Теория механизмов и машин

Лекция 11
Синтез зубчатых передач.

Лектор: ассистент каф. 202
Светличный Сергей Петрович
ауд. 246 м.к

Основная теорема зацепления.

- Плоские ЗП с круглыми зубьями обеспечивают вращательные движения с постоянным передаточным отношениями. Это достигается выбором для профилей специальных кривых.
- Геометрические условия, которым должны удовлетворять эти кривые, определяются основной теоремой зацепления: ***Общая нормаль к соприкасающимся (взаимо огибаемым) профилям зубьев делит линию осей колес на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.***

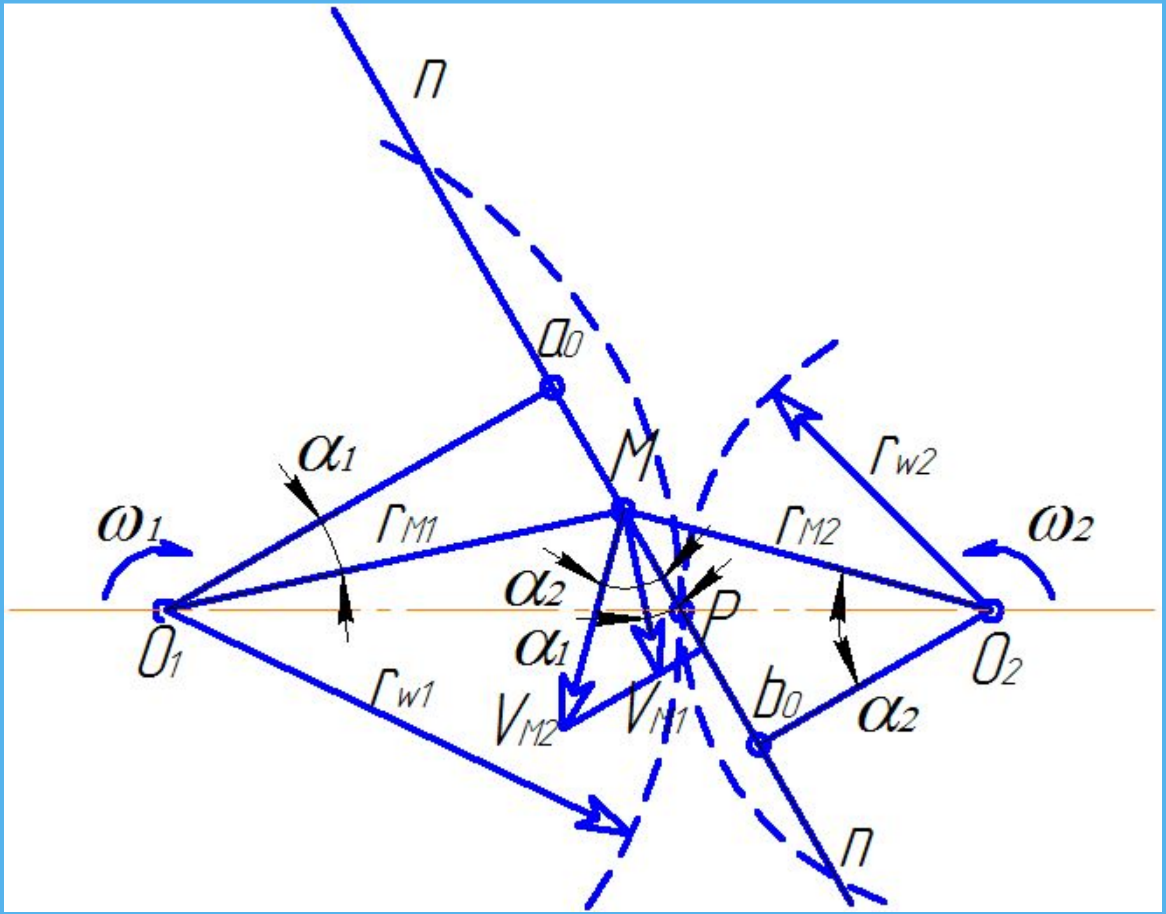
Основная теорема зацепления.

