические площадки

Площадки, равнонаклоненные к главным площадкам, называются октаэдрическими, На них действуют средние напряжения.



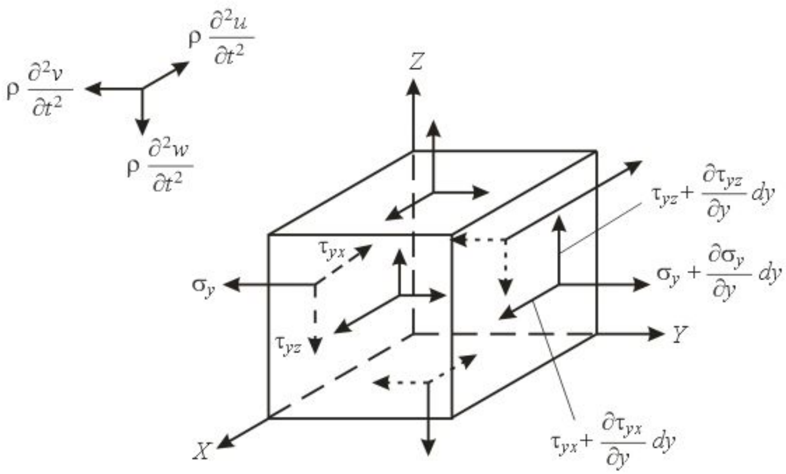
$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}$$

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_o$$

Интенсивность напряжения — приведенное расчетное напряжение

2. Уравнения равновесия



$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dydx-$$

$$\tau_{zx}dydx+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx-$$

$$\tau_{yx}dzdx+\left(X-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)dxdydz=0$$

$$V=dxdydz$$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Уравнения равновесия в проекции на оси координат

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Уравнения моментов относительно осей

Вычислим сумму моментов относительно оси X. Полагаем, что равнодействующая внутреннего усилия, соответствующего рассматриваемому напряжению, находится в центре грани параллелепипеда

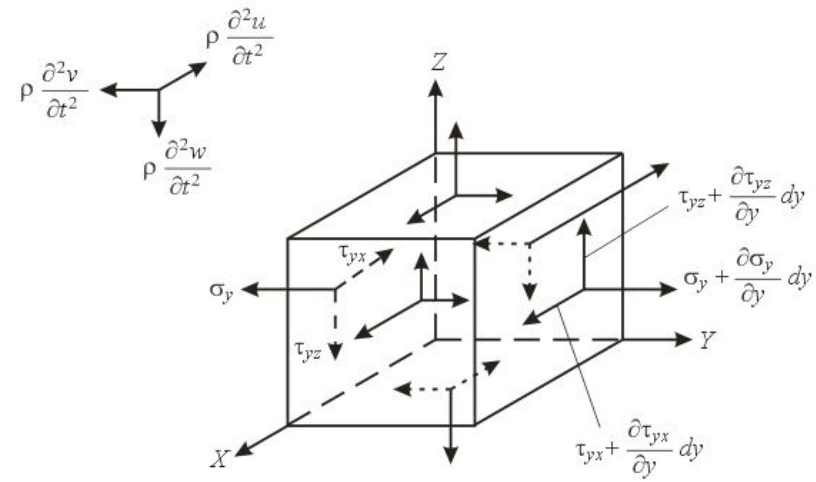
$$-\tau_{xz}dydz\frac{dy}{2}+\tau_{xy}dydz\frac{dz}{2}+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dydz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dydz\frac{dz}{2}-$$

$$-\sigma_z dydx\frac{dy}{2}+\left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right)dydx\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dydxdz+$$

$$+\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dzdx\frac{dz}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dzdxdy-$$

$$-\sigma_y dzdx\frac{dz}{2}+Zdxdydz\cdot\frac{dy}{2}-Ydxdydz\frac{dz}{2}+$$

$$+\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dxdydz\frac{dz}{2}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dxdydz\frac{dy}{2}=0$$



Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Компоненты касательных напряжений, расположенные в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены по перпендикуляру к линии пересечения этих площадок. При этом оба компонента направлены либо к линии пересечения, либо от нее.

Количество неизвестных

Количество неизвестных=9, но с учетом закона парности касательных напряжений=6

Количество уравнений равновесия =3

Количество неизвестных превышает число уравнений равновесия

Задачи теории упругости являются статически неопределимыми

Дополнительные уравнения необходимо получить из рассмотрения деформации тела.