- Пусть в данный момент времени в точке М соприкасаются профили зубьев двух колес, вращающихся вокруг осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 .
- Общая нормаль к профилям зубьев *nn* пересекает линию осей $O_1 O_2$ в точке *p.*
- Скорость точки *M* в системе первого и второго колес:

$$v_{M_1} = \omega_1 r_{M_1};$$

$$v_{M_2} = \omega_2 r_{M_2}.$$

Основная теорема зацепления.



Основная теорема зацепления.

- Проекции скоростей V$_{M1}$ и V$_{M2}$ на общую нормаль *n-n* должны быть равны, так как в противном случае зубья или внедряются друг в друга или разъединяются:

$$V_{M_1} \cos\alpha_1 = V_{M_2} \cos\alpha_2$$

- или

$$\omega_1 r_{M_1} \cos\alpha_1 = \omega_2 r_{M_2} \cos\alpha_2$$

Основная теорема зацепления.

- где α_1 и α_2 – углы, образованные векторами V_{M1} и V_{M2} с общей нормалью *n-n.*
- Опустим из точек O_1 и O_2 перпендикуляры на общую нормаль *n-n.* Величины этих перпендикуляров соответственно равны:

$$O_1a_0 = r_{M_1} \cos\alpha_1$$

$$O_2b_0 = r_{M_2} \cos\alpha_2$$

Основная теорема зацепления.

- Тогда: $$\omega_1 (O_1 a_0) = \omega_2 (O_2 b_0)$$
- Или $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(O_2 b_0)}{(O_1 a_0)}$$
- Так как треугольники O_1a_0p и O_2b_0p подобны, то:

$$\frac{(O_2 b_0)}{(O_1 a_0)} = \frac{O_2 p}{O_1 p}$$

Основная теорема зацепления.

- Окончательно получим:

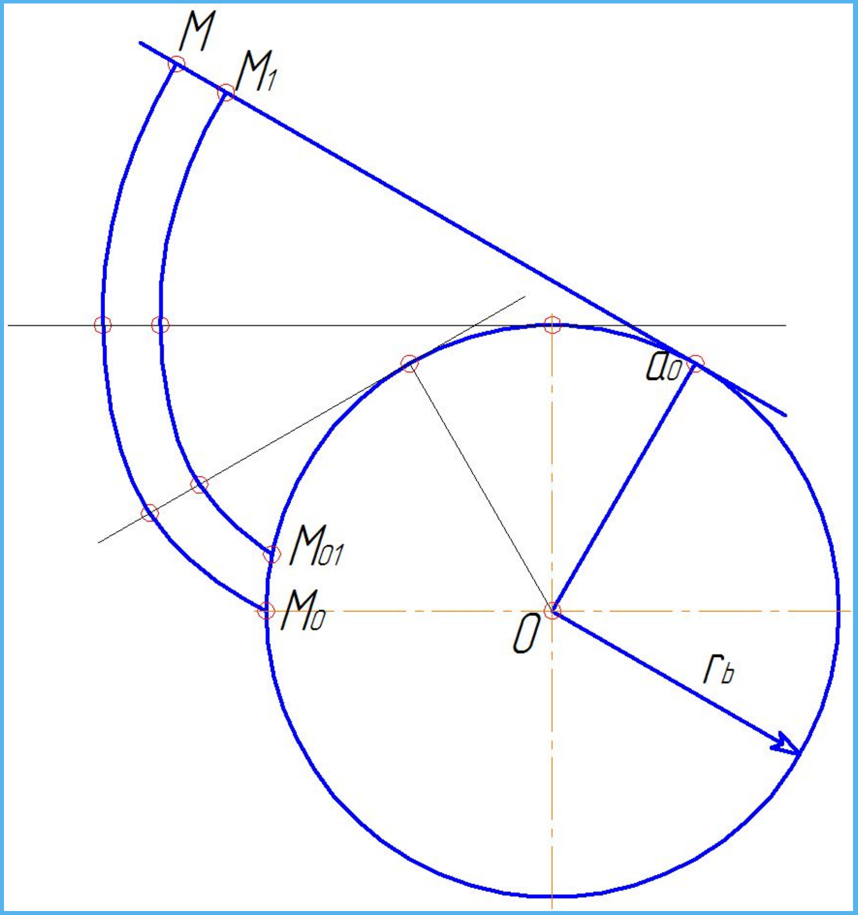
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 p}{O_1 p}$$

- что и требовалось доказать.
- Следствие: *Для постоянства передаточного отношения соприкасающиеся части профилей зубьев должны быть очерчены по таким кривым, чтобы в любой момент времени их контакта общая нормаль к ним проходила через одну и ту же точку р на линии осей, называемую полюсом зацепления.*

Эвольвента окружности.

- *Эвольвентой окружности* называется кривая, которую описывает точка прямой линии, катящейся по окружности без скольжения.
- Окружность по которой перекатывается прямая, называется *основной окружностью,* а сама прямая – *производящей прямой*.
- Основная окружность является эволютой, т.е. геометрическим местом центров кривизны эвольвенты.

Эвольвента окружности.



Основные свойства эвольвенты окружности.

- Нормаль к эвольвенте в любой точке является касательной к основной окружности (Ma_0 – нормаль к эвольвенте в точке M).
- Радиус кривизны эвольвенты в любой ее точке равен длине касательной к основной окружности, проведенной из этой точки ($\rho_M = Ma_0$).

Основные свойства эвольвенты окружности.

- Расстояние по нормали между равноотстоящими (эквидистантными) эвольвентами равно длине меньшей дуги основной окружности между точками возврата M_0 и M_{01}:

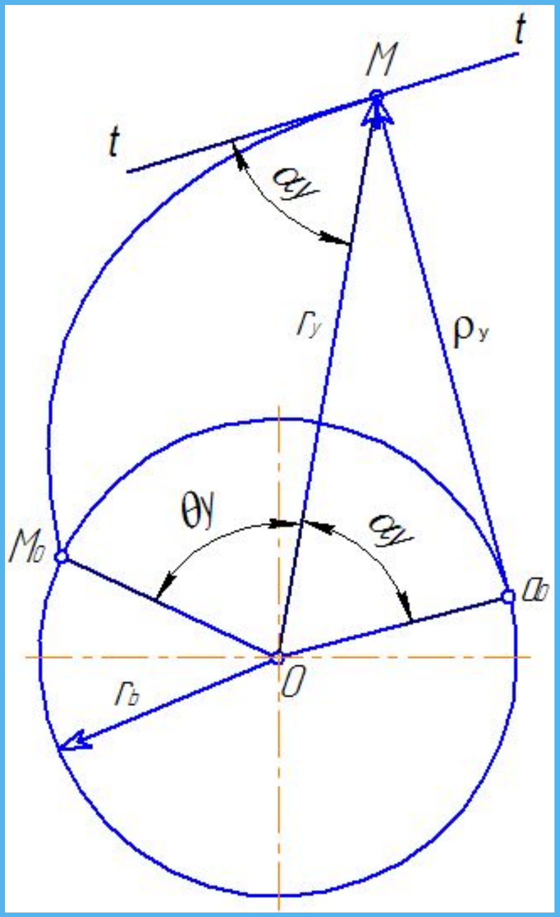
$$\overline{MM_1} = \overset{\frown}{M_0 M_{01}}$$

- Эвольвента имеет две ветви, симметричные относительно прямой проходящей через центр окружности и точку возврата.

Параметрические уравнения эвольвенты окружности в полярных координатах.

- Полярными координатами произвольной точки M эвольвенты окружности являются эвольвентный угол θ_y и радиус-вектор r_y.
- Острый угол α_y между касательной к эвольвенте в рассматриваемой точке и радиус-вектором этой точки называется углом профиля. Очевидно, что $\angle MOa_0 = \alpha_y$.
- Выражение для эвольвентного угла определяется из условия перекатывания производящей прямой по основной окружности:

Параметрические уравнения эвольвенты окружности в полярных координатах.



$$\breve{M}_0 a_0 = \bar{M} a_0$$

- Тогда $r_b(\theta_y + \alpha_y) = r_b \, tg\alpha_y$

$$\theta_y = tg\alpha_y - \alpha_y \qquad (1)$$

Параметрические уравнения эвольвенты окружности в полярных координатах.

- Тригонометрическая функция $tg\alpha_y - \alpha_y$ называется эвольвентной функцией и сокращенно обозначается $inv\alpha_y$ (инвалюта α_y).

$$\theta_y = inv\alpha_y$$

- Выражение для радиуса-вектора находится из треугольника Oa0M:

$$r_y = \frac{r_b}{cos\,\alpha_y} \qquad (2)$$

Параметрические уравнения эвольвенты окружности в полярных координатах.

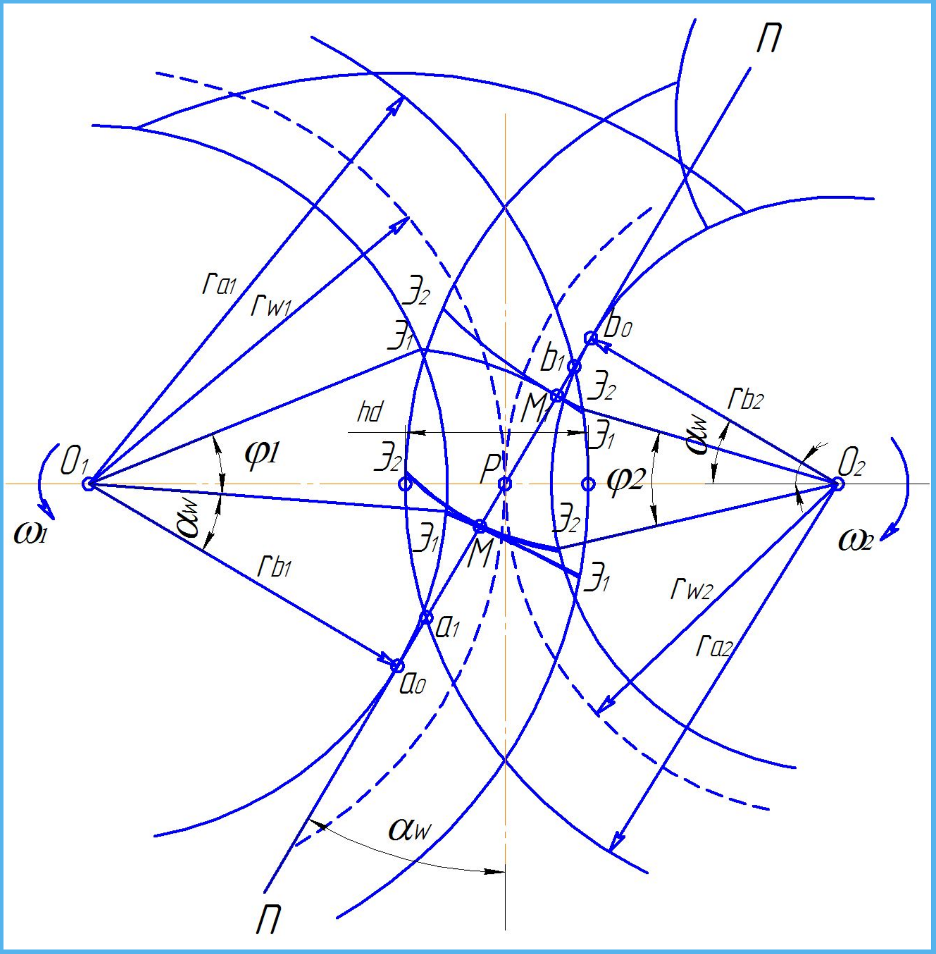
- Зависимости (1) и (2) представляют собой уравнения эвольвенты в полярных координатах с параметром α_y. Радиус кривизны эвольвенты равен:

$$\rho_y = r_b tg\alpha_y \qquad (3)$$

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Докажем, что если профили зубьев очерчены по эвольвентам окружностей, то передача вращения будет происходить с постоянным передаточным отношением, т. е будет удовлетворятся следствие из основной теоремы зацепления.
- Пусть O_1 и O_2 – оси вращения зубчатых колес. Разделим линию O_1O_2 точкой *p* на части, обратно пропорциональные угловым

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.



Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- скоростям ω_1 и ω_2. Радиусами $r_{w1}=O_1p$ и $r_{w2}=O_2p$ проведем начальные окружности.
- Через точку p под произвольным углом к линии O_1O_2 проведем прямую *n-n*. Из точек O1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1a_0 и O_2b_0 на линию *n-n* и радиусами O_1a_0 и O_2b_0 опишем окружности. Эти окружности примем за основные окружности зубчатых колес ($r_{b1}= O_1a_0$, $r_{b2}= O_2b_0$), прямую *n-n* – за производящую прямую.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Возьмем на прямой *n-n* между точками a_0 и b_0 точку *M*.
- При качении прямой *n-n* по основной окружности первого колеса точка *M* опишет эвольвенту $Э_1Э_1$, при качении прямой *n-n* по основной окружности второго колеса точка *M* опишет эвольвенту $Э_2Э_2$.
- Примем эти эвольвенты за соприкасающиеся профили зубьев, ограничив их окружностями вершин радиусами r_{a1} и r_{a2}.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- В данный момент времени эвольвенты $Э_1Э_1$ и $Э_2Э_2$ касаются в точке М и имеют общую нормаль a_0Mb_0, которая делит линию осей O_1O_2 на части обратно пропорциональные угловым скоростям, т.е:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 p}{O_1 p}$$

- Пусть за время *t* первое колесо повернулось на угол ϕ_1, а второе колесо – на угол ϕ_2.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Профили в колес в новом положении имеют контакт в точке M_1, которая будет также находится на линии *n-n*, так как в противном случае соприкасающиеся эвольвенты не имели бы общей нормали в точке касания.
- Но если точка M_1 лежит на прямой , являющейся общей нормалью к эвольвентным профилям зубьев в их новом положении, то, следовательно, для нового положения сохраняется прежнее передаточное отношение.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Так как промежуток времени *t* взят произвольно, то можно заключить, что в любой момент времени эвольвентные профили зубьев будут обеспечивать движение с постоянным передаточным отношением, т. е. удовлетворять следствию из основной теоремы зацепления.
- Прямая *n-n* является линией зацепления.
- Эвольвентные профили зубьев могут касаться друг друга лишь в пределах участка a_0b_0.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Участок a_0b_0 называется предельным участком линии зацепления.
- Точки a_0 и b_0– предельными точками линии зацепления.
- За пределами участка a_0b_0 эвольвенты пересекаются. Поэтому величины радиусов вершин зубьев r_{a1} и r_{a2} следует назначать такими, чтобы окружности вершин пересекали линию зацепления на участке a_0b_0.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

- Участок линии зацепления a_1b_1, заключенный между окружностями вершин зубьев, называется активным участком линии зацепления.
- Участки профилей зубьев, участвующие в зацеплении, называются *активными профилями зубьев*.
- Участок линии осей O_1O_2, заключенный между окружностями вершин, называется *глубиной захода* h_d.

Удовлетворение эвольвентных профилей зубьев следствию из основной теоремы зацепления.

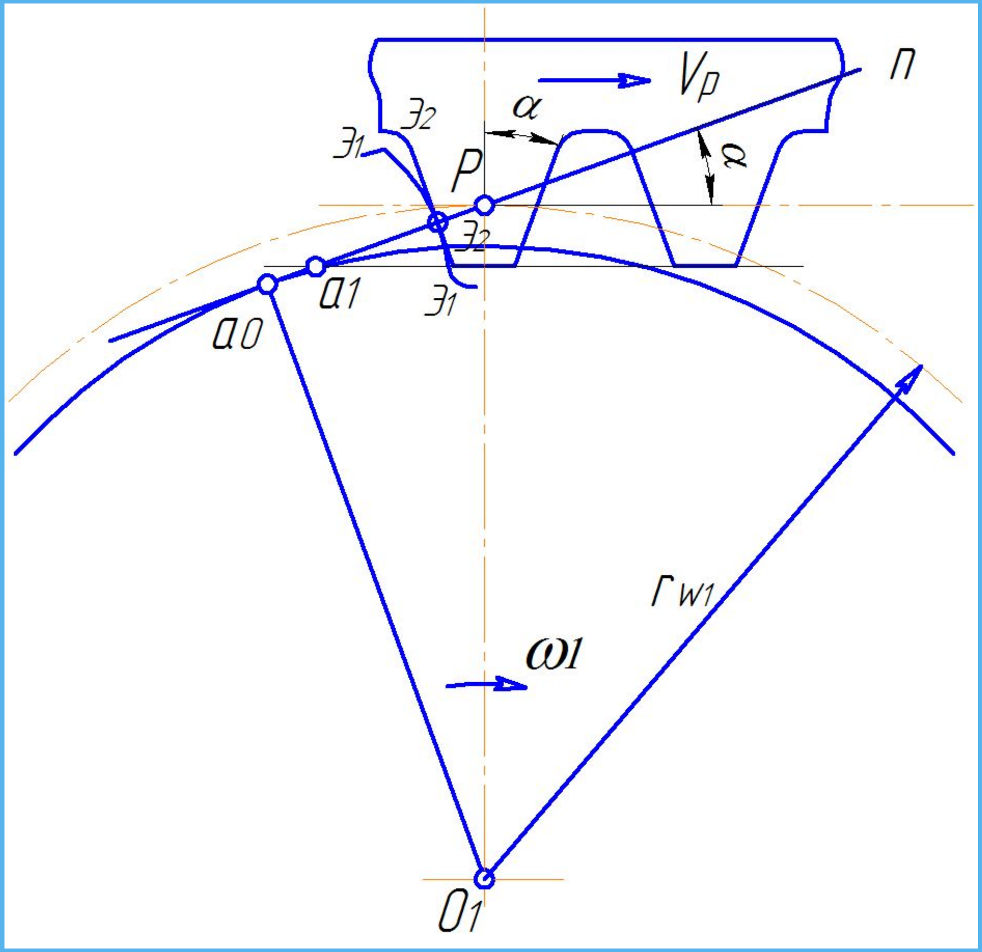
- Угол между линией зацепления и перпендикуляром к линии осей колес называется *углом зацепления* α_w
- Соотношение между радиусом начальной и основной окружностей определяется выражением:

$$r_w = \frac{r_b}{\cos \alpha_w}$$

Зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой.

- Пусть радиус начальной окружности второго колеса r_{w2} увеличивается и в пределе стремится к бесконечности $r_{w_2} \to \infty$, тогда и
$r_{b_2} = r_{w_2} cos\alpha_w \to \infty$
- Вследствие этого радиус кривизны в любой точке эвольвентного профиля зуба второго колеса $\rho_{y_2} = r_{b_2} tg\alpha_y \to \infty$ и эвольвента Э2Э2 вырождается в прямую линию, перпендикулярную линии зацепления *n-n*.

Зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой.



Зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой.

- То есть второе зубчатое колесо превращается в зубчатую рейку, в которой все окружности будут представлены прямыми линиями, а контур зуба получается в виде равнобедренной трапеции. Зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой называется реечным зацеплением.
- Линия зацепления имеет здесь только одну предельную точку a_0.

Зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой.

- В реечной передаче начальная окружность первого колеса перекатывается без скольжения по начальной прямой рейки, при этом эвольвентный профиль зуба $Э_1Э_1$ зуба колеса огибает прямолинейный профиль $Э_2Э_2$ зуба рейки.
- Реечная передача служит для преобразования вращательного движения колеса с угловой скоростью ω_1 в поступательное движение рейки со скоростью $v_р$ (или наоборот).